Universität Bielefeld

Numerische und Angewandte Analysis

Attraktoren für Finite-Elemente Diskretisierungen parabolischer Differentialgleichungen

(2. korrigierte und erweiterte Auflage)

Diplomarbeit

vorgelegt von

Denny Otten

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK

Datum: 23. Juni 2009

Betreuung:
Prof. Dr. W.-J. Beyn
Dipl.-Math. J. Kemper

Inhalt

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Einleitung

In der vorliegenden Diplomarbeit beschäftigen wir uns mit Reaktions-Diffusions-Gleichungen und deren Diskretisierung mittels finiter Elemente. Dabei interessieren wir uns speziell dafür, unter welchen Voraussetzungen an die Nichtlinearität globale Attraktoren existieren und welcher Zusammenhang zwischen dem kontinuierlichen und den aus der Finite-Elemente (FE)-Methode resultierenden Attraktoren besteht. Das Ziel dieser Arbeit ist, zu zeigen, dass der globale Attraktor einer Reaktions-Diffusions-Gleichung mit dissipativer Nichtlinearität oberhalbstetig unter FE-Diskretisierung ist. Mit Oberhalbstetigkeit bezeichnet man dabei die Eigenschaft, dass die FE-Attraktoren zumindest gegen eine Teilmenge des kontinuierlichen Attraktors konvergieren, insofern die Gitterweite gegen 0 strebt. Im Unterschied zum Begriff der Stetigkeit ist damit nicht ausgeschlossen, dass Teile des kontinuierlichen Attraktors unter der Approximation mit finiten Elementen verloren gehen können. Ein abstraktes Konzept für diesen Nachweis liefert Stuart ([32]), der unter geeigneten Voraussetzungen an die kontinuierlichen und diskreten Systeme die Oberhalbstetigkeit für die Spektralmethode bewiesen hat. Das Bestreben ist es daher, zu zeigen, dass dieses Konzept auch auf FE-Methoden anwendbar ist und unter welchen Voraussetzungen an die Nichtlinearität dies möglich ist. Als wesentliches Hilfsmittel verwenden wir die von Robinson ([27]) und Stuart ([32]) entwickelte Existenztheorie für globale Attraktoren dissipativer Reaktions-Diffusions-Gleichungen sowie die von Larsson ([17]) entwickelte Fehlertheorie der FE-Methode. Der Weg dorthin wird im Folgenden anhand der Inhalte der einzelnen Kapitel beschrieben.

In Kapitel 1 führen wir zu Beginn in Abschnitt 1.1 die Reaktions-Diffusions-Gleichung in allgemeiner Form ein und lassen daraufhin einige Anwendungsbeispiele folgen, auf die wir uns später zu gegebenem Anlass beziehen werden. Der Abschnitt 1.2 enthält konkrete Anwendungsgebiete dieses mathematischen Phänomens aus verschiedenen naturwissenschaftlichen Bereichen wie beispielsweise der Chemie, Biologie und Medizin.

Unser Hauptaugenmerk in Kapitel 2 gilt der Lösbarkeit der Reaktions-Diffusions-Gleichung ([16], [17]). Dabei nehmen wir durchweg an, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ entweder ein konvexes polygonales oder ein beschränktes glattes Gebiet (mit C^2-Rand) der Dimension $d = 1, 2$ oder 3 ist. Da die Reaktions-Diffusions-Gleichung nicht notwendigerweise eine Lösung besitzen muss, werden wir zunächst im Abschnitt 2.1 eine Generalvoraussetzung für die Nichtlinearität f einführen, unter der die lokale Lösbarkeit gezeigt werden kann. Um dieses wünschenswerte Resultat zu erhalten, überführen wir zunächst in Abschnitt 2.2 die als ARWP vorliegende Reaktions-Diffusions-Gleichung äquivalent in ein Operator-AWP. Aus der Nichtlinearität f wird dabei der Nemytskii-Operator F hergeleitet. In Abschnitt 2.3 beweisen wir einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für das Operator-AWP. Dabei nutzen wir die Glättungseigenschaften der homogenen linearen Lösung sowie die Eigenschaften des Nemytskii-Operators aus. Der darauffolgende Regularitätssatz in Abschnitt 2.4 versichert uns unter anderem, dass die Umformung des ARWP's zu dem Operator-AWP tatsächlich äquivalent ist. Unter diesem neuen Gesichtspunkt definieren wir den Lösungsoperator S, der uns erlaubt, die Lösungen des Operator-AWP's als semidynamisches System aufzufassen.

Das Ziel in Kapitel 3 ist die Herleitung einer geeigneten Approximation unter Verwendung stetiger und stückweise linearer finiter Elemente, dessen lokale Existenz und Eindeutigkeit sowie dessen Konvergenz gegen die kontinuierliche Lösung aus Kapitel 2 ([16], [17]). Dazu betrachten wir fortan der Einfachheit halber ausschließlich konvexe polygonale Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ der Dimension $d = 1, 2$ oder

3. Zweckgemäß beschreiben wir im Abschnitt 3.1 die Herleitung der schwachen Formulierung unseres Ausgangsproblems. Der Abschnitt 3.2 enthält einen Konstruktionsplan des Finite-Elemente-Raums $\mathcal{V}_h$, des Raumes der stetigen und stückweise linearen finiten Elemente. Dabei fordern wir fortan, dass $\{\mathcal{T}_h\}_{h\in I}$ eine uniforme Familie regulärer Triangulierungen von Ω darstelle. Anschließend verwenden wir diesen endlich dimensionalen Raum $\mathcal{V}_h$ in Abschnitt 3.3 zur Formulierung des Galerkin-Verfahrens und leiten uns das räumlich diskretisierte Operator-AWP her. Im Abschnitt 3.4 beweisen wir für dieses AWP einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz. Im Anschluss daran definieren wir den Lösungsoperator S_h, der uns ermöglicht, die Lösungen des räumlich diskretisierten Operator-AWP's als semidiskretes semidynamisches System zu betrachten. Im Abschnitt 3.5 beschäftigen wir uns mit geeigneten Konvergenzaussagen zwischen der kontinuierlichen Lösung und der FE-Approximation auf beschränkten Zeitintervallen. Dabei werden wir die Konvergenzaussagen in der L^2- und in der H^1-Norm sowie für glatte als auch für nichtglatte Anfangsdaten im Detail analysieren. Der Beweis dazu basiert auf einer Verallgemeinerung des Gronwall-Lemmas und lässt sich mit den vorab bewiesenen Konsistenz- und Stabilitätsaussagen leicht zeigen.

In Kapitel 4 führen wir für unser zunächst nur räumlich diskretisiertes Ausgangsproblem eine vollständige Diskretisierung unter Verwendung der impliziten Euler-Methode durch. Für das daraus resultierende volldiskretisierte System beweisen wir die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung sowie die Konvergenz dieser Näherungslösung gegen die kontinuierliche Lösung aus Kapitel 2 ([16], [17]). Um das zugrunde liegende räumlich diskretisierte Problem auch zeitlich und somit vollständig zu diskretisieren, wenden wir in Abschnitt 4.1 das implizite Euler-Verfahren an und leiten damit das vollständig diskretisierte nichtlineare Operator-AWP her. Im darauffolgenden Abschnitt 4.2 beweisen wir für dieses AWP einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz. Im Abschnitt 4.3 beschäftigen wir uns mit der Konvergenzanalyse zwischen der kontinuierlichen Lösung und der FE- und impliziten Euler-Approximation auf beschränkten Intervallen. Wir untersuchen dabei die Konvergenzaussagen erneut in der L^2- und in der H^1-Norm sowie für glatte als auch für nichtglatte Anfangsdaten. Der Beweis dazu basiert auf einer diskreten Version des Gronwall-Lemmas und lässt sich wie zuvor leicht durch geeignete Konsistenz- und Stabilitätsaussagen zeigen.

Im Kapitel 5 untersuchen wir das Langzeitverhalten semilinearer parabolischer Probleme in kontinuierlicher und FE-diskretisierter Form ([27], [32]). Dabei interessieren wir uns speziell für die Existenz globaler Attraktoren, die asymptotische Dynamik der Systeme und das Konvergenzverhalten der FE-Attraktoren. Da die Reaktions-Diffusions-Gleichung nicht notwendigerweise zeitlich globale Lösungen bzw. einen Attraktor besitzen muss, werden wir vorab in Abschnitt 5.1 zusätzlich zu der Generalvoraussetzung 2.1 eine weitere Generalvoraussetzung einführen. In Abschnitt 5.2 werden wir für die Lösungsoperatoren S und S_h mithilfe dieser zusätzlichen Forderung jeweils a-priori Schranken herleiten, die uns die gewünschte zeitlich globale Existenz aller Lösungen zu beliebigen Anfangsdaten liefern. Dazu führen wir ein geeignetes Lyapunov-Funktional ein und benutzen es um a-priori Schranken für die Lösungen herzuleiten. Anschließend zeigen wir, dass $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ und $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ semidynamische Systeme bilden. In Abschnitt 5.3 bestimmen wir eine gleichmäßig (uniform in h) absorbierende Menge für das kontinuierliche sowie für das FE-diskretisierte Problem. In Abschnitt 5.4 führt uns die Existenz gleichmäßig (uniform in h) absorbierender Mengen zu den dissipativen semidynamischen Systemen, die die schöne Eigenschaft besitzen, dass sie in endlich-dimensionalen Räumen generell einen globalen Attraktor aufweisen. Mit gewissen Kompaktheitsargumenten lässt sich auch die Existenz eines globalen Attraktors für das kontinuierliche System im unendlich-dimensionalen Phasenraum $H_0^1(\Omega)$ nachweisen. Da die Darstellung der globalen Attraktoren jeweils über die ω-Limes-Menge erfolgt und uns dies nur wenig Informationen über die asymptotische Dynamik im Inneren des Attraktors verrät, leiten wir uns in Abschnitt 5.5 aufgrund der Existenz der Lyapunov-Funktionale ein Strukturresultat für den globalen Attraktor der kontinuierlichen und der FE-diskretisierten Reaktions-Diffusions-Gleichung her. Die Existenz eines solchen Funktionals versichert uns, dass der globale Attraktor aus der instabilen Mannigfaltigkeit der Gleichgewichtspunkte besteht. In Abschnitt 5.6 analysieren wir das Konvergenzverhalten zwischen dem kontinuierlichen und den FE-diskretisierten globalen Attraktoren.

Dabei präsentieren wir das Hauptresultat dieser Arbeit, das besagt, dass der globale Attraktor der Reaktions-Diffusions-Gleichung oberhalbstetig unter FE-Diskretisierung ist. Der konstruktive Beweis dieser Aussage basiert auf einem Schnittpunktargument. Die Unterhalbstetigkeit lässt sich unter anderem wegen der mangelnden Kenntnisse über die Attraktionsgeschwindigkeit zumeist nicht beweisen. Für exponentielle Attraktionsraten können wir sie dennoch zeigen.

Als numerisches Anwendungsbeispiel fahren wir in Kapitel 6 mit der skalaren Chafee-Infante-Gleichung fort. Dazu beginnen wir in Abschnitt 6.1 mit der Herleitung des Gleichungssystems, das wir für die noch ausstehenden Berechnungen benötigen, indem wir das Anfangs-Randwertproblem räumlich mit der Finite-Elemente-Methode und zeitlich mit dem expliziten Euler-Verfahren diskretisieren. In Abschnitt 6.2 führen wir eine Bifurkationsanalyse der skalaren Chafee-Infante-Gleichung im Kontinuierlichen und unter FE-Diskretisierung durch. Diese Untersuchungen liefern uns neben den Verzweigungspunkten und neben der Anzahl der stationären Lösungen für verschiedene Bifurkationsparameter auch einen ersten Eindruck vom Aussehen der Attraktoren. In Hinblick darauf führen wir in Abschnitt 6.3 die FE-Bifurkationsanalyse für die eindimensionale Chafee-Infante-Gleichung in der Praxis durch. Dazu stellen wir sowohl das MATLAB-Paket MATCONT sowie die MATCONT Systemdatei der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung vor und diskutieren im Anschluss daran die praktischen Resultate. In Abschnitt 6.4 untersuchen wir den FE-Attraktor der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung in aller Ausführlichkeit. Hierzu stellen wir das MATLAB-Paket GAIO sowie die GAIO Modelldatei vor und präsentieren nachfolgend unsere Ergebnisse. Angesichts der Oberhalbstetigkeit des globalen Attraktors unter FE-Diskretisierung werden wir sowohl speichertechnisch als auch zeitlich rasch an die Grenzen stoßen.

Weitere Ergänzungen zu dieser Arbeit sind im Internet unter der folgenden Adresse frei zugänglich zur Verfügung gestellt worden

http://www.math.uni-bielefeld.de/~dotten/publikationen.shtml

Diese Diplomarbeit entstand an der Fakultät für Mathematik in der Arbeitsgruppe dynamischer Systeme der Universität Bielefeld unter Leitung von Herrn Prof. Dr. Wolf-Jürgen Beyn und Betreuung von Dipl. Math. Jens Kemper.

Ich möchte mich bei Herrn Beyn hinsichtlich der Möglichkeit bedanken, in seiner Arbeitsgruppe diese Diplomarbeit anzufertigen. Nicht zuletzt durch die herzensgute und engagierte Betreuung hat mir diese Arbeit allerhand Freude bereitet.

Gleichermaßen gilt mein Dank Herrn Kemper, der mir bei der Betreuung dieser Arbeit mit reichlich Anregungen und immenser Unterstützung stets zur Seite stand.

Nicht zuletzt möchte ich meiner Freundin und meinen lieben Eltern, ohne die dieses Studium vermutlich nie möglich gewesen wäre, meine herzliche Dankbarkeit ausdrücken. Durch ihre sowohl moralische als auch finanzielle Unterstützung ermöglichten sie mir jeweils drei faszinierende Jahre in Bayreuth und in Bielefeld.

1. Eine kurze Einführung in semilineare parabolische Anfangs-Randwertprobleme

In diesem ersten Kapitel werden wir das semilineare parabolische Anfangs-Randwertproblem einführen und motivieren. Dazu lassen wir nach dessen allgemeiner Definition in Abschnitt 1.1 einige häufig vorkommende Anwendungsbeispiele folgen. In Abschnitt 1.2 listen wir einige naturwissenschaftliche Bereiche auf, in denen diese Gleichung zur Modellierung verschiedener Vorgänge verwendet wird.

1.1. Das semilineare parabolische Anfangs-Randwertproblem

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ entweder ein beschränktes glattes Gebiet oder ein konvexes polygonales Gebiet der Dimension $d = 1, 2$ oder 3. Wir betrachten durchweg das folgende semilineare parabolische Anfangs-Randwertproblem (kurz: **ARWP**) zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} u_t - D\triangle u &= f(u) && \text{in } \Omega\times]0,T[\\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times [0,T[\\ u(\,.\,,0) &= u_0 && \text{in } \Omega \end{aligned} \tag{1.1}$$

wobei $u_0 : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ glatt mit $u_0|_{\partial\Omega} = 0$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $D \in \mathbb{R}$ gegeben seien. Gesucht wird hierbei eine Funktion $u : \overline{\Omega} \times [0,T[\longrightarrow \mathbb{R}$ mit $u = u(x,t)$, die die in (1.1) stehenden Bedingungen erfüllt. Es handelt sich bei dieser partiellen Differentialgleichung (1.1) um eine so genannte **Reaktions-Diffusions-Gleichung** (kurz: **RD-Gleichung**, oder: **semilineare parabolische Gleichung**) mit **homogener Dirichlet-Randbedingung**, d.h. $u = 0$ auf $\partial\Omega \times [0,T[$. Wir nennen (1.1) **homogen**, falls $f(u) \equiv 0$, ansonsten **inhomogen**. Den Faktor D bezeichnet man als **Diffusionskoeffizienten**, $D\triangle u$ als **linearen Diffusionsterm** und $f(u)$ als **nichtlinearen Reaktionsterm**. Wir werden in der gesamten Ausarbeitung $d = 1, 2$ und 3 zulassen und ausschließlich $D = 1$ betrachten.

Beispiel. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda > 0$ und $\alpha \in]0,1[$.

(1): $u_t - \triangle u = \lambda(u - u^2)$ (**Kolmogorov-Petrovsky-Piskounov-Gleichung**)
(**Fisher-Gleichung**) (1.2)

(2): $u_t - \triangle u = \lambda u(1-u)(u-\alpha)$ (**Allen-Cahn-Modell**) (1.3)

(3): $u_t - \triangle u = \lambda(u - u^3)$ (**Chafee-Infante-Gleichung**) (1.4)

(4): $u_t - \triangle u = \lambda(-u^2 - 3u^3)$ (**Medizinisches-Modell**) (1.5)

Seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ und $u = (u_1, u_2, u_3)$.

(5): $$\begin{aligned} u_{1,t} - \triangle u_1 &= \alpha(u_2 - u_1u_2 + u_1 - \beta u_1^2) \\ u_{2,t} - \triangle u_2 &= \frac{1}{\alpha}(\gamma u_3 - u_2 - u_1u_2) \\ u_{3,t} - \triangle u_3 &= \delta(u_1 - u_3) \end{aligned}$$ (**Belousov-Zhabotinsky-Reaktion**) (1.6)

□

In den Beispielen (1.2) - (1.5) stellt λ jeweils ein Kontrollparameter dar, der die relative Balance zwischen dem linearen Diffusionsterm $\triangle u$ und dem nichtlinearen Reaktionsterm $f(u)$ reguliert.

1.2. Motivation

Um den gesamten Sachverhalt etwas anschaulicher darzustellen, sollten wir vorab einige Anwendungsgebiete betrachten, in denen Gleichungen dieser Art eine zentrale Rolle spielen.

1.2.a. Beispiel aus der Chemie

In allgemeinen chemischen Anwendungsproblemen gibt diese partielle Differentialgleichung (1.1) beispielsweise die Entwicklung einer Dichte (oder Konszentration) irgendeiner beliebigen Chemikalie an, die in einem Medium mit weiteren Chemikalien vermischt wird und auf diese Chemikalien einwirkt. Der Diffusionsterm $\triangle u$ ist eine Art Streuungsterm oder Vermischungsterm. Die Konstante D (hier: 1) gibt im allgemeinen Fall die Diffusion dieser Chemikalie an. Der Reaktionsterm $f(u)$ modelliert die Chemie - also das aufeinander Einwirken - und enthält Informationen darüber, welche Reaktionen bei der Vermischung dieser Chemikalien auftreten. In realistischen Modellen ist f häufig ein Polynom in u.

Die sogenannte **Belousov-Zhabotinsky-Reaktion** (oder kurz: **BZR**) in (1.6) ist ein Beispiel für einen homogenen chemischen Oszillator. Es treten hierbei sehr komplexe chemische Reaktionen auf, bei denen sich die Reaktionsgeschwindigkeit nicht monoton ändert, sondern periodische Schwankungen aufweist, was für chemische Reaktionen in der Regel unüblich ist. Da eine lokale oszillierende chemische Reaktion mit einem Diffusionsvorgang gekoppelt ist, entstehen bei der Durchführung dieses Experiments räumliche Muster.

1.2.b. Beispiel aus der Biologie

Die räumlichen Ausbreitungsprozesse von Tieren und Pflanzen sind wohlbekannte Beispiele aus dem Bereich der Biologie. Im Bereich der Populationsdynamik können wir uns unter $u(x,t)$ die Bevölkerungsdichte zum Zeitpunkt t im Ort x vorstellen, wobei x ein Ort in einem beschränkten Gebiet Ω ist. Besitzen wir zusätzliche Informationen über den Bevölkerungsfluss auf dem Rand von Ω, so lässt sich mithilfe des zweiten Fickschen Gesetzes eine Reaktions-Diffusions-Gleichung konstruieren. Ein Beispiel hierfür wäre die **Kolmogorov-Petrovsky-Piskounov-Gleichung** (oder kurz: **KPP-Gleichung**) in (1.2). Weitere Beispiele in diesem Bereich sind das **Allen-Cahn-Modell** in (1.3) (auch bekannt unter dem Namen **FitzHugh-Nagumo-Gleichung** oder **Hodgkin-Huxley-Gleichung**) und die **Chafee-Infante-Gleichung** in (1.4) (auch bekannt unter dem Namen **Newell-Whitehead-Gleichung**).

1.2.c. Beispiel aus der Medizin

Das **Medizinische-Modell** in (1.5) wird im Forschungsbereich der Medizin speziell für $\lambda = 1$ zur der Modellierung elektrischer Ströme im menschlichen Herzen verwendet. Ein weiteres Beispiel aus diesem Bereich ist die **Chafee-Infante-Gleichung** in (1.4), die zur mathematischen Modellierung des Heilungsprozesses von Brustkrebs verwendet wird.

1.2.d. Beispiel aus dem Maschinenbau

Im Maschinenbau (und auch in der Chemie) werden Reaktions-Diffusions-Gleichungen auch häufig zur Modellierung verschiedener Systeme betrachtet, bei denen Konvektion, Diffusion und Reaktion gemeinsam auftreten.

2. Lösbarkeit des kontinuierlichen Problems

In diesem Kapitel untersuchen wir Anfangs-Randwertprobleme für semilineare parabolische Differentialgleichungen. Wie wir bereits in Kapitel 1 gesehen haben, spielen diese Gleichungen sowohl in der Theorie als auch in der Praxis eine wesentliche Rolle. Nach einer in Abschnitt 2.1 eingeführten Generalvoraussetzung für die rechte Seite beginnen wir in Abschnitt 2.2 mit der Herleitung zahlreicher wichtiger Eigenschaften für die Nichtlinearität ([17], [18]). Diese können dazu benutzt werden, um die Existenz und Eindeutigkeit sowie verschiedene Regularitätsaussagen des zum Anfangs-Randwertproblem äquivalenten Operator-Anfangswertproblems zu zeigen. In Abschnitt 2.3 beweisen wir die lokale Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der semilinearen parabolischen Differentialgleichung mit homogener Dirichlet-Randbedingung, indem wir ein Fixpunktargument anwenden ([17], [18]). In Abschnitt 2.4 zeigen wir sowohl für glatte als auch für nichtglatte Anfangsdaten einige regularitätstheoretische Resultate ([18]), die uns unter anderem die Lösbarkeitsäquivalenz zwischen dem semilinearen parabolischen Anfangs-Randwertproblem und dem Operator-Anfangswertproblem liefern. Abschließen werden wir das Kapitel in Abschnitt 2.5 mit einigen Ergänzungen zur Lösbarkeitstheorie.

2.1. Generalvoraussetzungen

Da die Lösbarkeit des semilinearen parabolischen Anfangs-Randwertproblems (1.1) ohne weitere Annahmen nicht zwangsläufig garantiert ist, werden wir in diesem Abschnitt eine geeignete Bedingung für den Reaktionsterm f formulieren ([17] (1.2), [27] (8.29), [29] (2.2), [30] Kap.3.1, [34] (14.5)), unter der sich im späteren Verlauf die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (1.1) zeigen lässt. Dazu fordern wir für das gesamte Kapitel, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ entweder ein beschränktes glattes Gebiet oder ein konvexes polygonales Gebiet der Dimension $d = 1, 2$ oder 3 ist.

2.1 Generalvoraussetzung. *Die Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei zweimal stetig-differenzierbar, d.h. $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Falls das Gebiet Ω zwei- oder drei-dimensional ist, so gebe es zusätzlich eine Konstante $C > 0$, so dass die Bedingung*

$$|f^{(j)}(u)| \leqslant C \cdot (1 + |u|^{\delta+1-j}) \quad \forall\, u \in \mathbb{R} \text{ und } j = 1, 2 \tag{2.1}$$

erfüllt ist, wobei $\delta = 2$, falls $d = 3$, und $\delta \in [1, \infty[$, falls $d = 2$ ist. Hierbei bezeichnet $|\bullet|$ die euklidische Norm in $\mathbb{R}$.

Wir werden später zeigen, dass die Lösung von (1.1) unter dieser Voraussetzung in der Regel lokal, also auf einem endlichen Zeitintervall $[0, T[$, existiert. Für die Existenz einer Lösung auf dem einseitig unbeschränkten Intervall $[0, \infty[$, die für die noch anstehenden Langzeituntersuchungen unerlässlich ist, wird die geforderte Glattheit und punktweise Beschränktheit von f nicht genügen. Daher werden wir in Kapitel 5 zusätzliche Bedingungen formulieren, unter denen sich die globale Existenz einer Lösung zeigen und das Langzeitverhalten analysieren lässt.

Es sei vermerkt, dass in einigen Artikeln der Ausgangspunkt die globale Beschränktheit von f, f' und f'' ist ([32] (2.13), [15] (1.7)). In diesem Falle erhält man die globale Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (1.1) aus der globalen Lipschitz-Stetigkeit des nichtlinearen Reaktionsterms f, die wiederum aus der globalen Beschränktheit von f folgt. Anstelle dieser starken Einschränkung verwenden wir mit (2.1) den Ansatz von Larsson ([17] (1.2)), der lediglich die punktweise Beschränktheit dieser Funktionen fordert.

Beispiel. (1): Es lässt sich für jedes unsere Standardbeispiele (1.2)-(1.5) zeigen, dass sie die Generalvoraussetzung 2.1 für $d = 1, 2, 3$ erfüllen. Exemplarisch zeigen wir dies für die Chafee-Infante-Gleichung (1.4) mit $f(u) = \lambda(u - u^3)$: Der Fall $d = 1$ ist trivialerweise richtig, da die Funktion $\lambda(u - u^3)$ zweimal stetig differenzierbar bzgl. $u \in \mathbb{R}$ ist. Die zusätzlichen Ungleichungen der Fälle $d = 2$ und $d = 3$ lassen sich gemeinsam für $\delta = 2$ zeigen, denn zum einen folgt aus der Abschätzung

$$|\lambda(1 - 3u^2)| - 3|\lambda|(1 + |u|^2) \leqslant |\lambda| + 3|\lambda||u|^2 - 3|\lambda| - 3|\lambda||u|^2 = -2|\lambda| \leqslant 0 \quad \forall\, u \in \mathbb{R}$$

die Schranke für $f'(u) = \lambda(1 - 3u^2)$ und zum anderen folgt aus der Ungleichung

$$|\lambda(-6u)| - 6|\lambda|(1 + |u|) \leqslant 6|\lambda||u| - 6|\lambda| - 6|\lambda||u| = -6|\lambda| \leqslant 0 \quad \forall\, u \in \mathbb{R}$$

die punktweise Beschränktheit für $f''(u) = \lambda(-6u)$. Somit gelten beide Abschätzungen mit der gemeinsamen Konstanten $C(\lambda) := \max\{3|\lambda|, 6|\lambda|\} = 6|\lambda|$ und $\delta = 2$. Dies ist fernerhin die optimale Schranke für die Chafee-Infante-Gleichung (1.4). Ähnlich lässt sich dies auch für die Beispiele (1.2), (1.3) und (1.5) für $\delta = 2$ zeigen. Die optimalen Konstanten sind hierbei $C(\lambda) = 2|\lambda|$ für (1.2), $C(\lambda) = 6|\lambda|$ für (1.3) und $C(\lambda) = 18|\lambda|$ für (1.5). Weitere Beispiele zur Lösbarkeit finden sich auch in Anhang A.7.a.
(2): In der Tat gibt es aber auch Beispiele, für die unsere Lösbarkeitstheorie in bestimmten Dimensionen schlichtweg nicht greift. So gibt es beispielsweise für die biquadratische Funktion $f(u) = u^4$ keine Konstante $C > 0$ mit $|f(u)| \leqslant C(1 + |u|^3)$, wobei $\delta = 2$ gewählt wurde. Daher müssten wir $\delta = 3$ setzen, um die Möglichkeit zu wahren, die Generalvoraussetzung (2.1) zu erfüllen. Mit dieser Wahl ist die Lösbarkeit in ein- und zweidimensionalen Gebieten mit $C = 1$ zwar gesichert, doch können wir nun keine weiteren Aussagen über die Lösbarkeit für Gebiete $\Omega \subset R^3$ treffen. Allgemeiner sind wir mit unserer Theorie in denjenigen Situationen, in denen der Grad der polynomialen Funktion f größer 3 ist, also insofern f stärker als kubisch anwächst, bezüglich der Lösbarkeit im $\mathbb{R}^3$ an unsere Grenzen gestoßen. Dennoch können wir festhalten, dass wir für beliebige Polynome vom Grad größer oder gleich 1 eine Lösung in ein- und zweidimensionalen Gebieten erhalten. Unsere Theorie zur Lösbarkeit im $\mathbb{R}^2$ greift beispielsweise bei der Wahl von $f(u) = \exp(u)$ nicht mehr, da die Exponentialfunktion bekanntlich schneller als jedes Polynom endlichen Grades wächst und sich daher nicht polynomial beschränken lässt. Dank der schwachen Forderungen bei eindimensionalen Gebieten in der Generalvoraussetzung 2.1, bleibt diese Funktion aber weiterhin in eindimensionalen Gebieten lösbar. □

2.2. Zentrale Eigenschaften der Nichtlinearität

In diesem Abschnitt werden wir den nichtlinearen Reaktionsterm f genauer analysieren ([17] Kap.1). Die Idee, die wir hierbei verfolgen und realisieren werden, ist es, die Funktion f als nichtlinearen Operator F aufzufassen ([9] Kap.7.1.1.b, [16] Kap.2, [17] Kap.1, [27] Kap.8.4, [30] Kap.3.1, [32] Exa.2.5). Somit können wir das semilineare parabolische Anfangs-Randwertproblem (1.1) äquivalent in ein Operator-Anfangswertproblem überführen. Wir betrachten dazu zunächst

$$u : [0, T[\longrightarrow H_0^1(\Omega) \quad \text{mit} \quad [u(t)](x) := u(x, t) \quad \forall\, x \in \Omega\, \forall\, t \in [0, T[$$

Mit anderen Worten betrachten wir anstelle der Funktion u, die von x und t zusammen abhängt, nunmehr die Abbildung u, die ausschließlich von t abhängt und in den Raum $H_0^1(\Omega)$ abbildet. Weiter fordern wir für den Augenblick, dass $t \in [0, T[$ beliebig ist und schreiben daher u anstelle von $u(t)$ und $u(x)$ anstelle von $u(x, t)$. Unsere Glattheitsvoraussetzungen an f versichern uns, dass wir mithilfe des nichtlinearen Reaktionsterms f die Operatoren

$$\begin{aligned} F(u)(x) &:= f(u(x)) \\ (dF(u)v)(x) &:= f'(u(x)) \cdot v(x) \end{aligned}$$

definieren können. Dabei sind die Bildräume des nichtlinearen Operators F und des Operators $dF(u)$ zunächst noch ungewiss. Der folgende Satz offenbart uns einige zentrale Eigenschaften dieser Operatoren ([16] Lem.2.1, [17] Lem.1.1, [18] Lem.1.1, [27] Prop.8.6 und Exer.8.4, [32] (2.11)). Wir bezeichnen fortan mit

$$B_{X,\|\bullet\|_Y,R} := \{u \in X \mid \|u\|_Y \leqslant R\} \subset X$$

die abgeschlossene Kugel im Funktionenraum X mit dem Mittelpunkt 0 und dem Radius R bezüglich der Norm $\|\bullet\|_Y$. Speziell für $X = H_0^1(\Omega)$ und $\|\bullet\|_Y = \|\bullet\|_{H^1}$ verwenden wir die Notation B_R. Da der Beweis des folgenden Satzes einige funktionalanalytische Vorkenntnisse erfordert, wurden im Anhang A.1, A.3 und A.4 die verwendeten Hilfsmittel bereitgestellt.

2.2 Satz. *Zu jedem $R > 0$ gibt es eine Konstante $C(R) > 0$, so dass für alle $u, v \in B_R$ die folgenden Aussagen gelten:*

(1): $dF(u) : H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ ist ein stetiger linearer Operator, d.h. es gilt

$$\|dF(u)z\|_{L^2} \leqslant C(R) \cdot \|z\|_{H^1} \quad \forall\, z \in H_0^1(\Omega) \tag{2.2}$$

$$\|dF(u)\|_{L(H_0^1,L^2)} \leqslant C(R)$$

(2): Die Abbildung $H_0^1(\Omega) \longrightarrow L(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ mit $u \longmapsto dF(u)$ ist stetig und Lipschitz-stetig auf B_R, d.h. es gilt

$$\|dF(u)z - dF(v)z\|_{L^2} \leqslant C(R) \cdot \|u - v\|_{H^1} \cdot \|z\|_{H^1} \quad \forall\, z \in H_0^1(\Omega)$$

$$\|dF(u) - dF(v)\|_{L(H_0^1,L^2)} \leqslant C(R) \cdot \|u - v\|_{H^1}$$

(3): $dF(u)$ ist die Fréchet-Ableitung von F an der Stelle $u \in B_R$, es gilt sogar

$$\|F(u) - F(v) - dF(u)(u - v)\|_{L^2} \leqslant C(R) \cdot \|u - v\|_{H^1}^2$$

(4): $F : B_R \longrightarrow L^2(\Omega)$ ist ein stetiger und auf B_R Lipschitz-stetiger beschränkter nichtlinearer Operator, d.h. es gilt

$$\|F(u) - F(v)\|_{L^2} \leqslant C(R) \cdot \|u - v\|_{H^1} \tag{2.3}$$

$$\|F(u)\|_{L^2} \leqslant C(R) \tag{2.4}$$

$$F \in C^1(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$$

(5): $dF(u) : L^2(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ ist ein stetiger linearer Operator, d.h. es gilt

$$\|dF(u)z\|_{H^{-1}} \leqslant C(R) \cdot \|z\|_{L^2} \quad \forall\, z \in L^2(\Omega) \tag{2.5}$$

$$\|dF(u)\|_{L(L^2,H^{-1})} \leqslant C(R)$$

(6): $F : B_{L^2(\Omega),\|\bullet\|_{L^2},R} \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ ist ein stetiger und auf $B_{L^2(\Omega),\|\bullet\|_{L^2},R}$ Lipschitz-stetiger beschränkter nichtlinearer Operator, d.h. es gilt

$$\|F(u) - F(v)\|_{H^{-1}} \leqslant C(R) \cdot \|u - v\|_{L^2} \tag{2.6}$$

$$\|F(u)\|_{H^{-1}} \leqslant C(R)$$

Falls $u \in H^2(\Omega) \cap B_R$, so gilt:

(7): $dF(u) : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ ist ein stetiger linearer Operator, d.h. es gilt

$$dF(u)w \in H_0^1(\Omega) \quad \forall\, w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

$$\|dF(u)w\|_{H^1} \leqslant C(R) \cdot (\|u\|_{H^2}\|w\|_{H^1} + \|w\|_{H^2}) \quad \forall\, w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \tag{2.7}$$

$$\|dF(u)\|_{L(H^2 \cap H_0^1, H_0^1)} \leqslant C(R)$$

Beweis. Es wird gezeigt, dass es für jede Dimension $d = 1, 2, 3$ und für jede Aussage eine solche Konstante $C(R) > 0$ gibt. Diese muss aber nicht notwendig für jede Aussage denselben Wert haben.

Sei nun $R > 0$ beliebig.
zu (1): 1. Fall: $(d = 1)$ Für $u \in B_R$ gilt wegen Satz A.15 (mit $p = 2$) die Abschätzung

$$|u(x)| \leqslant \sup_{x\in\Omega} |u(x)| = \|u\|_{L^\infty} \overset{\text{A.15}}{\leqslant} C\|\nabla u\|_{L^2} = C|u|_{H^1} \leqslant C\|u\|_{H^1} \leqslant CR \quad \forall\, x \in \Omega$$

Da f' (wegen $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$) stetig ist, nimmt f' auf dem kompakten Intervall $[-CR, CR]$ das Maximum $C(R) < \infty$ an, daher gilt

$$|f'(u(x))| \leqslant \sup_{x\in\Omega} |f'(u(x))| = \sup_{\substack{y\in\mathbb{R}\\ |y|\leqslant CR}} |f'(y)| =: C(R) \quad \text{, wobei } \|f'(u(\bullet))\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\Omega} |f'(u(x))|$$

Damit folgt aus der Hölderschen Ungleichung A.43 (mit $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\infty}$) und aus $\|\bullet\|_{L^2} \leqslant \|\bullet\|_{H^1}$

$$\|dF(u)z\|_{L^2} = \|f'(u(\bullet)) \cdot z(\bullet)\|_{L^2} \overset{\text{A.43}}{\leqslant} \|f'(u(\bullet))\|_{L^\infty} \cdot \|z\|_{L^2} \leqslant C(R) \cdot \|z\|_{H^1} \quad \forall\, z \in H_0^1(\Omega)$$

2. Fall: $(d = 2, 3)$ Aus der Hölderschen Ungleichung A.43 (mit $\frac{1}{2} = \frac{\delta}{q} + \frac{1}{p}$, wobei $p = q = 6$ falls $d = 3$ und $p \in [1, \infty[$ falls $d = 2$), der Sobolevschen Ungleichung A.14(1) (mit $k = 1$, $d = 3$) und A.14(2) (mit $k = 1$, $d = 2$), der Minkowskischen Ungleichung A.42 und der Generalvoraussetzung (2.1) erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\|dF(u)z\|_{L^2} = \|f'(u(\bullet)) \cdot z(\bullet)\|_{L^2} = \left(\int_\Omega [f'(u(x)) \cdot z(x)]^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{(2.1)}{\leqslant} \left(\int_\Omega \left[C(1 + |u(x)|^\delta) \cdot z(x)\right]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|C(1 + |u|^\delta) \cdot z\|_{L^2} \\
&\overset{\text{A.43}}{\leqslant} \|C(1 + |u|^\delta)\|_{L^{\frac{q}{\delta}}} \cdot \|z\|_{L^p} \overset{\text{A.42}}{\leqslant} C(1 + \||u|^\delta\|_{L^{\frac{q}{\delta}}}) \cdot \|z\|_{L^p} \\
&= C\left(1 + \left(\left(\int_\Omega |u(x)|^{\delta\cdot\frac{q}{\delta}} \, dx\right)^{\frac{1}{q}}\right)^\delta\right) \cdot \|z\|_{L^p} = C(1 + \|u\|_{L^q}^\delta) \cdot \|z\|_{L^p} \\
&\overset{\text{A.14}}{\leqslant} C(1 + \|u\|_{H^1}^\delta) \cdot \|z\|_{H^1} \leqslant C(R) \cdot \|z\|_{H^1} \quad \forall\, z \in H_0^1(\Omega)
\end{aligned}$$

Die für die Höldersche Ungleichung verwendeten Werte erhält man aus der Sobolevschen Ungleichung A.14(1) falls $d = 3$ und A.14(2) falls $d = 2$. Nach Definition ist $dF(u)$ eine lineare Abbildung. Wir haben gezeigt, dass $dF(u)$ den Raum $H_0^1(\Omega)$ nach $L^2(\Omega)$ abbildet und beschränkt, also stetig ist mit der Operatornorm $\|dF(u)\|_{L(H_0^1, L^2)} \leqslant C(R)$.
zu (2): 1. Fall: $(d = 1)$ Für $u, v \in B_R$ und $s \in [0, 1]$ gilt wegen Satz A.15 (mit $p = 2$) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&|su(x) + (1 - s)v(x)| \leqslant s|u(x)| + (1 - s)|v(x)| \leqslant |u(x)| + |v(x)| \\
&\leqslant \sup_{x\in\Omega} |u(x)| + \sup_{x\in\Omega} |v(x)| = \|u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty} \overset{\text{A.15}}{\leqslant} C\|\nabla u\|_{L^2} + C\|\nabla v\|_{L^2} \\
&= C|u|_{H^1} + C|v|_{H^1} \leqslant C\|u\|_{H^1} + C\|v\|_{H^1} \leqslant 2CR
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Damit folgt aus der Hölderschen Ungleichung A.43 (mit $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\infty}$), Satz A.15 (mit $p = 2$) und $\|\bullet\|_{L^2} \leqslant \|\bullet\|_{H^1}$

$$\begin{aligned}
&\|dF(u)z - dF(v)z\|_{L^2} = \|(f'(u(\bullet)) - f'(v(\bullet))) \cdot z(\bullet)\|_{L^2} \\
&= \left(\int_\Omega [(f'(u(x)) - f'(v(x))) \cdot z(x)]^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_\Omega \left[\left(\int_0^1 f''(su(x) + (1 - s)v(x)) \, ds\right) \cdot (u(x) - v(x)) \cdot z(x)\right]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \left(\int_\Omega \left[\left(\sup_{s\in[0,1]} f''(su(x)+(1-s)v(x))\right)\cdot(u(x)-v(x))\cdot z(x)\right]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\overset{(2.8)}{\leqslant} \left(\int_\Omega \left[\left(\sup_{\substack{y\in\mathbb{R}\\ |y|\leqslant 2CR}} f''(y)\right)\cdot(u(x)-v(x))\cdot z(x)\right]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= C(R)\cdot\|(u-v)\cdot z\|_{L^2} \overset{A.43}{\leqslant} C(R)\cdot\|u-v\|_{L^\infty}\cdot\|z\|_{L^2} \overset{A.15}{\leqslant} C(R)\cdot\|\nabla(u-v)\|_{L^2}\cdot\|z\|_{L^2}\\
&= C(R)\cdot|u-v|_{H^1}\cdot\|z\|_{L^2} \leqslant C(R)\cdot\|u-v\|_{H^1}\cdot\|z\|_{H^1} \quad \forall\, z\in H_0^1(\Omega)
\end{aligned}
$$

Da f'' (wegen $f\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$) stetig ist, nimmt f'' auf dem kompakten Intervall $[-2CR, 2CR]$ das Maximum an, wodurch die Existenz eines solchen $C(R)<\infty$ garantiert ist.
2. Fall: $(d=2,3)$ Für $u,v\in B_R$ und $s\in[0,1]$ gilt - unabhängig davon, ob $0^0:=1$ oder $0^0:=0$ - die Ungleichung

$$
\begin{aligned}
&|su(x)+(1-s)v(x)|^{\delta-1} \leqslant (2\cdot\max\{|su(x)|,|(1-s)v(x)|\})^{\delta-1} \qquad (2.9)\\
&\leqslant 2^{\delta-1}\left(|su(x)|^{\delta-1}+|(1-s)v(x)|^{\delta-1}\right) = 2^{\delta-1}\left(|s|^{\delta-1}\cdot|u(x)|^{\delta-1}+|(1-s)|^{\delta-1}\cdot|v(x)|^{\delta-1}\right)\\
&\leqslant 2^{\delta-1}(|u(x)|^{\delta-1}+|v(x)|^{\delta-1}) \quad \forall\,\delta\geqslant 1
\end{aligned}
$$

Mithilfe der Hölderschen Ungleichung A.43 (mit $\frac{1}{2}=\frac{\delta}{q}+\frac{1}{p}$ und p,q wie in (1)), der Sobolevschen Ungleichung A.14(1) (mit $k=1$, $d=3$) und A.14(2) (mit $k=1$, $d=2$), der Minkowskischen Ungleichung A.42, (2.9) und der Generalvoraussetzung (2.1) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\|dF(u)z-dF(v)z\|_{L^2} = \|(f'(u(\bullet))-f'(v(\bullet)))\cdot z(\bullet)\|_{L^2}\\
&= \left(\int_\Omega [(f'(u(x))-f'(v(x)))\cdot z(x)]^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \left(\int_\Omega\left[\left(\int_0^1 f''(su(x)+(1-s)v(x))\,ds\right)\cdot(u(x)-v(x))\cdot z(x)\right]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\overset{(2.1)}{\leqslant} \left(\int_\Omega\left[\left(\int_0^1 C(1+|su(x)+(1-s)v(x)|^{\delta-1})\,ds\right)\cdot(u(x)-v(x))\cdot z(x)\right]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\overset{(2.9)}{\leqslant} \left(\int_\Omega\left[\left(\int_0^1 C(1+2^{\delta-1}\left(|u(x)|^{\delta-1}+|v(x)|^{\delta-1}\right))\,ds\right)\cdot(u(x)-v(x))\cdot z(x)\right]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \left(\int_\Omega\left[C(1+|u(x)|^{\delta-1}+|v(x)|^{\delta-1})\cdot(u(x)-v(x))\cdot z(x)\right]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \|C(1+|u|^{\delta-1}+|v|^{\delta-1})\cdot(u-v)\cdot z\|_{L^2}\\
&\overset{A.43}{\leqslant} \|C(1+|u|^{\delta-1}+|v|^{\delta-1})\|_{L^{\frac{q}{\delta-1}}}\cdot\|u-v\|_{L^q}\cdot\|z\|_{L^p}\\
&\overset{A.42}{\leqslant} C(1+\||u|^{\delta-1}\|_{L^{\frac{q}{\delta-1}}}+\||v|^{\delta-1}\|_{L^{\frac{q}{\delta-1}}})\cdot\|u-v\|_{L^q}\cdot\|z\|_{L^p}\\
&= C\left(1+\left(\left(\int_\Omega |u(x)|^{(\delta-1)\cdot\frac{q}{\delta-1}}\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{\delta-1}+\left(\left(\int_\Omega |v(x)|^{(\delta-1)\cdot\frac{q}{\delta-1}}\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{\delta-1}\right)\cdot\|u-v\|_{L^q}\cdot\|z\|_{L^p}\\
&= C(1+\|u\|_{L^q}^{\delta-1}+\|v\|_{L^q}^{\delta-1})\cdot\|u-v\|_{L^q}\cdot\|z\|_{L^p}\\
&\overset{A.14}{\leqslant} C(1+\|u\|_{H^1}^{\delta-1}+\|v\|_{H^1}^{\delta-1})\cdot\|u-v\|_{H^1}\cdot\|z\|_{H^1}\\
&\leqslant C(R)\cdot\|u-v\|_{H^1}\cdot\|z\|_{H^1} \quad \forall\, z\in H_0^1(\Omega)
\end{aligned}
$$

Dies zeigt in allen drei Fällen, dass die Abbildung

$$H_0^1(\Omega) \longrightarrow L(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)) \quad \text{mit} \quad u \longmapsto dF(u)$$

stetig (da

$$\begin{aligned}
&\|dF(u) - dF(v)\|_{L(H_0^1,L^2)} \;=\; \sup_{\|z\|_{H^1}\leqslant 1} \|dF(u)z - dF(v)z\|_{L^2} \\
&\leqslant \sup_{\|z\|_{H^1}\leqslant 1} C(R)\cdot\|u-v\|_{H^1}\cdot\|z\|_{H^1} \;=\; C(R)\cdot\|u-v\|_{H^1} \;\longrightarrow\; 0
\end{aligned}$$

für $\|u-v\|_{H^1} \to 0$) und Lipschitz-stetig auf B_R (da $\|dF(u)-dF(v)\|_{L(H_0^1,L^2)} \leqslant C(R)\cdot\|u-v\|_{H^1}$ $\forall\, u,v \in B_R$) ist.
zu (3): Unter Verwendung von Teilaussage (2) erhalten wir in allen drei Fällen

$$\begin{aligned}
&\|F(u) - F(v) - dF(u)(u-v)\|_{L^2} \;=\; \|f(u(\bullet)) - f(v(\bullet)) - f'(u(\bullet))\cdot(u(\bullet)-v(\bullet))\|_{L^2} \\
&= \left(\int_\Omega \left[f(u(x)) - f(v(x)) - f'(u(x))\cdot(u(x)-v(x))\right]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_\Omega \left[\left(\int_0^1 f'(su(x)+(1-s)v(x))\,ds\right)\cdot(u(x)-v(x)) - f'(u(x))\cdot(u(x)-v(x))\right]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_\Omega \left[\left(\int_0^1 f'(su(x)+(1-s)v(x)) - f'(u(x))\,ds\right)\cdot(u(x)-v(x))\right]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\int_0^1 (f'(su(\bullet)+(1-s)v(\bullet)) - f'(u(\bullet)))\cdot(u(\bullet)-v(\bullet))\,ds\|_{L^2} \\
&\leqslant \int_0^1 \|(f'(su(\bullet)+(1-s)v(\bullet)) - f'(u(\bullet)))\cdot(u(\bullet)-v(\bullet))\|_{L^2}\,ds \\
&= \int_0^1 \|(dF(su+(1-s)v) - dF(u))(u-v)\|_{L^2}\,ds \\
&\overset{(2)}{\leqslant} \int_0^1 C(R)\cdot\|su+(1-s)v-u\|_{H^1}\cdot\|u-v\|_{H^1}\,ds \\
&\leqslant \sup_{s\in[0,1]} C(R)\cdot\|(s-1)(u-v)\|_{H^1}\cdot\|u-v\|_{H^1} \;\leqslant\; C(R)\cdot\|u-v\|_{H^1}^2
\end{aligned}$$

Zusammen mit der Linearität und der Beschränktheit von $dF(u)$ ist also nach Definition A.39 $dF(u)$ die Fréchet-Ableitung von F an der Stelle $u \in B_R$.
zu (4): Unter Verwendung von Teilaussage (1) erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\|F(u) - F(v)\|_{L^2} \;=\; \|f(u(\bullet)) - f(v(\bullet))\|_{L^2} \;=\; \left(\int_\Omega \left[f(u(x)) - f(v(x))\right]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_\Omega \left[\left(\int_0^1 f'(su(x)+(1-s)v(x))\,ds\right)\cdot(u(x)-v(x))\right]^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|\int_0^1 (f'(su(\bullet)+(1-s)v(\bullet)))\cdot(u(\bullet)-v(\bullet))\,ds\|_{L^2} \\
&\leqslant \int_0^1 \|(f'(su(\bullet)+(1-s)v(\bullet)))\cdot(u(\bullet)-v(\bullet))\|_{L^2}\,ds \\
&= \int_0^1 \|dF(su+(1-s)v)(u-v)\|_{L^2}\,ds \\
&\overset{(1)}{\leqslant} \int_0^1 C(R)\cdot\|u-v\|_{H^1}\,ds \;=\; C(R)\cdot\|u-v\|_{H^1}
\end{aligned}$$

Man beachte, dass mit $u, v \in B_R$ und $s \in [0,1]$ auch $su+(1-s)v$ in B_R liegt, weswegen wir die Aussage (1) überhaupt anwenden durften. Damit ist der nichtlineare Operator $F : (B_R, \|\bullet\|_{H^1}) \longrightarrow L^2(\Omega)$ Lipschitz-stetig auf B_R und insbesondere also stetig. Daraus erhalten wir mit

$$\|F(0)\|_{L^2} = \left(\int_\Omega f(0)^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} = f(0) \cdot |\Omega|^{\frac{1}{2}} \leqslant C \tag{2.10}$$

die Beschränktheit des nichtlinearen Operators F auf B_R

$$\|F(u)\|_{L^2} \leqslant \|F(u) - F(0)\|_{L^2} + \|F(0)\|_{L^2} \overset{(2.10)}{\leqslant} C(R) \cdot \|u\|_{H^1} + C \leqslant C(R)$$

Weiter gilt damit $F \in C^1(B_R, L^2(\Omega))$. Da dieses Resultat unabhängig von der Wahl von $R > 0$ ist, lässt sich insgesamt $F \in C^1(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ schließen.

zu (5): Wir zeigen zunächst in beiden Fällen die Ungleichung

$$|(dF(u)z, \chi)_{L^2}| \leqslant C(R) \cdot \|z\|_{L^2} \cdot \|\chi\|_{H^1} \quad \forall\, z \in L^2(\Omega)\, \forall\, \chi \in H_0^1(\Omega) \tag{2.11}$$

1. Fall: ($d = 1$) Mithilfe der Teilaussage (1) und der Hölderschen Ungleichung A.43 (mit $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\infty} + \frac{1}{2}$) erhalten wir

$$\begin{aligned} |(dF(u)z, \chi)_{L^2}| &= \|f'(u(\bullet)) \cdot z(\bullet) \cdot \chi(\bullet)\|_{L^1} \overset{A.43}{\leqslant} \|f'(u(\bullet)) \cdot \chi(\bullet)\|_{L^2} \cdot \|z\|_{L^2} \\ = \|dF(u)\chi\|_{L^2} \cdot \|z\|_{L^2} &\overset{(1)}{\leqslant} C(R) \cdot \|z\|_{L^2} \cdot \|\chi\|_{H^1} \quad \forall\, z \in L^2(\Omega)\, \forall\, \chi \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

2. Fall: ($d = 2,3$) Mithilfe der Hölderschen Ungleichung A.43 (mit $1 = \frac{1}{p} + \frac{\delta}{q} + \frac{1}{2}$ (da $\frac{1}{2} = \frac{1}{p} + \frac{\delta}{q}$), wobei p, q wie in (1)), der Sobolevschen Ungleichung A.14(1) (mit $k = 1$, $d = 3$) und A.14(2) (mit $k = 1$, $d = 2$), der Minkowskischen Ungleichung A.42 und der Generalvoraussetzung (2.1) erhalten wir

$$\begin{aligned} &|(dF(u)z, \chi)_{L^2}| = \left|\int_\Omega f'(u(x)) \cdot z(x) \cdot \chi(x)\, dx\right| \\ &\overset{(2.1)}{\leqslant} \int_\Omega C(1 + |u(x)|^\delta) \cdot z(x) \cdot \chi(x)\, dx = \|C(1 + |u(\bullet)|^\delta) \cdot z(\bullet) \cdot \chi(\bullet)\|_{L^1} \\ &\overset{A.43}{\leqslant} \|C(1 + |u(\bullet)|^\delta)\|_{L^{\frac{q}{\delta}}} \cdot \|z\|_{L^2} \cdot \|\chi\|_{L^p} \overset{A.42}{\leqslant} C(1 + \||u(\bullet)|^\delta\|_{L^{\frac{q}{\delta}}}) \cdot \|z\|_{L^2} \cdot \|\chi\|_{L^p} \\ &= C\left(1 + \left(\left(\int_\Omega |u(x)|^{\delta \cdot \frac{q}{\delta}}\right)^{\frac{1}{q}}\right)^\delta\right) \cdot \|z\|_{L^2} \cdot \|\chi\|_{L^p} = C(1 + \|u\|_{L^q}^\delta) \cdot \|z\|_{L^2} \cdot \|\chi\|_{L^p} \\ &\overset{A.14}{\leqslant} C(1 + \|u\|_{H^1}^\delta) \cdot \|z\|_{L^2} \cdot \|\chi\|_{H^1} \leqslant C(R) \cdot \|z\|_{L^2} \cdot \|\chi\|_{H^1} \quad \forall\, z \in L^2(\Omega)\, \forall\, \chi \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

Hierbei ist der Wert $\|1\|_{L^{\frac{q}{\delta}}}$, der bei der Anwendung der Minkowskischen Ungleichung A.42 entsteht und nicht notwendigerweise 1 sein muss, in die Konstante C mit eingegangen. Damit folgt in beiden Fällen aus (2.11)

$$\|dF(u)z\|_{H^{-1}} = \sup_{\chi \in H_0^1} \frac{|(dF(u)z, \chi)_{L^2}|}{\|\chi\|_{H^1}} \overset{(2.11)}{\leqslant} C(R) \cdot \|z\|_{L^2} \quad \forall\, z \in L^2(\Omega)$$

Hieraus lässt sich - analog zu (1) - schließen, dass der lineare Operator $dF(u)$ den Raum $L^2(\Omega)$ nach $H^{-1}(\Omega)$ abbildet und beschränkt, also stetig ist. Insbesondere erfüllt die Operatornorm die Abschätzung $\|dF(u)\|_{L(L^2, H^{-1})} \leqslant C(R)$.

zu (6): Mit (2.11) erhalten wir

$$\begin{aligned} &|(F(u) - F(v), \chi)_{L^2}| = \int_\Omega (f(u(x)) - f(v(x))) \cdot \chi(x)\, dx \\ &= \int_\Omega \left(\int_0^1 f'(su(x) + (1-s)v(x))\, ds\right) \cdot (u(x) - v(x)) \cdot \chi(x)\, dx \\ &= \left\|\int_0^1 f'(su(\bullet) - (1-s)v(\bullet)) \cdot (u(\bullet) - v(\bullet)) \cdot \chi(\bullet)\, ds\right\|_{L^1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \int_0^1 \|dF(su+(1-s)v)(u-v)\cdot\chi\|_{L^1}\,ds && (2.12)\\
&= \int_0^1 |(dF(su+(1-s)v)(u-v),\chi)_{L^2}|\,ds \\
&\overset{(2.11)}{\leqslant} \int_0^1 C(R)\cdot\|u-v\|_{L^2}\cdot\|\chi\|_{H^1}\,ds \\
&= C(R)\cdot\|u-v\|_{L^2}\cdot\|\chi\|_{H^1} \quad \forall\,\chi\in H_0^1(\Omega)
\end{aligned}
$$

Man beachte zum einen, dass für $u,v\in B_{L^2(\Omega),\|\bullet\|_{L^2},R}$ und $s\in[0,1]$ auch $su+(1-s)v$ in $B_{L^2(\Omega),\|\bullet\|_{L^2},R}$ liegt und zum anderen, dass wegen $u,v\in B_{L^2(\Omega),\|\bullet\|_{L^2},R}$ das Element $u-v$ in $L^2(\Omega)$ liegt, weswegen wir (2.11) überhaupt anwenden durften. Dies liefert uns

$$
\|F(u)-F(v)\|_{H^{-1}} = \sup_{\chi\in H_0^1}\frac{|(F(u)-F(v),\chi)_{L^2}|}{\|\chi\|_{H^1}} \overset{(2.12)}{\leqslant} C(R)\cdot\|u-v\|_{L^2}
$$

Damit gilt, dass der nichtlineare Operator $F:(B_R,\|\bullet\|_{L^2})\longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ Lipschitz-stetig auf B_R und insbesondere also stetig ist. Daraus, aus $\|\bullet\|_{L^2}\leqslant\|\bullet\|_{H^1}$ und aus

$$
\|F(0)\|_{H^{-1}} = \sup_{v\in H_0^1}\frac{|(F(0),v)_{L^2}|}{\|v\|_{H^1}} \overset{A.41}{\leqslant} \sup_{v\in H_0^1}\frac{\|F(0)\|_{L^2}\|v\|_{L^2}}{\|v\|_{H^1}} \leqslant \|F(0)\|_{L^2} \overset{(2.10)}{\leqslant} C
$$

erhalten wir die Beschränktheit des nichtlinearen Operators F auf B_R

$$
\|F(u)\|_{H^{-1}} \leqslant \|F(u)-F(0)\|_{H^{-1}}+\|F(0)\|_{H^{-1}} \overset{(2.10)}{\leqslant} C(R)\cdot\|u\|_{L^2}+C \leqslant C(R)
$$

zu (7):

1. Konstruktion der klassischen Ableitung $D^\alpha(dF(u)w)(x)$: Seien $u,w\in C^\infty(\Omega)$, dann existieren (wegen $f\in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$) die starken (klassichen Ableitungen) von $dF(u)w$. Diese erhalten wir aus der Kettenregel und sind gegeben durch

$$
D^\alpha(dF(u)w)(x) = f''(u(x))\cdot D^\alpha u(x)\cdot w(x)+f'(u(x))\cdot D^\alpha w(x) \tag{2.13}
$$

   wobei $|\alpha|\leqslant 1$. Damit ist insbesondere $dF(u)w\in H^1(\Omega)$.

2. Konstruktion der schwachen Ableitung $(dF(u)w)^{(\alpha)}$: Seien $u\in H^2(\Omega)\cap B_R$ und $w\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ beliebig. Wir definieren $(dF(u)w)^{(\alpha)}$ analog zu (2.13) durch

$$
(dF(u)w)^{(\alpha)}(x) = f''(u(x))\cdot D^\alpha u(x)\cdot w(x)+f'(u(x))\cdot D^\alpha w(x)
$$

   Da $C^\infty(\Omega)\subset H^2(\Omega)$ eine dichte Teilmenge ist (siehe: Satz A.5), gilt:

$$
\begin{aligned}
&\exists\,(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset C^\infty(\Omega):\ \|u-u_n\|_{H^2}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\\
&\exists\,(w_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset C^\infty(\Omega):\ \|w-w_n\|_{H^2}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0
\end{aligned}
$$

   Behauptung:

$$
(dF(u)w)^{(\alpha)} \text{ ist die schwache Ableitung von } dF(u)w \tag{2.14}
$$

   Zeige:

$$
(dF(u)w)^{(\alpha)} = \lim_{n\to\infty}D^\alpha(dF(u_n)w_n)\ (\text{im } L^2\text{-Sinne}) \tag{2.15}
$$

(2.14) folgt per Definition dann direkt aus (2.15). Zusätzlich folgt daraus, dass die schwache Ableitung $(dF(u)w)^{(\alpha)}$ (wegen der Eindeutigkeit der schwachen Ableitung) eindeutig ist. Dazu zeigen wir vorab

$$\|dF(u)w - dF(u_n)w_n\|_{L^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2.16}$$
$$\|(dF(u)w)^{(\alpha)} - D^\alpha(dF(u_n)w_n)\|_{L^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{2.17}$$

für $|\alpha| = 1$. (2.16) folgt direkt aus den Teilaussagen (1) und (2) durch

$$\begin{aligned}
&\|dF(u)w - dF(u_n)w_n\|_{L^2}\\
&\leqslant \|dF(u)w - dF(u_n)w\|_{L^2} + \|dF(u_n)(w-w_n)\|_{L^2}\\
&\overset{(1),(2)}{\leqslant} C(R)(\underbrace{\|u-u_n\|_{H^1}}_{\longrightarrow 0}\|w\|_{H^1} + \underbrace{\|w-w_n\|_{H^1}}_{\longrightarrow 0}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Behauptung: (2.17) folgt wegen (2.16). Beweis: Mit der Kurzschreibweise

$$d^\alpha F(u)w := f''(u(\bullet)) \cdot D^\alpha u(\bullet) \cdot w(\bullet)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\|(dF(u)w)^{(\alpha)} - D^\alpha(dF(u_n)w_n)\|_{L^2}\\
&= \|d^\alpha F(u)w + dF(u)(D^\alpha w) - d^\alpha F(u_n)w_n - dF(u_n)(D^\alpha w_n)\|_{L^2}\\
&\leqslant \|\underbrace{d^\alpha F(u)w - d^\alpha F(u_n)w}_{=:T_1}\|_{L^2} + \|\underbrace{d^\alpha F(u_n)w - d^\alpha F(u_n)w_n}_{=:T_2}\|_{L^2}\\
&\quad + \|\underbrace{dF(u)(D^\alpha w) - dF(u_n)(D^\alpha w)}_{=:T_3}\|_{L^2} + \|\underbrace{dF(u_n)(D^\alpha w) - dF(u_n)(D^\alpha w_n)}_{=:T_4}\|_{L^2}
\end{aligned}$$

Insbesondere sind wegen der Sobolevschen Ungleichung A.14(3) (mit $k=2$, $j=0$, $d=1,2,3$) $u, u_n, w, w_n \in H^2(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$ allesamt stetige Funktionen und desweiteren erhalten wir

$$\|u-u_n\|_{L^\infty} = \|u-u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})} \overset{\text{A.14}}{\leqslant} C\|u-u_n\|_{H^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$
$$\|w-w_n\|_{L^\infty} = \|w-w_n\|_{C^0(\overline{\Omega})} \overset{\text{A.14}}{\leqslant} C\|w-w_n\|_{H^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

- Für die Abschätzung von T_1 liefert uns zunächst

$$\|u_n\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leqslant \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} + 1 \leqslant C\|u\|_{H^2} + 1 \quad \forall n \geqslant N \tag{2.18}$$

die Abschätzung

$$\|f''(u_n(\bullet))\|_{L^\infty} = \sup_{|y|\leqslant C\|u\|_{H^2}+1} |f''(y)| < \infty$$

Daraus, aus A.14 und aus der Hölderschen Ungleichung A.43 (mit $\frac{1}{2} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\infty}$)

$$\begin{aligned}
\|T_1\|_{L^2} &= \|d^\alpha F(u)w - d^\alpha F(u_n)w\|_{L^2}\\
&= \|f''(u(\bullet)) \cdot D^\alpha u(\bullet) \cdot w(\bullet) - f''(u_n(\bullet)) \cdot D^\alpha u_n(\bullet) \cdot w(\bullet)\|_{L^2}\\
&\leqslant \|f''(u_n(\bullet)) \cdot D^\alpha(u(\bullet) - u_n(\bullet)) \cdot w(\bullet)\|_{L^2}\\
&\qquad + \|(f''(u(\bullet)) - f''(u_n(\bullet))) \cdot D^\alpha u(\bullet) \cdot w(\bullet)\|_{L^2}\\
&\overset{\text{A.43}}{\leqslant} \|f''(u_n(\bullet))\|_{L^\infty} \cdot \|D^\alpha(u-u_n)\|_{L^2} \cdot \|w\|_{L^\infty}\\
&\qquad + \|f''(u(\bullet)) - f''(u_n(\bullet))\|_{L^\infty} \cdot \|D^\alpha u\|_{L^2} \cdot \|w\|_{L^\infty}\\
&\overset{\text{A.14}}{\leqslant} C \sup_{|y|\leqslant C\|u\|_{H^2}+1} |f''(y)| \cdot \underbrace{\|u-u_n\|_{H^2}}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} \cdot \|w\|_{H^2}\\
&\qquad + C\|f''(u(\bullet)) - f''(u_n(\bullet))\|_{L^\infty} \cdot \|u\|_{H^2} \cdot \|w\|_{H^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Für die Konvergenz des zweiten Summanden nutzen wir erneut die H^2-Konvergenz aus. Da f'' (wegen $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$) stetig ist, folgt, dass f'' auf dem kompakten Intervall $I := [-C\|u\|_{H^2} - 1, C\|u\|_{H^2} + 1]$ gleichmäßig stetig ist. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|f''(y) - f''(z)| \leqslant \varepsilon \quad \forall\, y, z \in I \text{ mit } |y - z| \leqslant \delta$$

Wegen der Konvergenz $\|u - u_n\|_{H^2} \longrightarrow 0$ gilt

$$\exists\, N \in \mathbb{N}: \quad |u(x) - u_n(x)| \leqslant \delta \quad \forall\, n \geqslant N \text{ und } \forall\, x \in \Omega$$

Zusammen folgt daraus

$$\|f''(u(\bullet)) - f''(u_n(\bullet))\|_{L^\infty} \leqslant \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant N$$

und insgesamt

$$C\|f''(u(\bullet)) - f''(u_n(\bullet))\|_{L^\infty} \cdot \|u\|_{H^2} \cdot \|w\|_{H^2} \leqslant \varepsilon C \|u\|_{H^2} \cdot \|w\|_{H^2}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt die Konvergenz von $\|T_1\|_{L^2}$ gegen 0.

- Für T_2 erhalten wir zunächst

$$\|D^\alpha u_n\|_{L^2} \leqslant \|D^\alpha u\|_{L^2} + \|D^\alpha(u - u_n)\|_{L^2} \leqslant \|u\|_{H^2} + \underbrace{\|u - u_n\|_{H^2}}_{\longrightarrow 0} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|u\|_{H^2} < \infty$$

Daraus, aus der Abschätzung von $\|f''(u_n(\bullet))\|_{L^\infty}$ im vorherigen Teil und aus der Hölderschen Ungleichung A.43 (mit $\frac{1}{2} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\infty}$) erhalten wir die gewünschte Konvergenz gegen 0

$$\begin{aligned}
\|T_2\|_{L^2} &= \|d^\alpha F(u_n) w - d^\alpha F(u_n) w_n\|_{L^2} \\
&= \|f''(u_n(\bullet)) \cdot D^\alpha u_n(\bullet) \cdot (w(\bullet) - w_n(\bullet))\|_{L^2} \\
&\overset{A.43}{\leqslant} \|f''(u_n(\bullet))\|_{L^\infty} \cdot \|D^\alpha u_n\|_{L^2} \cdot \|w - w_n\|_{L^\infty} \\
&\leqslant C\|f''(u_n(\bullet))\|_{L^\infty} \cdot (\|u\|_{H^2} + \|u - u_n\|_{H^2}) \cdot \|w - w_n\|_{H^2} \\
&\leqslant C \sup_{|y| \leqslant C\|u\|_{H^2}+1} |f''(y)| \cdot (\|u\|_{H^2} + \underbrace{\|u - u_n\|_{H^2}}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}) \cdot \underbrace{\|w - w_n\|_{H^2}}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

- Für die Abschätzung von T_3 können wir beim obigen Nachweis $\|f''(u(\bullet)) - f''(u_n(\bullet))\|_{L^\infty} < \varepsilon$ die Funktion f'' durch f' ersetzen und erhalten vollkommen analog

$$\|f'(u(\bullet)) - f'(u_n(\bullet))\|_{L^\infty} < \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant N$$

Weiter haben wir wegen $w \in H^2(\Omega)$ $\|D^\alpha w\|_{L^2} \leqslant \|w\|_{H^2} < \infty$. Aus der Hölderschen Ungleichung A.43 (mit $\frac{1}{2} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{2}$) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|T_3\|_{L^2} &= \|dF(u)(D^\alpha w) - dF(u_n)(D^\alpha w)\|_{L^2} \\
&= \|(f'(u(\bullet)) - f'(u_n(\bullet))) \cdot D^\alpha w\|_{L^2} \\
&\overset{A.43}{\leqslant} \|(f'(u(\bullet)) - f'(u_n(\bullet)))\|_{L^\infty} \cdot \|D^\alpha w\|_{L^2} \\
&\leqslant \varepsilon \|w\|_{H^2} \quad \forall\, n \geqslant N
\end{aligned}$$

- Für die Abschätzung von T_4 folgern wir analog mit (2.18) für $n \geqslant N$ groß genug

$$\|f'(u_n(\bullet))\|_{L^\infty} = \sup_{|y| \leqslant C\|u\|_{H^2}+1} |f'(y)| < \infty$$

Daraus, aus der Hölderschen Ungleichung A.43 (mit $\frac{1}{2} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{2}$) erhalten wir auch die letzte Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|T_4\|_{L^2} &= \|dF(u_n)(D^\alpha w) - dF(u_n)(D^\alpha w_n)\|_{L^2} \\
&= \|f'(u_n(\bullet)) \cdot D^\alpha(w(\bullet) - w_n(\bullet))\|_{L^2} \\
&\overset{A.43}{\leqslant} \|f'(u_n(\bullet))\|_{L^\infty} \cdot \|D^\alpha(w(\bullet) - w_n(\bullet))\|_{L^2} \\
&\leqslant \sup|f'(y)| \cdot \|w - w_n\|_{H^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Damit haben wir auch (2.17) gezeigt. Nachdem wir die Konvergenzeigenschaften (2.16) und (2.17) bewiesen haben, werden wir diese jetzt dazu verwenden, um (2.15) und damit (2.14) nachzuweisen. Sei $|\alpha| \leqslant 1$, dann gilt

$$\begin{aligned}
&|\overbrace{\int_\Omega (dF(u)w)(x) \cdot D^\alpha\varphi(x)\,dx}^{(1)} - \overbrace{(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega (dF(u)w)^{(\alpha)}(x)\cdot\varphi(x)\,dx}^{(2)}| \\
&= |\int_\Omega [dF(u)w - dF(u_n)w_n](x)\cdot D^\alpha\varphi(x)\,dx \\
&\qquad - (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \Big[(dF(u)w)^{(\alpha)} - D^\alpha(dF(u_n)w_n)\Big](x)\cdot\varphi(x)\,dx| \\
&\leqslant \|[dF(u)w - dF(u_n)w_n]\cdot D^\alpha\varphi\|_{L^1} + \|\Big[(dF(u)w)^{(\alpha)} - D^\alpha(dF(u_n)w_n)\Big]\cdot\varphi\|_{L^1} \\
&\leqslant \underbrace{\|dF(u)w - dF(u_n)w_n\|_{L^2}}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0 \text{ (wegen (2.16))}}\cdot\|D^\alpha\varphi\|_{L^2} + \underbrace{\|(dF(u)w)^{(\alpha)} - D^\alpha(dF(u_n)w_n)\|_{L^2}}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0 \text{ (wegen (2.17))}}\cdot\|\varphi\|_{L^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Es folgt (1) = (2) und daraus (2.15). Hieraus erhalten wir für $u \in H^2(\Omega) \cap B_R$ und $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ direkt $dF(u)w \in H^1(\Omega)$.

3. $dF(u)w \in H_0^1(\Omega)$: Da wir nach dem 2. Schritt wissen, dass $dF(u)w \in H^1(\Omega)$ gilt, bleibt die folgende Eigenschaft zu zeigen:

$$\exists\,(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega):\ \|dF(u)w - z_n\|_{H^1} \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty$$

Da $u, w \in H_0^1(\Omega)$ und da $C_0^\infty(\Omega)$ bzgl. $\|\bullet\|_{H^1}$ dicht in $H_0^1(\Omega)$ liegt, gilt

$$\begin{aligned}
&\exists\,(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega):\ \|u - u_n\|_{H^1} \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty \\
&\exists\,(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega):\ \|w - w_n\|_{H^1} \longrightarrow 0 \quad \text{für} \quad n \longrightarrow \infty
\end{aligned}$$

Wegen $u_n, w_n \in C_0^\infty(\Omega)$ und $f \in C^2(\mathbb{R})$ folgt $dF(u_n)w_n = f'(u_n(\bullet))w_n(\bullet) \in C_0^1(\Omega)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Setze $\tilde{z}_n := dF(u_n)w_n\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Da $\tilde{z}_n \in C_0^1(\Omega)$ und $C_0^\infty(\Omega)$ bzgl. $\|\bullet\|_{H^1}$ dicht in $C_0^1(\Omega)$ liegt, gilt

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, z_n \in C_0^\infty(\Omega):\ \|\tilde{z}_n - z_n\|_{H^1} \leqslant \frac{1}{n}$$

Insgesamt erhalten wir daraus sowie aus (2.16) und (2.17)

$$\|dF(u)w - z_n\|_{H^1} \leqslant \underbrace{\|dF(u)w - \tilde{z}_n\|_{H^1}}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0 \text{ (wegen (2.16) und (2.17))}} + \underbrace{\|\tilde{z}_n - z_n\|_{H^1}}_{\leqslant\frac{1}{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

4. Ungleichung: Für die Ungleichung zeigen wir zunächst die folgende Hilfsaussage: Seien $u \in H^2(\Omega) \cap B_R$ und $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, dann gilt:

$$\|f''(u(\bullet)) \cdot \nabla u(\bullet) \cdot w(\bullet)\|_{L^2} \leqslant C(R) \cdot \|\nabla u\|_{H^1} \cdot \|w\|_{H^1} \leqslant C(R) \cdot \|u\|_{H^2} \cdot \|w\|_{H^1} \tag{2.19}$$

1. Fall: ($d = 1$) Für $u \in H^2(\Omega) \cap B_R$ und $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ erhalten wir aus Satz A.15 (mit $p = 2$) die Abschätzung

$$|u(x)| \leqslant \sup_{x\in\Omega} |u(x)| = \|u\|_{L^\infty} \overset{A.15}{\leqslant} C\|\nabla u\|_{L^2} = C|u|_{H^1} \leqslant C\|u\|_{H^1} \leqslant CR \quad \forall x \in \Omega$$

Da f'' (wegen $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$) stetig ist, nimmt f'' auf dem kompakten Intervall $[-CR, CR]$ das Maximum $C(R) < \infty$ an, daher gilt

$$\begin{aligned} |f''(u(x))| &\leqslant \sup_{x\in\Omega} |f''(u(x))| \\ &= \sup_{\substack{y\in\mathbb{R} \\ |y|\leqslant CR}} |f''(y)| =: C(R) \quad \text{, wobei } \|f''(u(\bullet))\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\Omega} |f''(u(x))| \end{aligned}$$

Damit folgt aus der Hölderschen Ungleichung A.43 (mit $\frac{1}{2} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\infty}$) und aus Satz A.15 (mit $p = 2$)

$$\begin{aligned} &\|f''(u(\bullet)) \cdot \nabla u(\bullet) \cdot w(\bullet)\|_{L^2} \overset{A.43}{\leqslant} \|f''(u(\bullet))\|_{L^\infty} \cdot \|\nabla u\|_{L^2} \cdot \|w\|_{L^\infty} \\ &= C(R) \cdot \|\nabla u\|_{L^2} \cdot \|w\|_{L^\infty} \overset{A.15}{\leqslant} C(R) \cdot \|\nabla u\|_{L^2} \cdot \|\nabla w\|_{L^2} \\ &\leqslant C(R) \cdot \|\nabla u\|_{H^1} \cdot \|\nabla w\|_{L^2} \leqslant C(R) \cdot \|u\|_{H^2} \cdot \|w\|_{H^1} \end{aligned}$$

2. Fall: ($d = 2, 3$) Für $u \in H^2(\Omega) \cap B_R$ und $w \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ folgt aus der Hölderschen Ungleichung A.43 (mit $\frac{1}{2} = \frac{\delta-1}{q} + \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$, wobei p, q wie in (1)), der Sobolevschen Ungleichung A.14(1) und A.14(2) sowie aus der Generalvoraussetzung (2.1)

$$\begin{aligned} &\|f''(u(\bullet)) \cdot \nabla u(\bullet) \cdot w(\bullet)\|_{L^2} = \left(\int_\Omega [f''(u(x)) \cdot \nabla u(x) \cdot w(x)]^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\overset{(2.1)}{\leqslant} \left(\int_\Omega [C(1 + |u(x)|^{\delta-1}) \cdot |\nabla u(x)| \cdot |w(x)|]^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|C(1 + |u|^{\delta-1}) \cdot |\nabla u| \cdot |w|\|_{L^2} \\ &\overset{A.43}{\leqslant} \|C(1 + |u|^{\delta-1})\|_{L^{\frac{q}{\delta-1}}} \cdot \|\nabla u\|_{L^q} \cdot \|w\|_{L^p} \leqslant C(1 + \||u|^{\delta-1}\|_{L^{\frac{q}{\delta-1}}}) \cdot \|\nabla u\|_{L^q} \cdot \|w\|_{L^p} \\ &= C\left(1 + \left(\left(\int_\Omega |u(x)|^{(\delta-1)\cdot\frac{q}{\delta-1}} \, dx\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{\delta-1}\right) \cdot \|\nabla u\|_{L^q} \cdot \|w\|_{L^p} = C(1 + \|u\|_{L^q}^{\delta-1}) \cdot \|\nabla u\|_{L^q} \cdot \|w\|_{L^p} \\ &\overset{A.14}{\leqslant} C(1 + \|u\|_{H^1}^{\delta-1}) \cdot \|\nabla u\|_{H^1} \cdot \|w\|_{H^1} \leqslant C(R) \cdot \|u\|_{H^2} \cdot \|w\|_{H^1} \end{aligned}$$

wobei $\frac{1}{2} = \frac{\delta-1}{q} + \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$ und p, q wie in (1). Dies zeigt in allen drei Fällen, dass die Ungleichung (2.19) erfüllt ist. Die Abschätzung folgt aus (2.19) sowie (wegen $dF(u)w \in H_0^1(\Omega)$) aus der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung A.12

$$\begin{aligned} &\|dF(u)w\|_{H^1} = \left(\|dF(u)w\|_{L^2}^2 + \|\nabla dF(u)w\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}} \overset{A.12}{\leqslant} C\|\nabla dF(u)w\|_{L^2} \\ &\overset{(2.13)}{=} C\|f''(u(\bullet)) \cdot \nabla u(\bullet) \cdot w(\bullet) + f'(u(\bullet)) \cdot \nabla w(\bullet)\|_{L^2} \\ &\leqslant C\|f''(u(\bullet)) \cdot \nabla u(\bullet) \cdot w(\bullet)\|_{L^2} + C\|f'(u(\bullet)) \cdot \nabla w(\bullet)\|_{L^2} \\ &\overset{(2.19)}{\leqslant} C(R) \cdot \|u\|_{H^2} \cdot \|w\|_{H^1} + C\|dF(u)\nabla w\|_{L^2} \\ &\overset{(1)}{\leqslant} C(R) \cdot (\|u\|_{H^2} \cdot \|w\|_{H^1} + \|\nabla w\|_{H^1}) \\ &\leqslant C(R) \cdot (\|u\|_{H^2} \cdot \|w\|_{H^1} + \|w\|_{H^2}) \end{aligned}$$

□

Der Beweis des Satzes liefert uns zusätzlich zu den Bildbereichen von F und $dF(u)$, dass der Operator

$$F : B_R \longrightarrow L^2(\Omega) \quad \text{mit} \quad F(u)(x) := [f(u)](x) = f(u(x))$$

Fréchet-differenzierbar ist, d.h. $F \in C^1(B_R, L^2(\Omega))$, und die Fréchet-Ableitung

$$dF(u) : H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \quad \text{mit} \quad (dF(u)v)(x) := [f'(u)v](x) = f'(u(x)) \cdot v(x)$$

an der Stelle $u \in B_R$ besitzt. Da wir R beliebig groß wählen können, lässt sich daraus folgern, dass $F \in C^1(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ gilt. Hierbei wird der nichtlineare Operator F als **Nemytskii-Operator** bezeichnet. Rückblickend auf den vorangegangenen Satz beachte man, dass die Größe der Konstanten $C(R)$ von der Größe der Funktionen u, v - in der H^1-Norm gemessen - abhängt. Weiter gilt in diesem Zusammenhang, dass die Konstante $C(R)$ auch vom beschränkten Gebiet Ω abhängt (siehe: (2.10), Satz A.14) und gemeinsam mit R wächst. Dennoch ist $C(R)$ nicht zwangsläufig die optimale Konstante, d.h. es kann sein, dass es eine Konstante gibt, die nicht mit R wächst.

Die semilineare parabolische Differentialgleichung, die wir in (1.1) zunächst als Anfangs-Randwertproblem eingeführt haben, lässt sich durch

$$\begin{aligned} u_t(t) + Au(t) &= F(u(t)) \quad , t \in]0, T[\\ u(0) &= u_0 \qquad\quad , t = 0 \end{aligned} \tag{2.20}$$

äquivalent zu einem **Operator-Anfangswertproblem** (kurz: **AWP**) im Raum $H_0^1(\Omega)$ umformulieren. Bei dieser abstrakten Evolutionsgleichung bezeichnet $A := -\triangle$ den kontinuierlichen negativen Laplace-Operator. Das Ziel ist es nun, eine stetige Funktion $u : [0, T[\longrightarrow H_0^1(\Omega)$ zu finden, die das AWP (2.20) löst. Man beachte, dass bei der Umformulierung die homogene Dirichlet-Randbedingung aus (1.1) in den Raum $H_0^1(\Omega)$ eingegangen ist, wodurch (1.1) und (2.20) tatsächlich äquivalent zueinander sind. Um für nichtlineare AWP'e eine Lösung zu bestimmen, erweist es sich oftmals als sehr hilfreich das zugehörige homogene lineare AWP zu betrachten, welches in diesem Fall durch

$$\begin{aligned} u_t(t) + Au(t) &= 0 \qquad , t \in]0, T[\\ u(0) &= u_0 \qquad , t = 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

gegeben ist.

2.3 Satz. *(1): Der* ***kontinuierliche negative Laplace-Operator***

$$A := -\triangle : \ L^2(\Omega) \supset \mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \longrightarrow R(A) = L^2(\Omega) \text{ mit } u(x) \longmapsto -\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)$$

ist ein auf $\mathcal{D}(A)$ (bezüglich $\|.\|_{H^2}$) linearer, beschränkter (also stetiger), symmetrischer, dicht definierter, positiver, selbstadjungierter, abgeschlossener, sektorieller und invertierbarer Operator, dessen Inversoperator

$$A^{-1} : \ L^2(\Omega) = R(A) \longrightarrow \mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

kompakt ist. Wir erinnern daran, dass $L^2(\Omega)$ ein Hilbertraum ist und verweisen für genauere Details auf den Anhang A.3.a.
(2): Die Eigenschaften von A ermöglichen uns die Anwendung des Spektralsatzes A.31. Dieser Satz besagt: Es existiert ein Orthonormalsystem $\{\varphi_j \mid j = 1, \ldots, \infty\}$ von $L^2(\Omega)$ sowie eine abzählbar unendliche Folge positiver (da A positiv) reeller (da A selbstadjungiert) Eigenwerte $\{\lambda_j \mid j = 1, \ldots, \infty\}$ mit

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n \leqslant \cdots \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$$

Die zugehörigen Eigenfunktionen $\{\varphi_j \mid j = 1, \ldots, \infty\}$ erfüllen das elliptische Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} A\varphi_j(x) &= \lambda_j \varphi_j(x) \quad &&, x \in \Omega \quad \forall\, j = 1, \ldots, \infty \quad \textit{(\textbf{Helmholtz-Gleichung})} \\ \varphi_j(x) &= 0 &&, x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

und können zudem so gewählt werden, dass sie eine Orthonormalbasis von $R(A) = L^2(\Omega)$ bilden. Weiter lässt sich A darstellen durch

$$Au = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \cdot (u, \varphi_j)_{L^2} \cdot \varphi_j \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad \textit{(\textbf{Spektraldarstellung})}$$

Somit nimmt A eine Diagonalgestalt an, d.h.

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} (u, \varphi_j)_{L^2} \cdot \varphi_j \in \mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad Au = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \cdot (u, \varphi_j)_{L^2} \cdot \varphi_j \tag{2.22}$$

(3): Für den Operator A lässt sich die ***Exponentialreihe***

$$e^A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$$

definieren. Da A ein positiver symmetrischer Operator mit kompakter Inverser ist, folgt aus dieser Definition ([27] Exer.3.12)

$$e^{-tA} v = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j} v = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j} \cdot (v, \varphi_j)_{L^2} \cdot \varphi_j \quad \forall\, v \in L^2(\Omega)$$

Insbesondere ist $-A$ der infinitesimale Erzeuger der C^0-Halbgruppe

$$e^{-tA} : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \quad \textit{mit} \quad v \longmapsto e^{-tA} v$$

Das homogene lineare AWP (2.21) besitzt daher die Lösung

$$E(t)u_0 := u(t; u_0) := e^{-tA} u(0) = e^{-tA} u_0 = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j} \cdot (u_0, \varphi_j)_{L^2} \cdot \varphi_j \tag{2.23}$$

Da wir an dieser Stelle nicht die gesamte Theorie linearer parabolischer Probleme aufgreifen und behandeln möchten, verweisen wir für eine ausführlichere Herleitung der Lösung (2.23) von (2.21) auf [31] (8.13) und erwähnen lediglich, dass sich die Lösung mittels Variation der Konstanten gewinnen lässt. Es sei vermerkt, dass E im homogenen linearen Lösungsoperator $E(t)$ abkürzend für **evolution operator** steht. Als nächstes werden wir uns eine Lösungsdarstellung für (2.20) herleiten. Dazu multiplizieren wir (2.20) mit dem Integrationsfaktor e^{tA} und erhalten für $t > 0$

$$\begin{aligned} \left(e^{tA} u(t)\right)_t &= e^{tA} u_t(t) + A e^{tA} u(t) = e^{tA} u_t(t) + e^{tA} A u(t) \\ &= e^{tA} (u_t(t) + Au(t)) = e^{tA} F(u(t)) \end{aligned}$$

Integration von 0 bis t liefert uns

$$e^{tA} u(t) = e^{0A} u_0 + \int_0^t e^{sA} F(u(s))\, ds = u_0 + \int_0^t e^{sA} F(u(s))\, ds$$

und anschließende Anwendung von e^{-tA}

$$u(t) = e^{-tA} e^{tA} u(t) = e^{-tA} u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} F(u(s))\, ds$$

Insgesamt haben wir hierbei die Eigenschaften ausgenutzt, dass $e^{-tA}e^{sA} = e^{-(t-s)A}$, $e^{0A} = I$, e^{tA} linear in $L^2(\Omega)$, e^{tA} differenzierbar bzgl. t und $Ae^{tA} = e^{tA}A$ gilt, die allesamt Resultate der Operatorhalbgruppentheorie sind ([35] VII.4). Die letzte Eigenschaft werden wir auch noch später in (2.32) beweisen. Mit der Operatornotation für die homogene lineare Lösung $E(t) = e^{-tA}$ erhalten wir als Lösungsdarstellung für das nichtlineare AWP (2.20) die folgende Integraldarstellung: Gesucht ist $u(t; u_0) := u(t)$ mit

$$u(t) \;=\; E(t)u_0 + \int_0^t E(t-s)F(u(s))\,ds \quad \forall\, t \geqslant 0 \tag{2.24}$$

Dabei wird (2.24) auch häufig als **Duhamel-Prinzip** bezeichnet. Wir werden hauptsächlich mit der Integralgleichung (2.24) und später mit der diskretisierten Version dieser Darstellung arbeiten.

Für den Fall, dass $u(t)$ eine Lösung des AWP's (2.20) ist, haben wir festgestellt, dass $u(t)$ die Integralgleichung (2.24) löst. Die Fragen, die wir nun klären sollten, lauten: Ist die Integralgleichung (2.24) eindeutig lösbar? Ist die Lösung der Integralgleichung (2.24) hinreichenden glatt, so dass $u_t(t)$ und $Au(t)$ überhaupt definiert sind? Löst eine Lösung der Integralgleichung (2.24) das zugehörige AWP (2.20)? Mit der Aufklärung dieser Fragen werden wir uns im folgenden Abschnitt näher befassen.

2.3. Existenz und Eindeutigkeit

Für den Beweis der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $u : [0, T[\longrightarrow H_0^1(\Omega)$ für die Integralgleichung (2.24) benötigen wir vorab noch Abschätzungen - sogenannte *Glättungseigenschaften* - bezüglich der Lösung (2.23) des homogenen linearen AWP's (2.21) ([16] Kap.2, [17] Kap.1). Der Beweis dazu ist funktionalanalytischer Natur und verlangt einiges an Vorarbeit ([17] Kap.1, [34]). Es bezeichne auch hier $A = -\triangle$ den kontinuierlichen negativen Laplace-Operator. Mithilfe der Darstellung (2.22), die wir aus dem Spektralsatz A.31 erhalten haben, und der Tatsache, dass der Operator A positiv ist, können wir **gebrochene Potenzen** A^α von A für $\alpha \in \mathbb{R}$ gemäß Definition A.33 einführen:

$$\begin{aligned} A^\alpha v \;&:=\; \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\alpha \cdot (v, \varphi_j)_{L^2} \cdot \varphi_j \\ \mathcal{D}(A^\alpha) \;&=\; \{v \in L^2(\Omega) \mid \|A^\alpha v\|_{L^2} < \infty\} \end{aligned}$$

Wir vermerken an dieser Stelle, dass A ein auf $L^2(\Omega)$ sektorieller Operator entsprechend der Definition A.37 ist ([12] Sec.6-7, [14] 1.3 Exer.(5) oder Rem., [34] Chap.6), d.h. es gilt

$$\exists\, \theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[\;\wedge\; \exists\, M > 0 : \; \|(\lambda I + A)^{-1} v\|_{L^2} \;\leqslant\; \frac{M}{|\lambda|} \quad \forall\, \lambda \in S_{0,\theta}\; \forall\, v \in L^2(\Omega)$$

Der Nemytskii-Operator F lässt sich fortan durch die gebrochenen Potenzen von A kontrollieren. Bekanntlich gelten die folgenden Aussagen, die sich dem Anhang (A.1.a, A.3.a, A.5.b) entnehmen lassen.

$$\|A^\alpha v\|_{L^2} \;=\; \left(\sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_i^\alpha \cdot (v, \varphi_i)_{L^2})^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall\, v \in \mathcal{D}(A^\alpha) \tag{2.25}$$

$$\|v\|_{H^2} \;\leqslant\; C \cdot \|Av\|_{L^2} \quad \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \qquad \textbf{(elliptische Regularität)} \tag{2.26}$$

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \;\leqslant\; C \cdot \|v\|_{H^1} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega) \qquad \textbf{(Spurungleichung)} \tag{2.27}$$

$$\|v\|^2 \;=\; (v, v) \;=\; \sum_{i=1}^{\infty} |(v, \varphi_i)|^2 \qquad \textbf{(Parsevalsche-Identität)} \tag{2.28}$$

Es wird insbesondere für die elliptische Regularität in (2.26) verlangt, dass Ω ein beschränktes glattes oder polygonal berandetes Gebiet ist. Aus (2.26) und (2.27) folgen die Definitionsbereiche ([31] Theo.6.4 und Prob.6.3, [34] Chap.3)

$$\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}) \;=\; H_0^1(\Omega) \quad \text{und} \quad \mathcal{D}(A^1) \;=\; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

In diesem Zusammenhang gilt zudem

$$\mathcal{D}(A^0) \;=\; L^2(\Omega) \quad \text{und} \quad \mathcal{D}(A^{-\frac{1}{2}}) \;=\; H^{-1}(\Omega) \;=\; \big(H_0^1(\Omega)\big)^* \;=\; \big(\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})\big)^*$$

Den Definitionsbereich $\mathcal{D}(A^{-\frac{1}{2}})$ erhält man aus (2.30) mit $l = 1$. Wir kommen nun zu einigen Normäquivalenzen und der L^2-Glattheit von E.

2.4 Lemma.

$$\text{(1): } c \cdot \|v\|_{H^l} \;\leqslant\; \|A^{\frac{l}{2}} v\|_{L^2} \;\leqslant\; C \cdot \|v\|_{H^l} \qquad \forall\, v \in \mathcal{D}(A^{\frac{l}{2}}), l = 1,2 \tag{2.29}$$

$$\text{(2): } c \cdot \|v\|_{H^{-1}} \;\leqslant\; \|A^{-\frac{1}{2}} v\|_{L^2} \;\leqslant\; C \cdot \|v\|_{H^{-1}} \qquad \forall\, v \in H^{-1}(\Omega) \tag{2.30}$$

$$\text{(3): } \|D_t^l E(t) v\|_{L^2} \;=\; \|A^l E(t) v\|_{L^2} \;\leqslant\; C_l \cdot t^{-l} \cdot \|v\|_{L^2} \qquad \forall\, t > 0, \forall\, v \in L^2(\Omega), \forall\, l \geqslant 0 \tag{2.31}$$

$$\text{(4): } \|A^\alpha E(t) v\|_{L^2} \;=\; \|E(t)(A^\alpha v)\|_{L^2} \qquad \forall\, t \geqslant 0, \forall\, v \in \mathcal{D}(A^\alpha), \forall\, \alpha \in \mathbb{R} \tag{2.32}$$

Beweis. *zu (1):* $l = 1$: Die rechte Seite der Ungleichung bekommen wir wie folgt

$$\|A^{\frac{1}{2}} v\|_{L^2}^2 \;=\; \|\nabla v\|_{L^2}^2 \;=\; |v|_{H^1}^2 \;\leqslant\; \|v\|_{H^1}^2 \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

Mithilfe der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung A.12 erhalten wir aus der Ungleichung

$$\|v\|_{H^1}^2 \;=\; \|v\|_{L^2}^2 + |v|_{H^1}^2 \;\overset{\text{A.12}}{\leqslant}\; C^2 |v|_{H^1}^2 + |v|_{H^1}^2 \;=\; (1 + C^2)|v|_{H^1}^2 \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

die linke Seite

$$\|A^{\frac{1}{2}} v\|_{L^2}^2 \;=\; \|\nabla v\|_{L^2}^2 \;=\; |v|_{H^1}^2 \;\geqslant\; (1 + C^2)^{-1} \|v\|_{H^1}^2 \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

wobei $C = \lambda_1^{-\frac{1}{2}}$ gilt und $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega) > 0$ den kleinsten Eigenwert der Helmholtz-Gleichung bezeichne.
$l = 2$: Die rechte Seite bekommen wir durch

$$\|Av\|_{L^2}^2 \;=\; \|\triangle v\|_{L^2}^2 \;\leqslant\; \|v\|_{H^2}^2 \quad \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

und die linke Seite folgt unmittelbar aus der elliptischen Regularität (2.26)

$$\|Av\|_{L^2}^2 \;\overset{(2.26)}{\geqslant}\; C^{-2} \|v\|_{H^2}^2 \quad \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

zu (2): Unter Verwendung der Definition der H^{-1}-Norm bekommen wir

$$\|A^{-\frac{1}{2}} v\|_{L^2} \;=\; \sup_{w \in H_0^1} \frac{|(A^{-\frac{1}{2}} v, w)_{L^2}|}{\|w\|_{L^2}} \;=\; \sup_{w \in H_0^1} \frac{|(v, A^{-\frac{1}{2}} w)_{L^2}|}{\|w\|_{L^2}} \;=\; \sup_{u \in H_0^1} \frac{|(v, u)_{L^2}|}{\|A^{\frac{1}{2}} u\|_{L^2}}$$

wobei wir $u := A^{-\frac{1}{2}} w$ wählen und somit $w = A^{\frac{1}{2}} u$ ist. Die erste Gleichung entsteht dabei aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung. Wegen (2.29) für $l = 1$ gilt zum einen

$$\sup_{u \in H_0^1} \frac{|(v, u)_{L^2}|}{\|A^{\frac{1}{2}} u\|_{L^2}} \;\overset{(2.29)}{\leqslant}\; \frac{1}{c} \cdot \sup_{u \in H_0^1} \frac{|(v, u)_{L^2}|}{\|u\|_{H^1}} \;=\; \frac{1}{c} \cdot \|v\|_{H^{-1}} \quad \forall\, v \in H^{-1}(\Omega)$$

und zum anderen

$$\sup_{u\in H_0^1} \frac{|(v,u)_{L^2}|}{\|A^{\frac{1}{2}}u\|_{L^2}} \overset{(2.29)}{\geqslant} \frac{1}{C}\cdot \sup_{u\in H_0^1} \frac{|(v,u)_{L^2}|}{\|u\|_{H^1}} = \frac{1}{C}\cdot \|v\|_{H^{-1}} \quad \forall\, v\in H^{-1}(\Omega)$$

womit die Behauptung gezeigt ist.
zu (3): Die Gleichheit erhalten wir aus (2.23), (2.25), (2.28), der Orthonormalbasis-Eigenschaft ($(\varphi_j,\varphi_i)_{L^2} = \delta_{ij}$ mit dem Kronecker-Symbol δ_{ij}) und aus der Bilinearität von $(.,.)_{L^2}$

$$\begin{aligned}
&\|D_t^l E(t)v\|_{L^2}^2 \overset{(2.28)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} |(D_t^l E(t)v,\varphi_i)_{L^2}|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\Big[(D_t^l E(t)v,\varphi_i)_{L^2}\Big]^2 \overset{(2.23)}{=} \sum_{i=1}^{\infty}\Big[(D_t^l \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j}\cdot (v,\varphi_j)_{L^2}\cdot \varphi_j,\varphi_i)_{L^2}\Big]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\Big[\sum_{j=1}^{\infty}(-\lambda_j)^l \cdot e^{-t\lambda_j}\cdot (v,\varphi_j)_{L^2}\cdot(\varphi_j,\varphi_i)_{L^2}\Big]^2 \overset{\text{ONB}}{=} \sum_{i=1}^{\infty}\Big[\lambda_i^l\cdot e^{-t\lambda_i}\cdot (v,\varphi_i)_{L^2}\Big]^2 \\
&\overset{\text{ONB}}{=} \sum_{i=1}^{\infty}\Big[\lambda_i^l\cdot \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j}\cdot (v,\varphi_j)_{L^2}\cdot(\varphi_j,\varphi_i)_{L^2}\Big]^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\Big[\lambda_i^l\cdot (\sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j}\cdot (v,\varphi_j)_{L^2}\cdot\varphi_j,\varphi_i)_{L^2}\Big]^2 \\
&\overset{(2.23)}{=} \sum_{i=1}^{\infty}\Big[\lambda_i^l\cdot (E(t)v,\varphi_i)_{L^2}\Big]^2 \overset{(2.25)}{=} \|A^l E(t)v\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

Die Abschätzung erhalten wir aus einem Zwischenschritt der vorherigen Gleichung, (2.28) und der Tatsache, dass die Funktion

$$\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \tau \longmapsto \tau^l\cdot e^{-\tau}$$

für beliebiges $l \geqslant 0$ nach oben beschränkt ist (daher setzen wir $C_l := \sup_{\tau>0}\tau^l\cdot e^{-\tau} < \infty$)

$$\begin{aligned}
&\|D_t^l E(t)v\|_{L^2}^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\Big[\lambda_i^l\cdot e^{-t\lambda_i}\cdot (v,\varphi_i)_{L^2}\Big]^2 = t^{-2l}\cdot \sum_{i=1}^{\infty}\Big[\underbrace{(t\lambda_i)^l\cdot e^{-t\lambda_i}}_{\leqslant C_l := \sup_{\tau>0}\tau^l\cdot e^{-\tau}\ \forall\, i}\cdot (v,\varphi_i)_{L^2}\Big]^2 \\
&\leqslant C_l^2\cdot t^{-2l}\cdot \sum_{i=1}^{\infty}[(v,\varphi_i)_{L^2}]^2 \overset{(2.28)}{=} C_l^2\cdot t^{-2l}\cdot \|v\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

zu (4): Um zu zeigen, dass der Operator A^α mit dem Operator $E(t)$ kommutiert, verwenden wir (2.23), (2.25), (2.28), die Orthonormalbasis-Eigenschaft und die Bilinearität von $(\bullet,\bullet)_{L^2}$.

$$\begin{aligned}
&\|A^\alpha E(t)v\|_{L^2}^2 \overset{(2.25)}{=} \sum_{i=1}^{\infty}[\lambda_i^\alpha\cdot (E(t)v,\varphi_i)_{L^2}]^2 \\
&\overset{(2.23)}{=} \sum_{i=1}^{\infty}\Big[\lambda_i^\alpha\cdot (\sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j}\cdot (v,\varphi_j)_{L^2}\cdot\varphi_j,\varphi_i)_{L^2}\Big]^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\Big[\lambda_i^\alpha\cdot \sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j}\cdot (v,\varphi_j)_{L^2}\cdot(\varphi_j,\varphi_i)\Big]^2 \\
&\overset{\text{ONB}}{=} \sum_{i=1}^{\infty}\Big[\lambda_i^\alpha\cdot e^{-t\lambda_i}\cdot (v,\varphi_i)_{L^2}\Big]^2 \overset{\text{ONB}}{=} \sum_{i=1}^{\infty}\Big[\sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j}\cdot \lambda_j^\alpha\cdot (v,\varphi_j)_{L^2}\cdot(\varphi_j,\varphi_i)\Big]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\Big[(\sum_{j=1}^{\infty} e^{-t\lambda_j}\cdot (\lambda_j^\alpha v,\varphi_j)_{L^2}\cdot\varphi_j,\varphi_i)_{L^2}\Big]^2 \overset{(2.23)}{=} \sum_{i=1}^{\infty}[(E(t)(A^\alpha v),\varphi_i)_{L^2}]^2 \\
&\overset{(2.28)}{=} \|E(t)(A^\alpha v)\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

□

Nun können wir geeignete Glattheitsaussagen für den Operator E formulieren ([31] Kap.8).

2.5 Lemma (GLÄTTUNGSEIGENSCHAFTEN VON E). *Für jedes $l \in \{0,1\}$ und für jedes $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $-1 \leqslant a \leqslant b \leqslant 2$ gibt es eine Konstante $C = C(l,a,b) > 0$, so dass die Abschätzung*

$$\|D_t^l E(t)v\|_{H^b} \leqslant C \cdot t^{-l-\frac{(b-a)}{2}} \cdot \|v\|_{H^a} \quad \forall\, v \in D(A^{\frac{a}{2}})\; \forall\, t > 0 \tag{2.33}$$

erfüllt ist. Falls $l = 0$ und $a = b$, so gilt die Ungleichung sogar für $t \geqslant 0$.

Beweis. Der Beweis folgt direkt aus (2.29), (2.30), (2.31) und (2.32).

$$\begin{aligned} &\|D_t^l E(t)v\|_{H^b} \overset{(2.29),(2.30)}{\leqslant} C \cdot \|A^{\frac{b}{2}} D_t^l E(t)v\|_{L^2} \overset{(2.31)}{=} C \cdot \|A^{l+\frac{b}{2}} E(t)v\|_{L^2} \\ \overset{(2.32)}{=} &C \cdot \|A^{l+\frac{(b-a)}{2}} E(t)(A^{\frac{a}{2}}v)\| \overset{(2.31)}{=} C \cdot t^{-l-\frac{(b-a)}{2}} \cdot \|A^{\frac{a}{2}}v\|_{L^2} \overset{(2.29),(2.30)}{\leqslant} C \cdot t^{-l-\frac{(b-a)}{2}} \cdot \|v\|_{H^a} \end{aligned}$$

□

Das Lemma besagt, dass die Lösung $E(t)u_0$ des homogenen linearen Problems (2.21) b räumliche und l zeitliche Ableitungen in $L^2(\Omega)$ besitzt, sogar unter dem Aspekt, dass die Anfangsdaten nur im Raum $\mathcal{D}(A^{\frac{a}{2}})$ liegen.

Wir haben nun alles was wir benötigen, um unseren lokalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für (2.24) zu beweisen ([17] Theo.1.1, [18] Theo.1.2). Vorweg verweisen wir noch auf den Anhang A.4 und dort speziell auf die Definition einer Kontraktionsabbildung A.50 und auf den Banachschen-Fixpunktsatz A.51, die in den Beweis des folgenden Satzes eingehen.

2.6 Satz (EXISTENZ- UND EINDEUTIGKEITSSATZ). *(1): Für jeden Radius $R > 0$ gibt es einen Zeitpunkt $0 < T(R) < \infty$, so dass die Integralgleichung (2.24) für jede Anfangswertfunktion $u_0 \in B_R$ eine eindeutige Lösung $u \in C([0,T(R)], H_0^1(\Omega))$ besitzt.*
(2): Weiter existiert eine Konstante $C > 0$ mit der Eigenschaft

$$\|u\|_{L^\infty([0,T(R)],H_0^1)} \leqslant CR$$

(3): Seien $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\rho > 0$ und $T > 0$ gegeben. Falls für jede Lösung $u(t)$ auf $[0,\tau] \subset [0,T]$ von (2.24) die a-priori Abschätzung

$$\|u(t)\|_{H^1} \leqslant \rho \quad \forall\, 0 \leqslant t \leqslant \tau$$

gilt, so existiert eine eindeutige Lösung $u(t)$ von (2.24) auf dem Intervall $[0,T]$.

Beweis. *zu (1):* Sei $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ mit $\|u_0\|_{H^1} \leqslant R$ beliebig. Setze

$$S(u)(t) := E(t)u_0 + \int_0^t E(t-s)F(u(s))\,ds \quad \text{für} \quad u \in C([0,T], H_0^1(\Omega))$$

Mit der Integralgleichung (2.24) erhalten wir eine Fixpunktgleichung

$$S(u)(t) := E(t)u_0 + \int_0^t E(t-s)F(u(s))\,ds \overset{\text{z.z.}}{=} u(t)$$

Wir werden nun T und R_0 so wählen, dass wir den Banachschen Fixpunktsatz A.51 in der abgeschlossenen Kugel B mit

$$B := \{u \in C([0,T], H_0^1(\Omega)) \mid \|u\|_{L^\infty([0,T],H_0^1)} \leqslant R_0\} \subset C([0,T], H_0^1(\Omega))$$

anwenden können. Dazu beachte man, dass $S(u)$ als Komposition in t stetiger Funktionen selbst wieder in t stetig ist. Dieser Satz liefert uns dann sowohl die Existenz als auch die Eindeutigkeit eines

Fixpunktes und damit einer Lösung. Wir müssen als Voraussetzung für diesen Satz zum einen zeigen, dass S eine Selbstabbildung von B ist, und zum anderen, dass S eine Kontraktion ist (siehe: A.50).
a) z.z.: S ist eine Selbstabbildung von B. Sei $u \in B$ beliebig. Aus (2.3) und Satz A.42 folgt

$$\begin{aligned}
\|F(u(t))\|_{L^2} &= \|F(0) - F(0) + F(u(t))\|_{L^2} \\
&\overset{A.42}{\leqslant} \|F(0)\|_{L^2} + \|F(u(t)) - F(0)\|_{L^2} \\
&\overset{(2.3)}{\leqslant} \|F(0)\|_{L^2} + C(R_0) \cdot \|u(t)\|_{H^1} \\
&\leqslant \|F(0)\|_{L^2} + C(R_0) \cdot R_0 \quad \forall\, t \in [0, T]
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Da $u_0 \in H_0^1(\Omega) = \mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}}) \subset \mathcal{D}(A^0)$ ist, können wir (2.33) speziell für $l = 0$, $b = 1$, $a = 1$ sowie für $l = 0$, $b = 1$, $a = 0$ anwenden und erhalten daraus und mit Hilfe von (2.34) und $\|u_0\|_{H^1} \leqslant R$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|S(u)(t)\|_{H^1} &= \|E(t)u_0 + \int_0^t E(t-s)F(u(s))\,ds\|_{H^1} \\
&\leqslant \|E(t)u_0\|_{H^1} + \int_0^t \|E(t-s)F(u(s))\|_{H^1}\,ds \\
&\overset{(2.33)}{\leqslant} C_0\|u_0\|_{H^1} + \int_0^t C_1(t-s)^{-\frac{1}{2}}\|F(u(s))\|_{L^2}\,ds \\
&\overset{(2.34)}{\leqslant} C_0R + C_1(\|F(0)\|_{L^2} + C(R_0)R_0) \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\,ds \\
&= C_0R + C_1(\|F(0)\|_{L^2} + C(R_0)R_0) \cdot 2t^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C_0R + 2C_1(\|F(0)\|_{L^2} + C(R_0)R_0)T^{\frac{1}{2}} \quad \forall\, t \in [0, T]
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Wir wählen nun $R_0 := 2C_0R$ und $T := T(R) > 0$ so klein, dass die Abschätzung

$$2C_1(\|F(0)\|_{L^2} + C(R_0)R_0)T^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{1}{2}R_0 \tag{2.36}$$

gilt, so erhalten wir aus (2.35) und (2.36) die Abschätzung

$$\|S(u)\|_{L^\infty([0,T],H_0^1)} = \sup_{t\in[0,T]} \|S(u)(t)\|_{H^1} \overset{(2.35)}{\leqslant} C_0R + 2C_1(\|F(0)\|_{L^2} + C(R_0)R_0)T^{\frac{1}{2}} \tag{2.37}$$

$$\overset{(2.36)}{\leqslant} \frac{1}{2}R_0 + \frac{1}{2}R_0 = R_0$$

womit S eine Selbstabbildung von B ist.
b) z.z.: $S : B \longrightarrow B$ ist eine Kontraktion auf B. Seien $u, v \in B$ beliebig. Unter Verwendung von (2.3) bekommen wir

$$\|F(u(t)) - F(v(t))\|_{L^2} \overset{(2.3)}{\leqslant} C(R_0) \cdot \|u(t) - v(t)\|_{H^1} \leqslant C(R_0) \cdot \sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - v(t)\|_{H^1}$$

$$= C(R_0) \cdot \|u - v\|_{L^\infty([0,T],H_0^1)} \quad \forall\, t \in [0, T] \tag{2.38}$$

Nun folgt aus (2.33) speziell für $l = 0$, $b = 1$, $a = 0$, (2.38) und (2.36) (nachdem man beide Seiten in (2.36) durch R_0 geteilt hat)

$$\|S(u)(t) - S(v)(t)\|_{H^1} = \|\int_0^t E(t-s)F(u(s)) - E(t-s)F(v(s))\,ds\|_{H^1}$$

$$\leqslant \int_0^t \|E(t-s)(F(u(s)) - F(v(s)))\|_{H^1}\,ds \overset{(2.33)}{\leqslant} C_1 \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|F(u(s)) - F(v(s))\|_{L^2}\,ds$$

$$\overset{(2.38)}{\leqslant} C_1C(R_0)\|u - v\|_{L^\infty([0,T],H_0^1)} \int_0^1 (t-s)^{-\frac{1}{2}}\,ds = C_1C(R_0)2t^{\frac{1}{2}}\|u - v\|_{L^\infty([0,T],H_0^1)}$$

$$\leqslant \; 2C_1C(R_0)T^{\frac{1}{2}}\|u-v\|_{L^\infty([0,T],H_0^1)} \;\leqslant\; 2C_1(\frac{\|F(0)\|_{L^2}}{R_0}+C(R_0))T^{\frac{1}{2}}\|u-v\|_{L^\infty([0,T],H_0^1)}$$
$$\overset{(2.36)}{\leqslant} \frac{1}{2}\|u-v\|_{L^\infty([0,T],H_0^1)} \quad \forall\, t\in[0,T]$$

Daraus erhalten wir

$$\|S(u)-S(v)\|_{L^\infty([0,T],H_0^1)} \;=\; \sup_{t\in[0,T]}\|S(u)(t)-S(v)(t)\|_{H^1} \;\leqslant\; \frac{1}{2}\|u-v\|_{L^\infty([0,T],H_0^1)}$$

Damit ist die Abbildung $S : B \longrightarrow B$ eine Kontraktion auf B und nach dem Banachschen Fixpunktsatz A.51 gibt es genau einen Fixpunkt $u \in B$ mit $S(u) = u$, womit die Existenz und Eindeutigkeit gezeigt ist.
zu (2): Wegen der Fixpunkteigenschaft $S(u) = u$ und aus (2.37) sowie der Definition von R_0 folgt die Aussage mit $C := 2C_0$ durch

$$\|u\|_{L^\infty([0,T],H_0^1)} \;=\; \|S(u)\|_{L^\infty([0,T],H_0^1)} \;\overset{(2.37)}{\leqslant}\; R_0 \;=\; 2C_0R \;=:\; CR$$

zu (3): Aus der gegebenen a-priori Schranke folgt $\|u_0\|_{H^1} \leqslant \rho$, also $u_0 \in B_\rho$. Damit gibt es nach Satz 2.6(1) ein $T(\rho) > 0$ und eine eindeutige Lösung u auf $[0, T(\rho)]$. Aus der a-priori Schranke folgt wiederum $\|u(T(\rho))\|_{H^1} \leqslant \rho$, also $u(T(\rho)) \in B_\rho$, so dass uns Satz 2.6(1) zu der Anfangswertfunktion $u(T(\rho)) \in B_\rho$ eine eindeutige Lösung u auf dem Intervall $[T(\rho), 2T(\rho)]$ liefert. Führen wir diesen Prozess fort, so erhalten wir nach endlich vielen Schritten eine eindeutige Lösung u, die solange existiert, wie die a-priori Schranke gültig ist, also auf dem Intervall $[0, T]$. □

2.4. Regularität

Als nächstes kommen wir zur Regularitätstheorie ([14] Theo.3.5.2, [16] Theo.3.2, [17] Theo.1.2, [18] Theo.1.3, [32] Theo.2.6). Die Aufgabe von Regularitätssätzen besteht darin, Aussagen über die Glattheit der Lösung $u : [0, T] \longrightarrow H_0^1(\Omega)$ und gegebenenfalls den zugehörigen Ableitungen zu geben. Derartige Informationen spielen bei der Fehleranalyse eine wichtige Rolle. Dabei ist die Glattheit der Lösung u abhängig von der Glattheit der Anfangsdaten u_0. Falls $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ gilt, so sprechen wir von **nichtglatten Anfangsdaten** und falls $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ gilt, so sprechen wir von **glatten Anfangsdaten**. Der Anlass für diese Namensvergabe hängt mit dem Singularitätsterm $t^{-\frac{1}{2}}$ zusammen, den wir uns in der Abschätzung (2.39) für $s = 2$ im folgenden Satz einfangen. Diese schwache Singularität verschwindet genau dann, wenn man die Anfangsdaten hinreichend glatt, d.h. $u_0 \in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, wählt (siehe: (2.42) für $s = 2$). Die erste Aussage des folgenden Regularitätssatzes gilt den nichtglatten und die zweite Aussage den glatten Anfangsdaten.

2.7 Satz (REGULARITÄTSSATZ). *(1): Sei $u \in C([0, T_{max}(u_0)[, H_0^1(\Omega))$ die zugehörige Lösung der Integralgleichung (2.24) zu den Anfangsdaten $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ auf dem maximalen Existenzintervall $[0, T_{max}(u_0)[$. Dann gilt für jedes $R_1 > 0$ und $0 < t_0 < T_{max}(u_0)$ mit $\|u(t)\|_{H^1} \leqslant R_1\ \forall\, t \in [0, t_0]$:*

$$a):\ \|u(t)\|_{H^s} \;\leqslant\; C(R_1,t_0)\cdot t^{-\frac{(s-1)}{2}} \qquad \forall\, t\in]0,t_0]\ \ (s=1,2) \tag{2.39}$$
$$b):\ \|u_t(t)\|_{H^s} \;\leqslant\; C(R_1,t_0)\cdot t^{-1-\frac{(s-1)}{2}} \qquad \forall\, t\in]0,t_0]\ \ (s=0,1,2) \tag{2.40}$$
$$c):\ \|u_{tt}(t)\|_{L^2} \;\leqslant\; C(R_1,t_0)\cdot t^{-\frac{3}{2}} \qquad \forall\, t\in]0,t_0] \tag{2.41}$$

(2): Falls zusätzlich zu (1) $u_0 \in H^2(\Omega)$ mit $\|u_0\|_{H^2} \leqslant R_2$ ist, so gilt

$$a):\ \|u(t)\|_{H^s} \;\leqslant\; C(R_1,R_2,t_0) \qquad \forall\, t\in[0,t_0]\ \ (s=1,2) \tag{2.42}$$
$$b):\ \|u_t(t)\|_{H^s} \;\leqslant\; C(R_1,R_2,t_0)\cdot t^{-\frac{s}{2}} \qquad \forall\, t\in]0,t_0]\ \ (s=0,1,2) \tag{2.43}$$
$$c):\ \|u_{tt}(t)\|_{L^2} \;\leqslant\; C(R_1,R_2,t_0)\cdot t^{-1} \qquad \forall\, t\in]0,t_0] \tag{2.44}$$

Beweis. *zu (1)a) $s = 1$:* Dies folgt aus Satz 2.6.
zu (1)b) $s = 0$: ([14] Theorem 3.5.2, [18] Theo.1.3). Der Trick hierbei ist es, zu zeigen, dass u bezüglich t differenzierbar ist und u_t im Raum $L^2(\Omega)$ liegt. Dazu betrachten wir ohne Einschränkung $h > 0$, dann folgt durch Substitution (mit $s \longrightarrow t - s$):

$$\begin{aligned}
&u(t+h) - u(t)\\
&= (E(t+h) - E(t))u_0 + \int_0^{t+h} E(t+h-s)F(u(s))\,ds - \int_0^t E(t-s)F(u(s))\,ds\\
&= (E(h) - I)E(t)u_0 + \int_0^{t+h} E(s)F(u(t+h-s))\,ds - \int_0^t E(s)F(u(t-s))\,ds\\
&= (E(h) - I)E(t)u_0 + \int_t^{t+h} E(s)F(u(t+h-s))\,ds\\
&\qquad\qquad + \int_0^t E(s)\left[F(u(t+h-s)) - F(u(t-s))\right]\,ds\\
&= (E(h) - I)E(t)u_0 + \int_0^h E(t+h-s)F(u(s))\,ds\\
&\qquad\qquad + \int_0^t E(t-s)\left[F(u(s+h)) - F(u(s))\right]\,ds
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Für die Abschätzung des ersten Summanden verwenden wir

$$\|A^{-1}(E(h) - I)v\|_{L^2} \leqslant h\|v\|_{L^2} \quad \forall\, v \in L^2(\Omega)\;\forall\, h > 0 \tag{2.46}$$

Der Beweis von (2.46) erfolgt dabei ähnlich zu dem von (2.31). Wir benötigen dazu zunächst die Tatsache, dass die Funktion

$$\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \tau \longmapsto \frac{e^{-\tau} - 1}{\tau}$$

durch die Schranke 1 nach oben beschränkt ist. Daraus und aus (2.23), (2.25), (2.28) sowie der Orthonormalbasiseigenschaft erhalten wir den Beweis von (2.46) durch

$$\begin{aligned}
\|A^{-1}(E(h) - I)v\|_{L^2}^2 &\overset{(2.25)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\lambda_i^{-1} \cdot ((E(h) - I)v, \varphi_i)_{L^2}\right]^2\\
&\overset{(2.23)}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\lambda_i^{-1} \cdot (\sum_{j=1}^{\infty}(e^{-h\lambda_j} - 1) \cdot (v, \varphi_j)_{L^2} \cdot \varphi_j, \varphi_i)_{L^2}\right]^2\\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left[\lambda_i^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{\infty}(e^{-h\lambda_j} - 1) \cdot (v, \varphi_j)_{L^2} \cdot (\varphi_j, \varphi_i)_{L^2}\right]^2\\
&\overset{\text{ONB}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} [\underbrace{\lambda_i^{-1} \cdot (e^{-h\lambda_i} - 1)}_{\leqslant h} \cdot (v, \varphi_i)_{L^2}]^2\\
&\leqslant h^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} [(v, \varphi_i)_{L^2}]^2\\
&\overset{(2.28)}{=} h^2\|v\|_{L^2}^2 \quad \forall\, v \in L^2(\Omega)\;\forall\, h > 0
\end{aligned}$$

Aus (2.46), (2.32), (2.33) mit $a = 1$, $b = 2$ sowie $l = 0$ und aus (2.29) für $l = 2$ erhalten wir für den ersten Summanden

$$\begin{aligned}
\|(E(h) - I)E(t)u_0\|_{L^2} &\overset{(2.32)}{=} \|A^{-1}(E(h) - I)AE(t)u_0\|_{L^2}\\
&\overset{(2.46)}{\leqslant} h\|AE(t)u_0\|_{L^2}\\
&\overset{(2.29)}{\leqslant} Ch\|E(t)u_0\|_{H^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(2.33)}{\leqslant} \; Cht^{-\frac{1}{2}}\|u_0\|_{H^1} \\
&\leqslant \; C(R_1)ht^{-\frac{1}{2}} \quad \forall\, t \in]0,t_0] \;\forall\, h>0
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Wenden wir auf (2.45) die L^2-Norm an, so behandeln wir den ersten Summanden mit (2.47), den zweiten Summanden mit (2.33) für $a = b = l = 0$ und mit (2.4) und den dritten Summanden mit (2.33) für $a = -1$ und $b = l = 0$ sowie mit (2.6) und erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|u(t+h)-u(t)\|_{L^2} &\overset{(2.45)}{\leqslant} \|(E(h)-I)E(t)u_0\|_{L^2} + \int_0^h \|E(t+h-s)F(u(s))\|_{L^2}\,ds \\
&\qquad + \int_0^t \|E(t-s)\left[F(u(s+h))-F(u(s))\right]\|_{L^2}\,ds \\
&\overset{(2.47),(2.33)}{\leqslant} C(R_1)ht^{-\frac{1}{2}} + C\int_0^h \|F(u(s))\|_{L^2}\,ds \\
&\qquad + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|F(u(s+h))-F(u(s))\|_{H^{-1}}\,ds \\
&\overset{(2.4),(2.6)}{\leqslant} C(R_1)ht^{-\frac{1}{2}} + C(R_1)h \\
&\qquad + C(R_1)\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|u(s+h)-u(s)\|_{L^2}\,ds \\
&= C(R_1)h[1+t^{\frac{1}{2}}]t^{-\frac{1}{2}} + C(R_1)\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|u(s+h)-u(s)\|_{L^2}\,ds \\
&\leqslant C(R_1,t_0)ht^{-\frac{1}{2}} + C(R_1)\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|u(s+h)-u(s)\|_{L^2}\,ds \\
&\qquad\qquad \forall\, t \in]0,t_0] \;\forall\, h>0
\end{aligned}$$

da $0 < t^{\frac{1}{2}} \leqslant t_0^{\frac{1}{2}}$ für alle $t \in]0,t_0]$. Das verallgemeinerte Gronwall-Lemma A.48 liefert uns

$$\|u(t+h)-u(t)\|_{L^2} \leqslant C(R_1,t_0)ht^{-\frac{1}{2}} \quad \forall\, t \in]0,t_0] \;\forall\, h>0$$

Ein analoges Ergebnis erhält man für $h < 0$. Division beider Seiten durch h und Limesbildung $h \to 0$ mit $h > 0$ (bzw. im anderen Fall $h < 0$) bringt uns die Behauptung

$$\|u_t(t)\|_{L^2} = \lim_{h\to 0}\left\|\frac{u(t+h)-u(t)}{h}\right\|_{L^2} \leqslant C(R_1,t_0)t^{-\frac{1}{2}} \quad \forall\, t \in]0,t_0]$$

Für die Existenz der Ableitung verweisen wir auf [14] (Lemma 3.5.1) und [20] (Lemma 2.2).
zu (1)a) $s = 2$: Diese Aussage folgt nun unmittelbar aus (2.40) für $s = 0$, der elliptischen Regularität (2.26), (2.4) und $0 < t^{\frac{1}{2}} \leqslant t_0^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{H^2} &\overset{(2.26)}{\leqslant} C\|Au(t)\|_{L^2} \\
&\overset{(2.20)}{=} C\|F(u(t))-u_t(t)\|_{L^2} \\
&\leqslant C\|F(u(t))\|_{L^2} + C\|u_t(t)\|_{L^2} \\
&\overset{(2.4),(2.40)}{\leqslant} C(R_1) + C(R_1,t_0)t^{-\frac{1}{2}} \\
&= \left[C(R_1)t^{\frac{1}{2}} + C(R_1,t_0)\right]t^{-\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C(R_1,t_0)t^{-\frac{1}{2}} \quad \forall\, t \in]0,t_0]
\end{aligned}$$

zu (1)b) $s=1$: Setze $v(t) := tu_t(t)$, so erfüllt $v(t)$ das Anfangswertproblem

$$
\begin{aligned}
v_t(t) + Av(t) &= u_t(t) + t \cdot \frac{d}{dt}\left[u_t(t) + Au(t)\right] \\
&= u_t(t) + t \cdot \frac{d}{dt}[F(u(t))] \\
&= u_t(t) + t \cdot dF(u(t))u'(t) \\
&= u_t(t) + dF(u(t))v(t) \quad t \in]0, t_0] \\
v(0) &= 0
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

$v(t)$ löst als Lösung des AWP's (2.48) die folgende Gleichung: (vgl. (2.24) und Kommentar danach)

$$
v(t) = \int_0^t E(t-s)(u_s(s) + dF(u(s))v(s))\, ds \quad \forall\, t \geqslant 0 \tag{2.49}
$$

Aus der Darstellung (2.49) erhalten wir mit (2.33) speziell für $l=0$, $b=1$, $a=0$, (2.40) mit $s=0$ und (2.2) die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
\|v(t)\|_{H^1} &\overset{(2.49)}{\leqslant} \int_0^t \|E(t-s)u_s(s)\|_{H^1}\, ds + \int_0^t \|E(t-s)dF(u(s))v(s)\|_{H^1}\, ds \\
&\overset{(2.33)}{\leqslant} C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u_s(s)\|_{L^2}\, ds + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|dF(u(s))v(s)\|_{L^2}\, ds \\
&\overset{(2.40),(2.2)}{\leqslant} C(R_1,t_0)\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}}\, ds + C(R_1)\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|v(s)\|_{H^1}\, ds \\
&= C(R_1,t_0) + C(R_1)\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|v(s)\|_{H^1}\, ds \quad \forall\, t \in]0, t_0]
\end{aligned}
$$

Damit sind die Voraussetzungen des Gronwall-Lemmas A.48 erfüllt. Dieses liefert uns die Ungleichung

$$
\|v(t)\|_{H^1} \leqslant C(R_1, t_0) \quad \forall\, t \in]0, t_0]
$$

Aufgrund der Wahl von $v(t) = tu_t(t)$ bekommen wir nach Multiplikation beider Seiten mit t^{-1}

$$
\|u_t(t)\|_{H^1} \leqslant C(R_1, t_0)t^{-1} \quad \forall\, t \in]0, t_0]
$$

zu (1)b) $s=2$: Aufgrund der Interpolationsabschätzung A.38 lässt sich die Aussage (2.40) mit $s=0,1$ für dazwischenliegende reelle Werte $s \in [0,1]$ interpolieren, d.h. (2.40) gilt sogar für $s \in \mathbb{R}$ mit $s \in [0,1]$. Speziell für $s = \frac{1}{2}$ haben wir

$$
\|u_t(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}} \leqslant C(R_1, t_0)t^{-\frac{3}{4}} \quad \forall\, t \in]0, t_0] \tag{2.50}
$$

Aus der Darstellung (2.49) erhalten wir mit (2.50), (2.33) speziell für $l=0$, $b=2$, $a=\frac{1}{2}$ sowie für $l=0$, $b=2$, $a=1$, (2.39) mit $s=2$ sowie (2.40) mit $s=1$ und aus (2.7) die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
\|v(t)\|_{H^2} &\overset{(2.49)}{\leqslant} \int_0^t \|E(t-s)u_s(s)\|_{H^2}\, ds + \int_0^t \|E(t-s)dF(u(s))v(s)\|_{H^2}\, ds \\
&\overset{(2.33)}{\leqslant} C\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|u_s(s)\|_{H^{\frac{1}{2}}}\, ds + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|dF(u(s))v(s)\|_{H^1}\, ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(2.7)}{\leqslant} && C\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} \|u_s(s)\|_{H^{\frac{1}{2}}}\, ds + C(R_1)\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u(s)\|_{H^2}\|v(s)\|_{H^1}\, ds \\
& && \quad + C(R_1)\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|v(s)\|_{H^2}\, ds \\
&\overset{(2.50),(2.39),(2.40)}{\leqslant} && C(R_1,t_0)\underbrace{\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} s^{-\frac{3}{4}}\, ds}_{=Ct^{-\frac{1}{2}}} + C(R_1,t_0)\underbrace{\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}}\, ds}_{=\pi} \\
& && \quad + C(R_1)\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|v(s)\|_{H^2}\, ds \\
&\leqslant && C(R_1,t_0)t^{-\frac{1}{2}} + C(R_1)\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|v(s)\|_{H^2}\, ds \quad \forall\, t\in]0,t_0]
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir ausgenutzt, dass sich sowohl das erste als auch das zweite Integral nach der vierten Ungleichung mit der Substitution $s = t\cdot\tau$ in die *Eulersche Beta-Funktion* transformieren und sich mithilfe der *Gammafunktion* berechnen lässt (siehe: Anhang A.2).

$$
\begin{aligned}
\int_0^t (t-s)^{-\frac{3}{4}} s^{-\frac{3}{4}}\, ds &= t^{-\frac{6}{4}} t \int_0^1 (1-\tau)^{-\frac{3}{4}} \tau^{-\frac{3}{4}}\, d\tau = t^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{4})\cdot\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = Ct^{-\frac{1}{2}} \quad \forall\, t\in]0,t_0] \\
\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}}\, ds &= t^{-\frac{2}{2}} t \int_0^1 (1-\tau)^{-\frac{1}{2}} \tau^{-\frac{1}{2}}\, d\tau = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \pi \quad \forall\, t\in]0,t_0]
\end{aligned} \tag{2.51}
$$

Das verallgemeinerte Gronwall-Lemma A.48 liefert uns

$$\|v(t)\|_{H^2} \leqslant C(R_1,t_0)t^{-\frac{1}{2}} \quad \forall\, t\in]0,t_0]$$

und da $v(t) = tu_t(t)$ gewählt wurde, folgt durch Multiplikation mit t^{-1}

$$\|u_t(t)\|_{H^2} \leqslant C(R_1,t_0)t^{-\frac{3}{2}} \quad \forall\, t\in]0,t_0]$$

zu (1)c): Differentiation von (2.20) bezüglich t liefert uns zunächst

$$u_{tt}(t) + Au_t(t) = \frac{d}{dt}F(u(t)) = dF(u(t))u_t(t) \quad \forall\, t\in]0,t_0] \tag{2.52}$$

Bringen wir $Au_t(t)$ auf die rechte Seite und wenden die L^2-Norm an, so erhalten wir aus (2.29), (2.40) für $s=1$ und $s=2$ sowie aus (2.2) die Abschätzung

$$
\begin{aligned}
\|u_{tt}(t)\|_{L^2} &\overset{(2.52)}{=} \|dF(u(t))u_t(t) - Au_t(t)\|_{L^2} \\
&\leqslant \|dF(u(t))u_t(t)\|_{L^2} + \|Au_t(t)\|_{L^2} \\
&\overset{(2.2),(2.29)}{\leqslant} C(R_1)\|u_t(t)\|_{H^1} + C\|u_t(t)\|_{H^2} \\
&\overset{(2.40)}{\leqslant} C(R_1)t^{-1} + C(R_1,t_0)t^{-\frac{3}{2}} \\
&\leqslant \left[C(R_1)t_0^{\frac{1}{2}} + C(R_1,t_0)\right]\cdot t^{-\frac{3}{2}} \\
&= C(R_1,t_0)t^{-\frac{3}{2}} \quad \forall\, t\in]0,t_0]
\end{aligned}
$$

Man beachte hierbei nachträglich, dass wir wegen (2.40) mit $s=1$ die Aussage $u_t(t)\in H_0^1(\Omega)\ \forall\, t\in]0,t_0]$ erhalten, wodurch die Anwendung von (2.2) gerechtfertigt ist. Bemerke, dass (2.2) sogar in $H^1(\Omega)$ gilt. Analog liefert uns (2.40) mit $s=0,1,2$, dass $u_t(t)\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega) = \mathcal{D}(A)\ \forall\, t\in]0,t_0]$ gilt. Damit erfüllt $u_t(t)$ für jedes $t\in]0,t_0]$ die Normäquivalenz (2.29) speziell für $l=2$. Für die Existenz der Ableitung verweisen wir auf [14] (Lemma 3.5.1) und [20] (Lemma 2.2). Damit ist (2.41) gezeigt.

zu (2)a) $s = 1$: Dies folgt aus Satz 2.6.
zu (2)b) $s = 0$: Wir betrachten wieder (2.45). Für die Abschätzung des ersten Summanden in (2.45) verwenden wir diesmal (2.46), (2.29) mit $l = 2$ und (2.33) mit $a = b = 2$ und $l = 0$ und erhalten analog zu (2.47)

$$\begin{aligned}
\|(E(h) - I)E(t)u_0\|_{L^2} &= \|A^{-1}(E(h) - I)AE(t)u_0\|_{L^2} \\
&\overset{(2.46)}{\leqslant} Ch\|AE(t)u_0\|_{L^2} \\
&\overset{(2.29)}{\leqslant} Ch\|E(t)u_0\|_{H^2} \\
&\overset{(2.33)}{\leqslant} Ch\|u_0\|_{H^2} \\
&\leqslant C(R_2)h
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Wenden wir auf (2.45) die L^2-Norm an, so behandeln wir den ersten Summanden mit (2.53), den zweiten Summanden mit (2.33) für $a = b = l = 0$ und mit (2.4) und den dritten Summanden mit (2.33) für $a = -1$ und $b = l = 0$ sowie mit (2.6) und erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|u(t + h) - u(t)\|_{L^2} &\overset{(2.45)}{\leqslant} \|(E(h) - I)E(t)u_0\|_{L^2} + \int_0^h \|E(t + h - s)F(u(s))\|_{L^2}\, ds \\
&\qquad + \int_0^t \|E(t - s)\,[F(u(s + h)) - F(u(s))]\|_{L^2}\, ds \\
&\overset{(2.53),(2.33)}{\leqslant} C(R_2)h + C\int_0^h \|F(u(s))\|_{L^2}\, ds \\
&\qquad + C\int_0^t (t - s)^{-\frac{1}{2}} \|F(u(s + h)) - F(u(s))\|_{H^{-1}}\, ds \\
&\overset{(2.6)}{\leqslant} C(R_2)h + C(R_1)h + C(R_1)\int_0^t (t - s)^{-\frac{1}{2}} \|u(s + h) - u(s)\|_{L^2}\, ds \\
&= C(R_1, R_2)h + C(R_1)\int_0^t (t - s)^{-\frac{1}{2}} \|u(s + h) - u(s)\|_{L^2}\, ds \\
&\qquad\qquad \forall\, t \in]0, t_0]\ \forall\, h > 0
\end{aligned}$$

Das verallgemeinerte Gronwall-Lemma A.48 liefert uns

$$\|u(t + h) - u(t)\|_{L^2} \leqslant C(R_1, R_2, t_0)h \quad \forall\, t \in]0, t_0]\ \forall\, h > 0$$

Die t_0-Abhängigkeit kommt dabei aus der Konstanten im Gronwall-Lemma. Ein analoges Ergebnis erhält man für $h < 0$. Division beider Seiten durch h und Limesbildung $h \to 0$ mit $h > 0$ (bzw. im anderen Fall $h < 0$) bringt uns die Behauptung

$$\|u_t(t)\|_{L^2} = \lim_{h\to 0} \left\|\frac{u(t + h) - u(t)}{h}\right\|_{L^2} \leqslant C(R_1, R_2, t_0) \quad \forall\, t \in]0, t_0]$$

Dass diese Abschätzung auch im Punkt $t = 0$ gilt, folgt aus der Darstellung (2.20), der Anwendung von (2.4) und aus (2.29) für $l = 2$

$$\begin{aligned}
\|u_t(0)\|_{L^2} &\overset{(2.20)}{\leqslant} \|F(u_0)\|_{L^2} + \|Au_0\|_{L^2} \\
&\overset{(2.4),(2.29)}{\leqslant} C(R_1) + C\|u_0\|_{H^2} \\
&\leqslant C(R_1, R_2)
\end{aligned}$$

zu (2)a) $s = 2$: Wir betrachten die Darstellung (2.20). Die Ungleichung folgt nun unmittelbar aus (2.43) für $s = 0$, der Normäquivalenz (2.29) für $l = 2$ und (2.4)

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{H^2} &\overset{(2.29)}{\leqslant} C\|Au(t)\|_{L^2} \\
&\overset{(2.20)}{=} C\|F(u(t)) - u_t(t)\|_{L^2} \\
&\leqslant C\|F(u(t))\|_{L^2} + C\|u_t(t)\|_{L^2} \\
&\overset{(2.4),(2.43)}{\leqslant} C(R_1) + C(R_1, R_2, t_0) \\
&= C(R_1, R_2, t_0) \quad \forall\, t \in]0, t_0]
\end{aligned}$$

Dass diese Abschätzung auch im Punkt $t = 0$ gilt, folgt unmittelbar aus der Voraussetzung, denn es gilt $\|u(0)\|_{H^2} = \|u_0\|_{H^2} \leqslant R_2$.
zu (2)b) $s = 1$: Setze $v(t) := tu_t(t)$, so erfüllt $v(t)$ das Anfangswertproblem (2.48) und löst als Lösung des AWP's (2.48) die Gleichung (2.49). Aus der Darstellung (2.49) erhalten wir mit (2.33) speziell für $l = 0$, $b = 1$, $a = 0$, (2.43) mit $s = 0$ und (2.2) die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|v(t)\|_{H^1} &\overset{(2.49)}{\leqslant} \int_0^t \|E(t-s)u_s(s)\|_{H^1}\, ds + \int_0^t \|E(t-s)dF(u(s))v(s)\|_{H^1}\, ds \\
&\overset{(2.33)}{\leqslant} C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|u_s(s)\|_{L^2}\, ds + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|dF(u(s))v(s)\|_{L^2}\, ds \\
&\overset{(2.43),(2.2)}{\leqslant} C(R_1, R_2, t_0)\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\, ds + C(R_1)\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|v(s)\|_{H^1}\, ds \\
&= C(R_1, R_2, t_0)t^{\frac{1}{2}} + C(R_1)\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|v(s)\|_{H^1}\, ds \quad \forall\, t \in]0, t_0]
\end{aligned}$$

Damit sind die Voraussetzungen des Gronwall-Lemmas A.48 erfüllt. Dieses liefert uns die Ungleichung

$$\|v(t)\|_{H^1} \leqslant C(R_1, R_2, t_0)t^{\frac{1}{2}} \quad \forall\, t \in]0, t_0]$$

Aufgrund der Wahl von $v(t) = tu_t(t)$ bekommen wir nach Multiplikation beider Seiten mit t^{-1}

$$\|u_t(t)\|_{H^1} \leqslant C(R_1, R_2, t_0)t^{-\frac{1}{2}} \quad \forall\, t \in]0, t_0]$$

Für die Existenz der Ableitung verweisen wir auf [14] (Lemma 3.5.1) und [20] (Lemma 2.2).
zu (2)b) $s = 2$: Setze auch hier $v(t) := tu_t(t)$, so erfüllt $v(t)$ die Gleichung (2.48) und lässt sich durch (2.49) darstellen. Man beachte, dass wir aufgrund der hinreichenden Glattheit der Anfangsdaten in der folgenden Ungleichung ohne die Anwendung einer Interpolationsabschätzung auskommen werden. Aus (2.33) speziell für $a = 1$, $b = 2$, $l = 0$, (2.7), (2.42) für $s = 2$ und (2.43) für $s = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\|v(t)\|_{H^2} &\overset{(2.49)}{\leqslant} \int_0^t \|E(t-s)u_s(s)\|_{H^2}\, ds + \int_0^t \|E(t-s)dF(u(s))v(s)\|_{H^2}\, ds \\
&\overset{(2.33)}{\leqslant} C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|u_s(s)\|_{H^1}\, ds + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|dF(u(s))v(s)\|_{H^1}\, ds \\
&\overset{(2.7)}{\leqslant} C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|u_s(s)\|_{H^1}\, ds + C(R_1)\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|u(s)\|_{H^2}\|v(s)\|_{H^1}\, ds \\
&\qquad + C(R_1)\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|v(s)\|_{H^2}\, ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(2.42),(2.43)}{\leqslant} C(R_1,R_2,t_0)\underbrace{\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}s^{-\frac{1}{2}}\,ds}_{=\pi} + C(R_1,R_2,t_0)\underbrace{\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}s^{\frac{1}{2}}\,ds}_{=t\frac{\pi}{2}} \\
&\qquad + C(R_1)\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|v(s)\|_{H^2}\,ds \\
&\leqslant C(R_1,R_2,t_0) + C(R_1)\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|v(s)\|_{H^2}\,ds \quad \forall\, t\in]0,t_0]
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir an dieser Stelle erneut ausgenutzt, dass sich sowohl das erste als auch das zweite Integral nach der vierten Ungleichung mit der Substitution $s = t\cdot\tau$ in die *Eulersche Beta-Funktion* überführen und anschließend mithilfe der *Gammafunktion* berechnen lässt. Das erste Integral haben wir bereits in (2.51) bestimmt und das zweite lässt sich wie folgt berechnen

$$
\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}s^{\frac{1}{2}}\,ds = t^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}}t\int_0^1 (1-\tau)^{-\frac{1}{2}}\tau^{\frac{1}{2}}\,d\tau = t\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\cdot\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(2)} = t\frac{\sqrt{\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{(2-1)!} = t\frac{\pi}{2} \quad \forall\, t\in]0,t_0]
$$

Das verallgemeinerte Gronwall-Lemma A.48 liefert uns

$$
\|v(t)\|_{H^2} \leqslant C(R_1,R_2,t_0) \quad \forall\, t\in]0,t_0]
$$

und da $v(t) = tu_t(t)$ gewählt wurde, folgt durch Multiplikation mit t^{-1}

$$
\|u_t(t)\|_{H^2} \leqslant C(R_1,R_2,t_0)t^{-1} \quad \forall\, t\in]0,t_0]
$$

zu (2)c): Differentiation von (2.20) bezüglich t liefert uns zunächst (2.52). Bringen wir $Au_t(t)$ auf die rechte Seite und wenden die L^2-Norm an, so erhalten wir aus (2.29) für $l = 2$, (2.2) sowie aus (2.43) für $s = 1$ und $s = 2$

$$
\begin{aligned}
\|u_{tt}(t)\|_{L^2} &\overset{(2.52)}{=} \|dF(u(t))u_t(t) - Au_t(t)\|_{L^2} \\
&\leqslant \|dF(u(t))u_t(t)\|_{L^2} + \|Au_t(t)\|_{L^2} \\
&\overset{(2.2),(2.29)}{\leqslant} C(R_1)\|u_t(t)\|_{H^1} + C\|u_t(t)\|_{H^2} \\
&\overset{(2.43)}{\leqslant} C(R_1,R_2,t_0)\left[t^{\frac{1}{2}}+1\right]t^{-1} \\
&\leqslant C(R_1,R_2,t_0)\left[t_0^{\frac{1}{2}}+1\right]t^{-1} \\
&= C(R_1,R_2,t_0)t^{-1} \quad \forall\, t\in]0,t_0]
\end{aligned}
$$

Man beachte hierbei nachträglich, dass wir wegen (2.43) mit $s = 1$ die Aussage $u_t(t)\in H_0^1(\Omega)\ \forall\, t\in]0,t_0]$ erhalten, wodurch die Anwendung von (2.2) gerechtfertigt ist. Analog liefert uns (2.43) mit $s = 0,1,2$, dass $u_t(t)\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega) = \mathcal{D}(A)\ \forall\, t\in]0,t_0]$ gilt. Damit erfüllt $u_t(t)$ für jedes $t\in]0,t_0]$ die Normäquivalenz (2.29) für $l = 2$. Für die Existenz der Ableitung verweisen wir auf [14] (Lemma 3.5.1) und [20] (Lemma 2.2). Damit ist (2.44) gezeigt. □

2.8 Bemerkung. *i) Es folgt ohne weiteres aus (2.39) und (2.42) mit $s = 0$, dass unter den Voraussetzungen von Satz 2.7 die folgenden Aussagen gelten*

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|_{L^2} &\leqslant C(R_1,t_0) \quad \forall\, t\in [0,t_0]\ \forall\, u_0\in H_0^1(\Omega) \\
\|u(t)\|_{L^2} &\leqslant C(R_1,R_2,t_0) \quad \forall\, t\in [0,t_0]\ \forall\, u_0\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)
\end{aligned}
$$

ii) Aufgrund der Interpolationsabschätzung A.38 gelten die Aussagen (2.39) und (2.42) für alle $s\in\mathbb{R}$ mit $1\leqslant s\leqslant 2$ und die Aussagen (2.40) und (2.43) für alle $s\in\mathbb{R}$ mit $0\leqslant s\leqslant 2$.

Der Regularitätssatz 2.7 zeigt insbesondere, dass sowohl für glatte als auch für nichtglatte Anfangsdaten $u_t(t) \in L^2(\Omega)$ und $Au(t) \in L^2(\Omega)$ für $t > 0$ gilt. Damit ist jede Lösung der Integralgleichung (2.24) auch eine Lösung des nichtlinearen AWP's (2.20). Daher bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} &S : \mathbb{R}_+ \times H_0^1(\Omega) \supset \mathcal{D}(S) \longrightarrow H_0^1(\Omega) \quad \text{mit} \quad S(t)u_0 := u(t; u_0) \\ &\mathcal{D}(S) := \{(t, u_0) \in \mathbb{R}_+ \times H_0^1(\Omega) \mid t \in [0, T_{\max}(u_0)[\} \end{aligned} \tag{2.54}$$

den maximal fortgesetzten Lösungsoperator von (2.24), wobei $u(t; u_0)$ die eindeutige maximal fortgesetzte Lösung der Integralgleichung (2.24) mit maximalen Existenzintervall $[0, T_{\max}(u_0)[$ sei. Hierbei steht das S im nichtlinearen Lösungsoperator abkürzend für **solution operator**. Offenbar handelt es sich bei dem Operator S um einen in u_0 nichtlinearen Operator.

Wir fassen ein für später wichtiges Hauptresultat dieses Kapitels nochmals in einem Korollar zusammen ([32] Ass.2.3).

2.9 Korollar. *Zu jeder Anfangswertfunktion $u_0 \in B_R \subset H_0^1(\Omega)$ existiert eine eindeutige Lösung $S(t)u_0 \in H_0^1(\Omega)$ des obigen AWP's (2.20) mit maximalen Existenzintervall $[0, T_{\max}(u_0)[$. Weiter gilt für jede Anfangswertfunktion $u_0 \in B_R$ und für jeden Zeitpunkt $t \in]0, T_{\max}(u_0)[$, dass $S(t)u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ ist.*

Beweis. Die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung sowie das maximale Existenzintervall $[0, T_{\max}(u_0)[$ folgen allesamt aus Satz 2.6. Die Tatsache $u(t) = S(t)u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ für $t \in]0, T_{\max}(u_0)[$ folgt aus (2.39). □

2.5. Erweiterungen der Lösbarkeitstheorie

In diesem Abschnitt wollen wir abschließend einige Anmerkungen und Hintergrundinformationen zur Lösbarkeitstheorie zusammentragen.

Dimension des Bildraums: Die in Kapitel 2 behandelte Themen zur Lösbarkeit und zur Regularität des kontinuierlichen Problems gelten auch, wenn wir in der Generalvoraussetzung 2.1 die skalare Funktion f durch ein Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ersetzen. Dabei müssen wir demnach $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ fordern. In diesem Zusammenhang bezeichnet $|.|$ in (2.1) die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^n$. Der Rest der Voraussetzung wird in diesem Fall beibehalten ([17]) und alle erzielten Resultate lassen sich leicht verallgemeinern.

Glattheit des Gebiets: Man beachte, dass sich die Forderungen an unser Gebiet Ω nicht abschwächen lassen. Mit anderen Worten genügt die Forderung eines beschränkten Lipschitz-Gebiets für unsere Berechnungen nicht aus. Denn die elliptische Regularität aus Satz A.54, die in Abschnitt 2.3 eingeflossen ist, gilt bekanntlich ausschließlich auf beschränkten Gebieten mit C^2-Rand und damit nicht einmal auf polygonalen Gebieten. Fordern wir von dem polygonalen Gebiet zusätzlich die Konvexität, so ist Satz A.54 weiterhin erfüllt. Diese Tatsache begründet die Forderungen, die wir an unser Gebiet Ω gestellt haben.

Dimension des Gebiets: Die in diesem Kapitel behandelten Themen zur Lösbarkeit und zur Regularität gelten ausschließlich für Gebiete der Dimension $d = 1, 2$ oder 3 und somit nicht für höherdimensionale Gebiete mit $d > 3$. Diese Tatsache lässt sich leicht nachvollziehen und wir werden sie daher kurz herleiten und erläutern: Um die Beweise von Satz 2.2 für Dimensionen $d > 3$ zu verallgemeinern, muss an denjenigen Stellen Obacht gegeben werden, an denen wir Gebrauch von der Sobolevschen Ungleichung A.14 gemacht haben, da dort die Gebietsdimension für die Einbettungen eine zentrale Rolle spielt. Die Sobolevsche Ungleichung A.14 liefert uns für $d \geqslant 3$, $k = 1$ sowie für die

Funktionen $u, v \in H_0^1(\Omega)$ aus dem Beweis von Satz 2.2

$$d \geqslant 3 \quad \Longrightarrow \quad 1 = k < \frac{d}{2} \quad \Longrightarrow \quad u, v \in L^{\frac{2d}{d-2}}(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad p = q = \frac{2d}{d-2}$$

Allerdings muss im Beweis von Satz 2.2 für δ folgende Aussage gelten

$$\frac{1}{2} = \frac{\delta}{q} + \frac{1}{p} \quad \Longleftrightarrow \quad \delta = \frac{2}{d-2}$$

und in Folge dessen muss f die Generalvoraussetzung 2.1 mit $\delta = \frac{2}{d-2}$ erfüllen. Damit ist aber die Beschränktheit der Funktion f'' in unserer Generalvoraussetzung 2.1 im Punkt $u = 0$ für $d \geqslant 5$ nicht mehr garantiert, so dass unsere Theorie für $d \geqslant 5$ schlichtweg ungültig ist. Für $d = 4$ hingegen ist die Lösbarkeitstheorie weiterhin erfüllt, allerdings mit dem Nachteil, dass die Lösung ihre Stetigkeit bezüglich der Anfangsdaten verliert. Dazu betrachten wir den Einbettungssatz A.17. Nach dem Regularitätssatz 2.7 wissen wir von unserer Lösung $u(t)$, dass sie für $t > 0$ im Raum $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ liegt. Der Einbettungssatz A.17 garantiert uns $H^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ für $d = 1, 2, 3$ und damit $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ für $d = 1, 2, 3$. Damit ist unsere Lösung $u(t)$ für $t > 0$ stetig bezüglich der Anfangsdaten. Da die zweite Inklusion für $d = 4$ nicht mehr gilt sondern vielmehr $H^3(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ und daher $H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ erfüllt ist, unsere Lösung aber nicht im Raum $H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ liegt, können wir daraus schließen, dass die Lösungen $u(t)$ für $d = 4$ und $t > 0$ im Allgemeinen unstetig bezüglich der Anfangsdaten sind.

Generalvoraussetzungen: Die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (2.20) lässt sich auch unter anderen Generalvoraussetzungen zeigen. In [33] wird die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung $u \in C([0, T[\times L^2(\Omega), L^2(\Omega))$ für Anfangswertfunktionen $u_0 \in L^2(\Omega)$ unter der Annahme

$$f(u) = -\sum_{j=0}^{2p-1} b_j u^j$$

mit $b_{2p-1} > 0$ und $p \in \mathbb{N}$ gezeigt, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ mit $m \in \mathbb{N}$ ein offene beschränkte Menge ist. In [27] wird unter der Annahme, dass $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und

$$\begin{aligned} &-k - \alpha_1 |u|^p \leqslant f(u)u \leqslant k - \alpha_2 |u|^p \\ &f'(u) \leqslant l \end{aligned}$$

mit $u \in \mathbb{R}$, $k, l, \alpha_1, \alpha_2 > 0$ und $p > 2$ gezeigt, dass eine schwache Lösung $u \in C([0, T] \times L^2(\Omega), L^2(\Omega))$ für Anfangsdaten $u_0 \in L^2(\Omega)$ existiert, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ mit $m \in \mathbb{N}$ ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand ist. Man beachte, dass wir die Existenz und Eindeutigkeit zwar nur für Anfangswertfunktionen $u_0 \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ gezeigt haben, unsere Lösung deswegen aber glatter ist, da $u \in C([0, T[\times H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega))$ gilt.

Randbedingungen: Wir haben für das semilineare parabolische Anfangs-Randwertproblem (1.1) ausschließlich eine homogene Dirichlet-Randbedingung

$$u(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \quad (\textbf{homogene Dirichlet-Randbedingung})$$

gefordert. Es ist jedoch in der Tat möglich diese Randbedingung durch eine homogene Neumann-Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \quad (\textbf{homogene Neumann-Randbedingung})$$

oder durch eine homogene Robin-Randbedingung

$$u(x) + \frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \quad (\textbf{homogene Robin-Randbedingung})$$

zu ersetzen. Das hierdurch entstehende Problem kann auf dieselbe Weise behandelt werden, verlangt allerdings einige Modifikationen, was die Wahl von $V = H_0^1(\Omega)$, dem Finite-Elemente Raum $\mathcal{V}_h$ (dazu später) und der Bilinearform $a(.,.)$ im homogenen Dirchlet-Fall anbelangt ([12], [16]). Beispielsweise muss bei der homogenen Neumann-Randbedingung $V = H^1(\Omega)$ gewählt werden ([33]). Bei der Verwendung anderer Randbedingungen als die homogene Dirichlet-Randbedingung, sollte man Obacht bei der Anwendung der Greenschen-Formel A.40 geben, da dass Randintegral nicht null ist, und beachten, dass die Poincaré-Friedrichs-Ungleichung A.12 wegen der fehlenden Nullrandbedingung ungültig wird.

3. Räumliche Diskretisierung mit Finite-Elemente-Methode

In diesem Kapitel untersuchen wir die räumliche Diskretisierung semilinearer parabolischer Anfangs-Randwertprobleme sowie dessen Konvergenzverhalten unter Verwendung der Finite-Elemente-Methode (FEM). Dabei nehmen wir im gesamten Kapitel an, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein konvexes polygonales Gebiet der Dimension $d = 1, 2$ oder 3 ist. Zunächst werden wir in Abschnitt 3.1 die schwache Gleichung des nichtlinearen Operator-Anfangswertproblems herleiten und die Variationsformulierung einführen. In Abschnitt 3.2 konstruieren wir anschließend den Raum der stetigen und stückweise linearen finiten Elemente ([4], [6], [24], [31], [34]). In Abschnitt 3.3 verwenden wir diesen endlich dimensionalen Raum zur räumlichen Diskretisierung und formulieren das semidiskrete Galerkin-Verfahren. In Abschnitt 3.4 beweisen wir die lokale Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der mit finiten Elementen diskretisierten semilinearen parabolischen Differentialgleichung mit homogener Dirichlet-Randbedingung, indem wir wie zuvor ein Fixpunktargument anwenden ([17], [18]). In Abschnitt 3.5 zeigen wir im Anschluss daran sowohl für glatte als auch für nichtglatte Anfangsdaten einige konvergenztheoretische Resultate bezüglich der L^2- sowie bezüglich der H^1-Norm ([16], [17]). Abschließen werden wir das Kapitel in Abschnitt 3.6 mit einigen Erweiterungen zur Finite-Elemente-Methode.

3.1. Variationsformulierung

Es sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ eine beliebige Testfunktion, so liefert die Multiplikation von φ mit (2.20)

$$u_t \cdot \varphi + Au \cdot \varphi \;=\; F(u) \cdot \varphi \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Eine anschließende Integration über Ω ergibt

$$\begin{aligned}(u_t, \varphi)_{L^2} + (Au, \varphi)_{L^2} \;&=\; \int_\Omega u_t \cdot \varphi \, dx + \int_\Omega Au \cdot \varphi \, dx \;=\; \int_\Omega F(u) \cdot \varphi \, dx \\ &=\; (F(u), \varphi)_{L^2} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Greenschen Formel A.40 und der Nullrandbedingung für φ

$$\begin{aligned}(Au, \varphi)_{L^2} \;&= (-\sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \varphi)_{L^2} \;=\; -\sum_{i=1}^d (\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \varphi)_{L^2} \;=\; -\sum_{i=1}^d (-1)^1 \cdot (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i})_{L^2} \\ &= \sum_{i=1}^d (\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i})_{L^2} \;=\; (\nabla u, \nabla \varphi)_{L^2} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\end{aligned} \tag{3.1}$$

bekommen wir

$$(u_t, \varphi)_{L^2} + (\nabla u, \nabla \varphi)_{L^2} \;=\; (F(u), \varphi)_{L^2} \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Weiter wissen wir, dass nach Definition A.6 $H_0^1(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^1}}$ und desweiteren, dass $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $H_0^1(\Omega)$ liegt. Vergrößern wir nun den Raum der Testfunktionen $C_0^\infty(\Omega)$ zu dem Raum $H_0^1(\Omega)$ und nehmen die Anfangsbedingung aus (2.20) mit hinzu, so erhalten wir die **schwache Gleichung** von (2.20) ([16] Kap.2, [17] (2.1), [27] (8.16)):

$$\begin{aligned} (u_t, v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2} &= (F(u), v)_{L^2} \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega),\ t \in]0, T[\\ u(0) &= u_0 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad ,\ t = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Die **variationelle** oder **schwache Formulierung** von (2.20) besagt nun: Finde eine Funktion $u : [0, T[\longrightarrow H_0^1(\Omega)$, so dass u die Bedingung (3.2) erfüllt. Falls eine solche Lösung u existiert, so bezeichnen wir diese als **schwache Lösung** oder **Variationslösung** von (2.20). Folglich müssen wir von einer schwachen Lösung nicht fordern, dass sie zweimal räumlich differenzierbar ist. Wenn eine schwache Lösung u allerdings zu $C^2(\overline{\Omega})$ gehört, so handelt es sich tatsächlich um eine **klassische Lösung** von (2.20), da wir mittels partieller Integration von (3.2) auf (2.20) schließen können. Diese Berechnungen können auch für $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ durchgeführt werden. In diesem Fall, also wenn $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, sprechen wir von einer **starken Lösung** von (2.20). Anstatt nun eine solche schwache Lösung direkt zu berechnen, sind wir im Folgenden an einer Approximation u_h von u interessiert. Das Ziel ist es daher, eine Näherungslösung u_h von u zu finden. Zur Bestimmung dieser Approximation verwenden wir die Methode der finiten Elemente, die wir im kommenden Abschnitt einführen werden.

3.2. Der Finite-Elemente-Raum

In diesem Abschnitt führen wir den endlich-dimensionalen Raum der stückweise linearen finiten Elemente ein, den wir im nächsten Abschnitt zur räumlichen Diskretisierung des nichtlinearen AWP (2.20) verwenden werden. Wir verweisen speziell für diesen Abschnitt auf den Anhang A.5 sowie auf die Quellen [4], [6], [24] und [34]. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 1, 2, 3)$ ein konvexes polygonales Gebiet, also ein Intervall, falls $d = 1$, ein konvexes Polygon, falls $d = 2$, bzw. ein konvexes Polyeder, falls $d = 3$.

Es sei fortan $\mathcal{T}_h = \{T_h^{(1)}, \ldots, T_h^{(M_h)}\}$ eine reguläre Triangulierung von Ω nach Definition A.55 und A.56. Weiter verlangen wir, dass $\{\mathcal{T}_h\}_{0<h<1}$ eine uniforme Familie regulärer Triangulierungen von Ω gemäß Definition A.56 ist. Die Uniformität garantiert uns beispielsweise bei zweidimensionalen Gebieten, dass die Innenwinkel der Dreiecke beim Verfeinern - d.h. für kleiner werdende h - durch eine positive und von h unabhängige Konstante nach unten beschränkt sind. Allgemein garantiert uns die Uniformität, dass die Elemente beim Verfeinern nicht degenerieren, also keinen Dimensionsverlust aufweisen.

Es bezeichne $\mathcal{V}_h$ den Raum aller stetigen Funktionen auf $\overline{\Omega}$, die in jedem d-Simplex-Element $T_h^{(i)}$ aus der Triangulierung $\mathcal{T}_h$ linear sind und außerhalb von Ω verschwinden, d.h.

$$\mathcal{V}_h := \{\chi \in C(\overline{\Omega}) \mid \chi|_{T_h^{(i)}} \text{ ist linear } \forall\, i = 1, \ldots, M_h \text{ und } \chi(x) = 0\, \forall\, x \in \mathbb{R}^d \backslash \Omega\}$$

Weiter bezeichne $\{P_h^{(j)} \mid j = 1, \ldots, N_h\}$ die Menge der inneren Knoten (bzw. Eckpunkte) der Triangulierung $\mathcal{T}_h$, also diejenigen, die nicht auf $\partial\Omega$ liegen (Abb. A.1). Eine Funktion in $\mathcal{V}_h$ ist somit durch die Werte in den Knoten $P_h^{(j)}$ eindeutig bestimmt und hängt daher nur von N_h Parametern ab. Die Randknoten können wir unberücksichtigt lassen, da eine Lösung - wegen der Dirichlet-Nullrandbedingung - in den äußeren Knoten den Wert 0 haben muss.

Wir bilden als nächstes eine Basis des **Finite-Elemente-Raums** $\mathcal{V}_h$: Dazu sei Λ_j die sogenannte **Pyramidenfunktion** (bzw. **Hutfunktion**), also diejenige Funktion in $\mathcal{V}_h$, die in dem Knoten $P_h^{(j)}$ den Wert 1 und in den übrigen Knoten den Wert 0 annimmt, d.h.

$$\Lambda_j(P_h^{(i)}) := \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{falls } i = j \\ 0 & , \text{falls } i \neq j \end{cases} \qquad \forall\, i, j = 1, \ldots, N_h$$

Damit erhalten wir zusammengefasst das folgende Lemma.

3.1 Lemma.

(1): Jedes Element $\chi \in \mathcal{V}_h$ besitzt eine eindeutige Darstellung durch

$$\chi(x) = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \Lambda_j(x) \quad \text{mit} \quad \alpha_j = \chi(P_h^{(j)})$$

*daher bildet $\{\Lambda_j \mid j = 1, \ldots, N_h\}$ eine Basis von $\mathcal{V}_h$, die sogenannte **Lagrange-Basis**, und es gilt $\dim \mathcal{V}_h = N_h$*

(2): $\mathcal{V}_h$ ist ein linearer Teilraum von $H_0^1(\Omega)$.

Beweis. *zu (1):*

1. z.z.: Gültigkeit der Darstellung. Da die Funktionen χ und die rechte Seite $\sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \Lambda_j(x)$ aufgrund von $\Lambda_j(P_h^{(i)}) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, N_h)$ auf den Knoten übereinstimmen

$$\chi(P_h^{(i)}) = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \Lambda_j(P_h^{(i)}) = \alpha_i \Lambda_i(P_h^{(i)}) = \alpha_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, N_h$$

und dazwischen in jedem Element $T_{h,i}$ $(i = 1, \ldots, M_h)$ linear und stetig sind, stimmen die Funktionen überein.

2. z.z.: Eindeutigkeit. Seien $\chi = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \Lambda_j(x)$ und $\chi = \sum_{j=1}^{N_h} \beta_j \Lambda_j(x)$ zwei Darstellungen für $\chi \in \mathcal{V}_h$, dann gilt

$$\sum_{j=1}^{N_h} (\alpha_j - \beta_j) \Lambda_j(x) = 0 \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}$$

Insbesondere gilt daher in den inneren Knoten $(\alpha_j - \beta_j)\Lambda_j(P_h^{(j)}) = 0$ und wegen $\Lambda_j(P_h^{(i)}) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, N_h)$ folgt $\alpha_j - \beta_j = 0$ für alle $j = 1, \ldots, N_h$.

zu (2):

1. z.z.: $\mathcal{V}_h \subset H^1(\Omega)$. Sei $\chi \in \mathcal{V}_h$, dann gilt insbesondere $\chi \in C(\overline{\Omega})$ und $\chi \in H^1(\Omega)$ folgt aus Satz A.8 mit $k = 1$.

2. z.z.: $\mathcal{V}_h \subset H_0^1(\Omega)$. Sei $\chi \in \mathcal{V}_h$, dann gilt $\chi = 0$ auf $\partial\Omega$ und wegen 1. $\chi \in C(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$. Damit folgt $\chi \in H_0^1(\Omega)$ aus dem Spursatz A.10 und Satz A.11.

□

Daher können wir jetzt eine gegebene glatte Funktion $v \in C(\overline{\Omega})$, die auf $\partial\Omega$ verschwindet, beispielsweise mithilfe des **Interpolationsoperators** $I_h : C(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{V}_h$ approximieren. Die Abbildung I_h weist der Funktion v dabei denjenigen eindeutig bestimmten Vertreter $I_h v$ aus dem Raum $\mathcal{V}_h$ zu, dessen Funktionswerte in den inneren Knoten $P_h^{(j)}$ von $\mathcal{T}_h$ mit denen von v übereinstimmen, d.h.

$$I_h v(x) := \sum_{j=1}^{N_h} v(P_h^{(j)}) \Lambda_j(x) \tag{3.3}$$

Aufgrund des Einbettungssatzes A.17 (mit $k = 2$ und $d = 1, 2, 3$) gilt $H^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, so dass sich der Interpolationsoperator für Gebiete der Dimension $d \leqslant 3$ auf $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ einschränken lässt.

3.2 Definition. *Die Abbildung I_h definiert durch*

$$I_h : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathcal{V}_h \ \text{ mit } \ v(x) \longmapsto I_h v(x) := \sum_{j=1}^{N_h} v(P_h^{(j)})\Lambda_j(x)$$

heißt ***Interpolationsoperator*** *auf $\mathcal{V}_h$.*

In unserem Fall, dem Fall der stückweisen linearen Funktionen, lassen sich für den Interpolationsoperator $I_h : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathcal{V}_h$ in allen drei Gebietsdimensionen $d = 1, 2, 3$ die folgenden lokalen Fehlerabschätzungen zeigen.

3.3 Satz (INTERPOLATIONSABSCHÄTZUNGEN). *Es sei $\{\mathcal{T}_h\}_{0<h<1}$ eine uniforme Familie regulärer Triangulierungen von Ω. Dann gilt:*

(1): $\forall\, v \in C(\overline{\Omega})$ *mit* $v = 0$ *auf* $\partial\Omega\ \exists_1\, \Psi := I_h v \in \mathcal{V}_h$:

$$\Psi(P_h^{(j)}) = v(P_h^{(j)}) \quad \forall\, j = 1, \ldots, N_h$$

(2):

$$\|I_h v - v\|_{L^2(T)} \leqslant C_T h_T^2 \|v\|_{H^2(T)} \qquad \forall\, T \in \mathcal{T}_h\ \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

$$\|\nabla(I_h v - v)\|_{L^2(T)} \leqslant C_T h_T \|v\|_{H^2(T)} \qquad \forall\, T \in \mathcal{T}_h\ \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

(3):

$$\|I_h v - v\|_{L^2} \leqslant C h^2 \|v\|_{H^2} \qquad \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \tag{3.4}$$

$$|I_h v - v|_{H^1} = \|\nabla(I_h v - v)\|_{L^2} \leqslant C h \|v\|_{H^2} \qquad \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \tag{3.5}$$

Beweis. *zu (1):*

1. z.z.: Existenz. Wähle $\Psi(x) := \sum_{i=1}^{N_h} \alpha_j \Lambda_j(x)$ mit $\alpha_j = v(P_h^{(j)})$ $(j = 1, \ldots, N_h)$, dann gilt wegen $\Lambda_j(P_h^{(i)}) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, N_h)$

$$\Psi(P_h^{(i)}) = \sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j \Lambda_j(P_h^{(i)}) = \alpha_i \Lambda_i(P_h^{(i)}) = \alpha_i = v(P_h^{(i)}) \quad \forall\, i = 1, \ldots, N_h$$

2. z.z.: Eindeutigkeit. Seien $\Psi, \tilde{\Psi} \in \mathcal{V}_h$ mit $\Psi(P_h^{(j)}) = v(P_h^{(j)}) = \tilde{\Psi}(P_h^{(j)})$ $(j = 1, \ldots, N_h)$, dann gilt $\Psi = \tilde{\Psi}$ nach Lemma 3.1(1).

zu (2): Die Beweise folgen allesamt aus dem Bramble-Hilbert-Lemma und können in [6], [13] (Satz 91.6) und [24] (3.4.1) nachgelesen werden.
zu (3): (siehe [6] und speziell für $d = 2$ siehe [13]) Aus der Uniformität unserer Triangulierung folgt, dass die Konstanten C_T gleichmäßig beschränkt sind, so dass wir die globalen Fehlerabschätzungen

$$\begin{aligned} \|I_h v - v\|_{L^2(\Omega)} &= \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|I_h v - v\|_{L^2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} C_T^2 h_T^4 \|v\|_{H^2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant C h^2 \|v\|_{H^2(\Omega)} \quad \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ \|\nabla(I_h v - v)\|_{L^2(\Omega)} &\leqslant C h \|v\|_{H^2(\Omega)} \quad \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

erhalten. □

Die Aussagen (3.4) und (3.5) werden häufig zusammengefasst geschrieben

$$\|I_h v - v\|_{L^2} + h|I_h v - v|_{H^1} \leqslant C h^2 \|v\|_{H^2} \quad \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \tag{3.6}$$

und als **Interpolationsabschätzung** bezeichnet.

3.4 Bemerkung. *Man beachte, dass die Konvexität von Ω für den Beweis der Interpolationsabschätzung (3.6) und daher für den Beweis von (3.4) und (3.5) entscheidend ist. Weiter sei darauf hingewiesen, dass die Ungleichung (3.6) für Dimensionen $d > 3$ bei linearen Finite-Elementen nicht mehr gilt. Um für höherdimensionale Gebiete mit $d > 3$ dennoch eine derartige Abschätzung wie in (3.6) zu erhalten, müssen wir anstelle der linearen andere finite Elemente wählen ([6]).*

3.3. Semidiskretisierung mit finiten Elementen

Wir haben zunächst den Funktionenraum $H_0^1(\Omega)$ durch eine Familie endlich-dimensionaler Teilräume $\{\mathcal{V}_h \mid h \in I\}$ ersetzt, d.h. $\mathcal{V}_h \subset H_0^1(\Omega)$ und $\dim \mathcal{V}_h = N_h < \infty$ für alle maximalen Gitterweiten $h \in I$ mit $0 < h < 1$. Man beachte hierbei, dass jedes $\mathcal{V}_h$ eine räumliche Diskretisierung, d.h. Zerlegung, des Raumes $H_0^1(\Omega)$ ist und die Zeit weiterhin kontinuierlich bleibt. Daher bezeichnet man ein solches Verfahren auch häufig als **Semidiskretisierung**. Das **semidiskrete Galerkin-Verfahren** (oder: **Liniensystem**) für (2.20) besagt nun ([16] (2.7), [17] (2.2), [34] (14.3)): Finde eine Funktion $u_h : [0,T[\longrightarrow \mathcal{V}_h$, so dass u_h die Bedingung

$$\begin{aligned} ((u_h)_t, \chi)_{L^2} + (\nabla u_h, \nabla \chi)_{L^2} &= (F(u_h), \chi)_{L^2} \quad \forall\, \chi \in \mathcal{V}_h,\ t \in]0,T[\\ u_h(0) &= u_{h0} \qquad\qquad\qquad\quad ,\ t = 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

erfüllt, wobei $u_{h0} \in \mathcal{V}_h$ eine geeignet gewählte Approximation von u_0 sei, z.B. mittels des Interpolationsoperators $u_{h0} = I_h u_0$. Falls $u_h(t)$ eine Lösung von (3.7) ist, so nennt man $u_h(t)$ eine **Galerkin-Näherungslösung** von (3.7). Im Folgenden sei $S(t)u_0 := u(t; u_0)$ die in (2.54) definierte und nach Satz 2.6 eindeutig bestimmte Lösung von (2.20). Dann löst $S(t)u_0$ fortan die schwache Gleichung (3.2). Wir definieren nun durch

$$a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad a(u,v) := (\nabla u, \nabla v)_{L^2} \tag{3.8}$$

eine Bilinearform. Es lässt sich leicht zeigen, dass a eine stetige, symmetrische und H_0^1-elliptische Bilinearform auf $H^1(\Omega)$ ist (siehe: Beispiel im Anhang A.5.a).

Wir suchen als nächstes für die Approximation $u_h(t)$ ähnlich wie in (2.24) eine Darstellung in Form einer Integralgleichung. Dazu müssen wir zunächst unseren Differentialoperator $A := -\triangle$ auf dem Raum der stetigen und stückweise linearen finiten Elemente $\mathcal{V}_h$ erklären. Der für unsere Zwecke nützliche lineare **diskrete negative Laplace-Operator** $A_h = -\triangle_h$ ist gegeben durch ([16] Kap.2, [17] (2.3), [21] (10.6), [34] (1.33))

$$A_h : \mathcal{V}_h \longrightarrow \mathcal{V}_h \quad \text{mit} \quad (A_h\psi, \chi)_{L^2} = a(\psi,\chi)\ \forall\, \chi \in \mathcal{V}_h \tag{3.9}$$

Auf diese Weise lässt sich das semidiskrete homogene lineare AWP schreiben als

$$\begin{aligned} (u_h)_t + A_h u_h &= 0 \qquad ,\ t \in]0,T[\\ u_h(0) &= u_{h0} \qquad ,\ t = 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

3.5 Satz. *(1): Der diskrete negative Laplace-Operator*

$$A_h := -\triangle_h :\ L^2(\Omega) \supset \mathcal{D}(A_h) = \mathcal{V}_h \longrightarrow R(A_h) = \mathcal{V}_h \quad \textit{mit} \quad (A_h\psi, \chi)_{L^2} = a(\psi,\chi)\ \forall\, \chi \in \mathcal{V}_h$$

ist ein linearer, positiver, selbstadjungierter und symmetrischer Operator (uniform in h). Die Linearität folgt dabei aus der Bilinearität der Bilinearform a und die letzten drei Eigenschaften lassen sich beispielsweise mithilfe der Massenmatrix beweisen ([31], [34]).
(2): Da A_h linear ist, existiert ein Orthonormalsystem $\{\varphi_{hj} \mid j = 1, \dots, N_h\}$ von $\mathcal{V}_h$ sowie eine

abzählbar endliche Folge positiver (da A_h positiv) reeller (da A_h selbstadjungiert) Eigenwerte $\{\lambda_{hj} \mid j = 1, \dots, N_h\}$ mit

$$0 < \lambda_{h1} < \lambda_{h2} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{hN_h}$$

Die zugehörigen Eigenfuktionen $\{\varphi_{hj} \mid j = 1, \dots, N_h\}$ erfüllen das semidiskrete elliptische Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} A_h \varphi_{hj}(x) &= \lambda_{hj}\varphi_{hj}(x) \qquad , x \in \Omega \quad \forall\, j = 1, \dots, N_h \quad (\textbf{\textit{semidiskrete Helmholtz-Gleichung}}) \\ \varphi_{hj}(x) &= 0 \qquad , x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Da der endlich dimensionale Vektorraum $\mathcal{V}_h$ eine abzählbare Basis besitzt und da A_h positiv ist, können die zugehörigen Eigenfunktionen $\{\varphi_{hj} \mid j = 1, \dots, N_h\}$ des Orthonormalsystems so ergänzt werden, dass sie eine Orthonormalbasis von $\mathcal{V}_h$ bilden. Weiter lässt sich A_h (da A_h selbstadjungiert) darstellen durch

$$A_h u_h = \sum_{j=1}^{N_h} \lambda_{hj} \cdot (u_h, \varphi_{hj})_{L^2} \cdot \varphi_{hj} \quad \forall\, u_h \in \mathcal{D}(A_h) = \mathcal{V}_h \quad (\textbf{\textit{Spektraldarstellung}})$$

Somit nimmt A_h eine Diagonalgestalt an, d.h.

$$u_h = \sum_{j=1}^{N_h} (u_h, \varphi_{hj})_{L^2} \cdot \varphi_{hj} \in \mathcal{D}(A_h) = \mathcal{V}_h \quad \Longrightarrow \quad A_h u_h = \sum_{j=1}^{N_h} \lambda_{hj} \cdot (u_h, \varphi_{hj})_{L^2} \cdot \varphi_{hj} \tag{3.11}$$

*(3): Für den Operator A_h lässt sich die **Matrixexponentialreihe***

$$e^{A_h} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_h^n}{n!}$$

definieren. Da A_h ein positiver symmetrischer Operator mit kompakter Inverser ist, folgt aus dieser Definition

$$e^{-tA_h} v_h = \sum_{j=1}^{N_h} e^{-t\lambda_{hj}} v_h = \sum_{j=1}^{N_h} e^{-t\lambda_{hj}} \cdot (v_h, \varphi_{hj})_{L^2} \cdot \varphi_{hj}$$

Insbesondere ist $-A_h$ der infinitesimale Erzeuger der C^0-Halbgruppe

$$e^{-tA_h} : \mathcal{V}_h \longrightarrow \mathcal{V}_h \quad \text{mit} \quad v_h \longmapsto e^{-tA_h} v_h$$

Das semidiskrete homogene lineare AWP (3.10) besitzt daher die Lösung ([16] Kap.2, [17] Kap.2, [34] Kap.3)

$$E_h(t)u_{h0} := u_h(t; u_{h0}) := e^{-tA_h} u_h(0) = e^{-tA_h} u_{h0} = \sum_{j=1}^{N_h} e^{-t\lambda_{hj}} \cdot (u_{h0}, \varphi_{hj})_{L^2} \cdot \varphi_{hj} \tag{3.12}$$

Da wir auch hier nicht die gesamte Theorie linearer parabolischer Probleme unter Finite-Elemente-Diskretisierung aufgreifen und behandeln möchten, verweisen wir für eine ausführliche Herleitung der Lösung E_h in (3.12) von (3.10) erneut auf die Quellen [31] und [34]. Wir wollen nun das semidiskrete nichtlineare AWP betrachten. Da aber $F(u_h) \in L^2(\Omega)$ für $u_h \in \mathcal{V}_h \subset H_0^1(\Omega)$ gilt, benötigen wir vorab noch einen weiteren Operator, der die Funktion $F(u_h)$ geeignet in unseren Finite Elemente Raum $\mathcal{V}_h$ projiziert. Unter Verwendung des **orthogonalen Operators** P_h auf $L^2(\Omega)$ ([16] Kap.2, [17] (2.3))

$$P_h : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathcal{V}_h \quad \text{mit} \quad (P_h g, \chi)_{L^2} = (g, \chi)_{L^2} \; \forall\, \chi \in \mathcal{V}_h \tag{3.13}$$

der definitionsgemäß die beste Approximation von g in der L^2-Norm ist und daher

$$\|P_h v - v\|_{L^2} \leqslant \|I_h v - v\|_{L^2} \overset{(3.6)}{\leqslant} Ch^2 \|v\|_{H^2} \quad \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

erfüllt, sind wir nun in der Lage, das nichtlineare AWP in semidiskreter Form zu formulieren ([16] (2.8), [17] (2.4))

$$\begin{aligned} (u_h)_t + A_h u_h &= P_h F(u_h) \quad &, t \in]0, T[\\ u_h(0) &= u_{h0} &, t = 0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Als nächstes werden wir uns analog zum kontinuierlichen Fall eine Lösungsdarstellung für (3.14) herleiten. Dazu multiplizieren wir (3.14) mit dem Integrationsfaktor e^{tA_h} und erhalten für $t > 0$

$$\begin{aligned} \left(e^{tA_h} u_h(t)\right)_t &= e^{tA_h}(u_h(t))_t + A_h e^{tA_h} u_h(t) \;=\; e^{tA_h}(u_h(t))_t + e^{tA_h} A_h u_h(t) \\ &= e^{tA_h}((u_h(t))_t + A_h u_h(t)) \;=\; e^{tA_h} P_h F(u_h(t)) \end{aligned}$$

Integration von 0 bis t liefert

$$e^{tA_h} u_h(t) \;=\; e^{0A_h} u_{h0} + \int_0^t e^{sA_h} P_h F(u_h(s))\, ds \;=\; u_{h0} + \int_0^t e^{sA_h} P_h F(u_h(s))\, ds$$

und anschließende Multiplikation mit e^{-tA_h}

$$u_h(t) \;=\; e^{-tA_h} e^{tA_h} u_h(t) \;=\; e^{-tA_h} u_{h0} + \int_0^t e^{-(t-s)A_h} P_h F(u_h(s))\, ds$$

Insgesamt haben wir hier die Eigenschaften ausgenutzt, dass $e^{-tA_h} e^{sA_h} = e^{-(t-s)A_h}$, $e^{0A_h} = I$, e^{tA_h} linear in $\mathcal{V}_h$, e^{tA_h} differenzierbar bzgl. t und $A_h e^{tA_h} = e^{tA_h} A_h$ gilt, die allesamt aus den Eigenschaften von A_h und der Matrix-Exponentialfunktion resultieren ([31] Kap.7). Mit der Operatornotation für die homogene lineare Lösung $E_h(t) = e^{-tA_h}$ erhalten wir als Lösungsdarstellung für das nichtlineare AWP (3.14) die folgende semidiskrete Integralgleichung

$$u_h(t; u_{h0}) \;=\; E_h(t) u_{h0} + \int_0^t E_h(t-s) P_h F(u_h(s))\, ds \quad \forall\, t \geqslant 0 \tag{3.15}$$

Wir werden auch in diesem Kapitel hauptsächlich mit der Integralgleichung (3.15) anstelle von (3.14) arbeiten.

Die Fragen, die wir auch an dieser Stelle klären sollten, lauten: Ist die semidiskrete Integralgleichung (3.15) eindeutig lösbar in $\mathcal{V}_h$? Falls sie es ist, so sind $(u_h(t))_t$ und $A_h u_h(t)$ auch definiert und die Lösung der semidiskreten Integralgleichung (3.15) löst das zugehörige AWP (3.14). Weiter sollten wir uns fragen, ob die Lösung der Integralgleichung (3.15) für $h \longrightarrow 0$ gegen die exakte Lösung konvergiert, also gegen die Lösung der Integralgleichung (2.24). Mit der Klärung dieser Fragen werden wir uns in den nächsten zwei Abschnitten näher befassen.

3.4. Existenz und Eindeutigkeit

Für den Beweis der Existenz und Eindeutigkeit einer räumlichen Approximation $u_h : [0, T[\longrightarrow \mathcal{V}_h$ für die Integralgleichung (3.15) benötigen wir vorab noch einige Abschätzungen - sogenannte *semidiskrete Glättungseigenschaften* - bezüglich der Lösung (3.12) des semidiskreten homogenen linearen AWP's (3.10) ([16] Kap.2, [17] Abs.2.1). Dazu gehen wir völlig analog wie im kontinuierlichen Fall vor. Es bezeichne auch hier $A_h = -\triangle_h$ den diskreten negativen Laplace-Operator aus (3.9). Mithilfe der

Darstellung (3.11) und der Tatsache, dass der Operator A_h positiv ist, können wir nun **gebrochene Potenzen** A_h^α von A_h für $\alpha \in \mathbb{R}$ einführen:

$$\begin{aligned} A_h^\alpha v_h &:= \sum_{j=1}^{N_h} \lambda_{hj}^\alpha \cdot (v_h, \varphi_{hj})_{L^2} \cdot \varphi_{hj} \\ \mathcal{D}(A_h^\alpha) &= \{v_h \in \mathcal{V}_h \mid \|A_h^\alpha v_h\|_{L^2} < \infty\} \end{aligned}$$

Wir vermerken an dieser Stelle, dass A_h ein auf $L^2(\Omega)$ sektorieller Operator entsprechend der Definition A.37 ist ([12] Sec.6-7), d.h. es gilt

$$\exists\, \theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[\;\wedge\; \exists\, M > 0: \;\|(\lambda I + A_h)^{-1} v_h\|_{L^2} \leqslant \frac{M}{|\lambda|} \quad \forall\, \lambda \in S_{0,\theta}\; \forall\, v_h \in \mathcal{V}_h$$

Wir kommen nun zu einem diskreten Analogon von Lemma 2.4 ([16] Kap.2, [17] Kap.2.1).

3.6 Lemma.

$$\text{(1): } c \cdot \|v_h\|_{H^1} \leqslant \|A_h^{\frac{1}{2}} v_h\|_{L^2} = \sqrt{a(v_h, v_h)} = \|A^{\frac{1}{2}} v_h\|_{L^2} \leqslant C \cdot \|v_h\|_{H^1} \quad \forall\, v_h \in \mathcal{V}_h \tag{3.16}$$

$$\text{(2): } c \cdot \|v_h\|_{H^{-1}} \leqslant \|A_h^{-\frac{1}{2}} v_h\|_{L^2} \leqslant C \cdot \|v_h\|_{H^{-1}} \quad \forall\, v_h \in \mathcal{V}_h \tag{3.17}$$

$$\text{(3): } \|D_t^l E_h(t) v_h\|_{L^2} = \|A_h^l E_h(t) v_h\|_{L^2} \leqslant C_l \cdot t^{-l} \cdot \|v_h\|_{L^2} \quad \forall\, v_h \in \mathcal{V}_h,\; t > 0,\; l \geqslant 0 \tag{3.18}$$

$$\text{(4): } \|A_h^\alpha E_h(t) v_h\|_{L^2} = \|E_h(t)(A_h^\alpha v)\|_{L^2} \quad \forall\, t \geqslant 0, \forall\, v_h \in \mathcal{V}_h, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$$

Beweis. *zu (1):* Da $\mathcal{V}_h \subset H_0^1(\Omega)$ gilt, folgen die Ungleichungen direkt aus (2.29). Es bleibt die Gleichheit zu zeigen. Diese folgt leicht aus (3.8), (3.9), $A = -\triangle$ und der Bilinearität von $(.,.)_{L^2}$

$$\begin{aligned} \|A_h^{\frac{1}{2}} v_h\|_{L^2}^2 &= (A_h^{\frac{1}{2}} v_h, A_h^{\frac{1}{2}} v_h)_{L^2} = (A_h v_h, v_h)_{L^2} \overset{(3.9)}{=} a(v_h, v_h) \overset{(3.8)}{=} (\nabla v_h, \nabla v_h)_{L^2} \\ &= (A^{\frac{1}{2}} v_h, A^{\frac{1}{2}} v_h)_{L^2} = \|A^{\frac{1}{2}} v_h\|_{L^2}^2 \quad \forall\, v_h \in \mathcal{V}_h \end{aligned}$$

zu (2): Da $\mathcal{V}_h \subset H_0^1(\Omega)$ und nach Teil (1) $\|A_h^{\frac{1}{2}} v_h\|_{L^2} = \|A^{\frac{1}{2}} v_h\|_{L^2}$ gilt, folgt die Behauptung direkt aus dem Beweis von (2.30).
zu (3) und (4): Wir übernehmen den Beweis von (2.31) und (2.32) wortwörtlich und ersetzen dabei E, λ_i, φ_i durch $E_h, \lambda_{hi}, \varphi_{hi}$ $(i = 1, \ldots, N_h)$, woraus die Behauptung folgt. Man beachte, dass aus den unendlichen endliche Summen werden. □

Damit können wir jetzt eine diskrete Glattheitseigenschaft für den Operator E_h formulieren ([16] (2.13),(3.12), [17] (2.6),(2.7),(2.8)). Man beachte hierbei, dass die obere Grenze von b nur noch 1 ist. Das liegt daran, dass die Finite-Elemente-Lösung u_h aus dem Raum $\mathcal{V}_h \subset H_0^1(\Omega)$ stammt und im Allgemeinen nicht aus dem Raum $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Doch dank des speziellen **Gelfand-Dreiers** $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ (A.1.b) gelten die übrigen Ungleichungen weiterhin.

3.7 Lemma (GLÄTTUNGSEIGENSCHAFTEN VON E_h). *(1): Für jedes $l \in \{0, 1\}$ und für jedes $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $-1 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$ gibt es eine Konstante $C = C(l, a, b) > 0$, so dass die Abschätzung*

$$\|D_t^l E_h(t) v_h\|_{H^b} \leqslant C \cdot t^{-l-\frac{(b-a)}{2}} \cdot \|v_h\|_{H^a} \quad \forall\, v_h \in \mathcal{V}_h\; \forall\, t > 0 \tag{3.19}$$

erfüllt ist. Falls $l = 0$ und $a = b$, so gilt die Ungleichung (3.19) für $t \geqslant 0$.
(2): Die orthogonale Projektion P_h ist stabil auf $L^2(\Omega)$, d.h. es gilt

$$\|P_h f\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^2} \quad \forall\, f \in L^2(\Omega) \tag{3.20}$$

(3): Desweiteren gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass die Abschätzung

$$\|A_h^{-\frac{1}{2}} P_h f\|_{L^2} \leqslant C \cdot \|f\|_{H^{-1}} \quad \forall\, f \in L^2(\Omega) \tag{3.21}$$

gilt.

Beweis. *zu (1):* Der Beweis folgt nun direkt aus (3.16) falls $b = 1$, (3.17) falls $b = -1$ sowie (3.18) und lässt sich wortwörtlich von (2.33) übernehmen.

$$\|D_t^l E_h(t) v_h\|_{H^b} \overset{(3.16),(3.17)}{\leqslant} C \cdot \|A_h^{\frac{b}{2}} D_t^l E_h(t) v_h\|_{L^2} \overset{(3.18)}{=} C \cdot \|A_h^{l+\frac{b}{2}} E_h(t) v_h\|_{L^2}$$
$$= C \cdot \|A_h^{l+\frac{(b-a)}{2}} E_h(t)(A_h^{\frac{a}{2}} v_h)\|_{L^2} \overset{(3.18)}{\leqslant} C \cdot t^{-t-\frac{(b-a)}{2}} \cdot \|A_h^{\frac{a}{2}} v_h\|_{L^2} \overset{(3.16),(3.17)}{\leqslant} C \cdot t^{-t-\frac{(b-a)}{2}} \cdot \|v_h\|_{H^a}$$

Die Begründung, weswegen in unserer Berechnung der Operator $A_h^{\frac{a}{2}}$ mit dem Operator $E_h(t)$ kommutiert, können wir ebenso von (2.33) übernehmen, indem wir E durch E_h, λ_i durch λ_{hi} sowie φ durch φ_{hi} $(i = 1, \ldots, N_h)$ ersetzen.
zu (2): Sei $f \in L^2(\Omega)$ beliebig. Wegen (3.13) gilt.

$$(P_h f, \chi)_{L^2} = (f, \chi)_{L^2} \quad \forall \chi \in \mathcal{V}_h$$

Setze $\chi := P_h f \in \mathcal{V}_h$, so erhalten wir mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung A.41

$$\|P_h f\|_{L^2}^2 = |(P_h f, P_h f)_{L^2}| \overset{(3.13)}{=} |(f, P_h f)_{L^2}| \overset{A.41}{\leqslant} \|f\|_{L^2} \cdot \|P_h f\|_{L^2} \quad \forall f \in L^2(\Omega)$$

Division durch $\|P_h f\|_{L^2}$ liefert das behauptete Ergebnis.
zu (3): Sei $f \in L^2(\Omega)$ beliebig. Aus (3.13), (3.16), $\mathcal{V}_h \subset H_0^1(\Omega)$ und der Selbstadjungiertheit von A_h folgt durch

$$\|A_h^{-\frac{1}{2}} P_h f\|_{L^2} = \sup_{\chi \in \mathcal{V}_h} \frac{|(A_h^{-\frac{1}{2}} P_h f, \chi)_{L^2}|}{\|\chi\|_{L^2}} = \sup_{\chi \in \mathcal{V}_h} \frac{|(P_h f, (A_h^*)^{-\frac{1}{2}} \chi)_{L^2}|}{\|\chi\|_{L^2}}$$
$$\overset{A_h \text{ selbstadj.}}{=} \sup_{\chi \in \mathcal{V}_h} \frac{|(P_h f, A_h^{-\frac{1}{2}} \chi)_{L^2}|}{\|\chi\|_{L^2}} \overset{(3.13)}{=} \sup_{\chi \in \mathcal{V}_h} \frac{|(f, A_h^{-\frac{1}{2}} \chi)_{L^2}|}{\|\chi\|_{L^2}} = \sup_{\psi \in \mathcal{V}_h} \frac{|(f, \psi)_{L^2}|}{\|A_h^{\frac{1}{2}} \psi\|_{L^2}}$$
$$\overset{(3.16)}{\leqslant} C \cdot \sup_{\psi \in \mathcal{V}_h} \frac{|(f, \psi)_{L^2}|}{\|\psi\|_{H^1}} \overset{\mathcal{V}_h \subset H_0^1(\Omega)}{\leqslant} C \cdot \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{|(f, v)_{L^2}|}{\|v\|_{H^1}} = C \cdot \|f\|_{H^{-1}} \quad \forall f \in L^2(\Omega)$$

die Behauptung. □

Aufgrund dieser Abschätzungen lässt sich der Beweis des folgenden Existenz und Eindeutigkeitssatzes für den semidiskreten Fall wortwörtlich von seinem Vorgänger im kontinuierlichen Fall (Satz 2.6) übernehmen ([16] Theo.2.2, [17] Theo.2.1).

3.8 Satz (EXISTENZ- UND EINDEUTIGKEITSSATZ). *(1): Für jeden Radius $R > 0$ gibt es einen Zeitpunkt $0 < T(R) < \infty$, so dass die Integralgleichung (3.15) für jede Anfangswertfunktion $u_{h0} \in \mathcal{V}_h$ mit $\|u_{h0}\|_{H^1} \leqslant R$ eine eindeutige Lösung $u_h \in C([0, T(R)], \mathcal{V}_h)$ besitzt.*
(2): Weiter existiert eine (von h unabhängige) Konstante $C > 0$ mit der Eigenschaft

$$\|u_h\|_{L^\infty([0,T(R)],\mathcal{V}_h)} \leqslant C \cdot R$$

(3): Seien $u_{h0} \in \mathcal{V}_h$, $\rho > 0$ und $T > 0$ gegeben. Falls für jede Lösung $u_h(t)$ auf $[0, \tau] \subset [0, T]$ von (3.15) die a-priori Abschätzung

$$\|u_h(t)\|_{H^1} \leqslant \rho \quad \forall 0 \leqslant t \leqslant \tau$$

gilt, so existiert eine eindeutige Lösung $u_h(t)$ von (3.15) auf dem Intervall $[0, T]$.

Beweis. Tauschen wir im Beweis von Satz 2.6 $S, E, u_0, u, H_0^1(\Omega)$ bzw. F durch $S_h, E_h, u_{h0}, u_h, \mathcal{V}_h$ bzw. $P_h F$ aus, so lässt sich der Beweis wortwörtlich übernehmen. Dabei ersetze man (2.33) durch (3.19) und beachte, dass (3.20) zusätzlich benötigt wird. Insbesondere stimmt die Konstante $T(R)$ aus diesem Beweis mit dem $T(R)$ aus dem Beweis von Satz 2.6 überein. □

Aufgrund des Satzes 3.8 und der aus der Konstruktion des FE-Raums resultierenden Inklusion $\mathcal{V}_h \subset H_0^1(\Omega)$ gilt $u_h(t) \in \mathcal{V}_h$ und daher $A_h u_h(t) \in \mathcal{V}_h \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ für $t > 0$. Desweiteren folgt $u_h \in C([0,T[,\mathcal{V}_h) \subset C([0,T[,H_0^1(\Omega))$ und daher folgt aus dem Regularitätssatz $u_{h,t}(t) \in L^2(\Omega)$ für $t > 0$. Diese Tatsachen gelten sowohl für glatte als auch für nichtglatte approximierte Anfangsdaten. Damit ist jede Lösung der diskreten Integralgleichung (3.15) auch eine Lösung des semidiskreten nichtlinearen AWP's (3.14). Daher bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} &S_h : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{V}_h \supset \mathcal{D}(S_h) \longrightarrow \mathcal{V}_h \quad \text{mit} \quad S_h(t)u_{h0} := u_h(t;u_{h0}) \\ &\mathcal{D}(S_h) := \{(t,u_{h0}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{V}_h \mid t \in [0,T_{\max}(u_{h0})[\} \end{aligned} \tag{3.22}$$

den maximal fortgesetzten semidiskreten Lösungsoperator von (3.15), wobei $u_h(t;u_{h0})$ die eindeutige maximal fortgesetzte Lösung der Integralgleichung (3.15) mit maximalen Existenzintervall $[0,T_{\max}(u_{h0})[$ sei. Diese ist wegen (3.13) auch eine Lösung des semidiskreten Galerkin-Verfahrens (3.7). Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, dass diese Lösung $S_h(t)u_{h0}$ für kleiner werdende h und für eine geeignet gewählte approximierte Anfangswertfunktion u_{h0} gegen die Lösung $S(t)u_0$ der Integralgleichung (2.24) und somit gegen die Lösung des AWP's (2.20) konvergiert.

3.5. Konvergenz

Unser Ziel in diesem Kapitel ist es, unter geeigneten Bedingungen eine Abschätzung der Form

$$\|u_h(t) - u(t)\| \leqslant C_2(t,R) \cdot h^s$$

zu finden, wobei $s \in \mathbb{N}$ sei. Es handelt sich dabei um eine Konvergenzeigenschaft zwischen der exakten Lösung $u : [0,T_{max}(u_0)[\longrightarrow H_0^1(\Omega)$ von (2.24) und der Näherungslösung $u_h : [0,T_{max}(u_{h0})[\longrightarrow \mathcal{V}_h$ von (3.15). In diesem Zusammenhang bezeichnet man $\|u_h(t) - u(t)\|$ als den **Approximationsfehler** (oder **Konvergenzfehler**) und s als **Konvergenzordnung** (oder **Konvergenzgeschwindigkeit**) des Verfahrens. Grob gesagt messen wir den Abstand zwischen der exakten und der approximierten Lösungstrajektorie. Hierbei hängt die Konvergenzordung s, die wie üblich ein Maß für die Konvergenzgeschwindigkeit des Verfahrens darstellt, von der Norm ab, in der wir den Fehler messen und abschätzen. Es sei bereits an dieser Stelle vermerkt, dass wir für spätere Analysen die Konvergenz in der H^1-Norm benötigen und daher zeigen werden. Wir werden ausnutzen, dass ein konsistentes und stabiles Verfahren konvergent ist und die Konvergenzordnung mindestens gleich der Konsistenzordnung ist. Was es mit diesen Begriffen auf sich hat, wird sich im Verlauf des Abschnitts klären.

Bevor wir uns mit der Konvergenztheorie befassen, benötigen wir zuvor noch geeignete Operatoren, die jeder gegebenen glatten Funktion, die auf dem Rand $\partial\Omega$ verschwindet, eine gleichwertige Funktion, genauer eine Approximation, aus dem Finite-Elemente-Raum $\mathcal{V}_h$ zuordnet. Zwei derartige Projektionen - $I_h : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathcal{V}_h$ und $P_h : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathcal{V}_h$ - haben wir bereits in den vorangegangenen Abschnitten kennengelernt. Eine weitere orthogonale Projektionsabbildung ist die sogenannte Ritz-Projektion $R_h : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathcal{V}_h$, die jeder Funktion $v \in H_0^1(\Omega)$ eine Funktion $R_h v \in \mathcal{V}_h$ zuordnet, so dass die Differenz $R_h v - v$ bezüglich der H^1-Halbnorm senkrecht auf dem Finite-Elemente-Raum $\mathcal{V}_h$ steht ([4], [6], [15] (1.10), [16] (3.1), [17] (2.12), [24] Def.6.8, [31] (5.49), [34] (1.22)).

3.9 Definition. *Die Abbildung $R_h : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathcal{V}_h$ definiert durch die Eigenschaft*

$$a(R_h v, \chi) = a(v,\chi) \quad \forall\, \chi \in \mathcal{V}_h \tag{3.23}$$

*heißt **Ritz-Projektion**, **elliptische Projektion** bzw. **orthogonale Projektion** auf $H_0^1(\Omega)$.*

Die Ritz-Projektion erfüllt nun zwei nützliche Eigenschaften. Hierbei ist die erste von ihnen eine Orthogonalitätsaussage zwischen dem Raum $H_0^1(\Omega)$ und dem Finite-Elemente-Raum $\mathcal{V}_h$. Die zweite Aussage besagt, dass die Ritz-Projektion auf $H_0^1(\Omega)$ stabil ist ([34] (1.24)).

3.10 Lemma (Eigenschaften der Ritz-Projektion). *Es gilt:*

(1): Die Abbildung $R_h : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathcal{V}_h$ *ist wohldefiniert, d.h.*

$$\forall\, v \in H_0^1(\Omega)\ \exists_1\, v_h \in \mathcal{V}_h\ \forall\, \chi \in \mathcal{V}_h : \quad a(v - v_h, \chi) \,=\, 0$$

(2): $$\|R_h v\|_{H^1} \,\leqslant\, C \cdot |v|_{H^1} \,\leqslant\, C \cdot \|v\|_{H^1} \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.24}$$

Beweis. *zu (1):* Sei $v \in H_0^1(\Omega)$ beliebig. Setze $g(w) := a(v,w)$ mit $g \in V_h^*$. Da a H_0^1-elliptisch ist, folgt wegen $\mathcal{V}_h \subset H_0^1(\Omega)$, dass a insbesondere $\mathcal{V}_h$-elliptisch ist. Damit folgt die Aussage aus dem Satz von Lax-Milgram.
zu (2): Aus der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung A.12, (3.8), (3.23) und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung A.41 folgt

$$\begin{aligned}
\|R_h v\|_{H^1}^2 &\overset{\text{A.12}}{\leqslant} C \cdot |R_h v|_{H^1}^2 \,=\, C \cdot (\nabla R_h v, \nabla R_h v)_{L^2} \overset{(3.8)}{=} C \cdot a(R_h v, R_h v) \\
&\overset{(3.23)}{=} C \cdot a(v, R_h v) \,=\, C \cdot (\nabla v, \nabla R_h v)_{L^2} \,\leqslant\, C \cdot |(\nabla v, \nabla R_h v)_{L^2}| \\
&\overset{\text{A.41}}{\leqslant} C \cdot |v|_{H^1} \cdot |R_h v|_{H^1} \,\leqslant\, C \cdot |v|_{H^1} \cdot \|R_h v\|_{H^1} \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)
\end{aligned}$$

Division durch $\|R_h v\|_{H^1}$ liefert die erste Ungleichung. Die zweite Ungleichung folgt dann direkt aus $|v|_{H^1} \leqslant \|v\|_{H^1}$. □

Nun haben wir alle Grundlagen, um uns näher mit der Konvergenztheorie befassen zu können. Um den Konvergenzfehler abschätzen zu können, führt man stets den folgenden Fehlerzerlegungsschritt durch

$$\|\underbrace{u_h(t) - u(t)}_{=:e(t)}\| \,\leqslant\, \|\underbrace{u_h(t) - R_h u(t)}_{=:\theta(t)}\| + \|\underbrace{R_h u(t) - u(t)}_{=:\rho(t)}\|$$

Dabei bezeichnet man $\|\rho(t)\|$ als **Konsistenzfehler**, **Abschneidefehler** oder **Ritzfehler** und $\|\theta(t)\|$ als **Stabilitätsfehler**. Der Konsistenzfehler gibt den Fehler zwischen der exakten Lösung und der Ritz-Projektion der exakten Lösung an, also den Fehler, der beim Projizieren der Lösung in den Finite-Elemente-Raum entsteht. Dieser Fehler gibt uns daher Aufschluss darüber, inwiefern $R_h u(t)$ die schwache Gleichung (3.2) löst. Der Stabilitätsfehler hingegen misst den Fehler zwischen der numerischen Lösung und der Ritz-Projektion der exakten Lösung und gibt an, inwieweit $R_h u(t)$ die Näherungsgleichung (3.7) erfüllt. Das Ziel ist es daher nun, geeignete Abschätzungen für die beiden Fehler zu finden. Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Konsistenzfehler ([6], [15] (1.9), [16] (3.2), [17] (2.13), [31] Theo.5.5, [34] Lem.1.1).

3.11 Satz (Ritz-Abschätzung). *Es sei* $\{\mathcal{T}_h\}_{0<h<1}$ *eine uniforme Familie regulärer Triangulierungen von* Ω*. Dann gilt für* $s = 1, 2$ *die Abschätzung*

$$\|R_h v - v\|_{L^2} + h \cdot |R_h v - v|_{H^1} \,\leqslant\, C \cdot h^s \cdot \|v\|_{H^s} \quad \forall\, v \in H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \tag{3.25}$$

Beweis. *1. Fall:* $s = 2$: Sei $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ und setze $\rho := R_h v - v$. Aus (3.23) folgt

$$a(\rho, \chi) \,=\, a(R_h v, \chi) - a(v, \chi) \overset{(3.23)}{=} a(v, \chi) - a(v, \chi) \,=\, 0 \quad \forall\, \chi \in \mathcal{V}_h \tag{3.26}$$

Bestimme $\Psi \in H_0^1(\Omega)$ derart, dass die adjungierte schwache Gleichung

$$a(\varphi, \Psi) \,=\, (\varphi, \rho)_{L^2} \quad \forall\, \varphi \in H_0^1(\Omega) \tag{3.27}$$

erfüllt ist. Wegen der H_0^1-Elliptizität von a (siehe Anhang A.5.a), $\rho \in H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ und der Konvexität von Ω ist das Variationsproblem (3.27) nach dem elliptischen Regularitätssatz A.54(2) H^2-regulär, d.h. es gibt zu ρ eine eindeutige Lösung $\Psi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ und es gilt die Ungleichung

$$\|\Psi\|_{H^2} \,\leqslant\, C \cdot \|\rho\|_{L^2} \tag{3.28}$$

gilt. Nach der Definition 3.2 des Interpolationsoperators gilt wegen $H^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ (siehe Satz A.17 mit $k = 2$) $I_h\Psi \in \mathcal{V}_h$ und wegen (3.26) gilt speziell für $\chi = I_h\Psi$ daher $a(\rho, I_h\Psi) = 0$. Daraus und mit (3.27), (3.28), (3.5) und Satz A.41 folgt nun

$$\begin{aligned} \|\rho\|_{L^2}^2 &= (\rho,\rho)_{L^2} \overset{(3.27)}{=} a(\rho,\Psi) \overset{(3.26)}{=} a(\rho,\Psi - I_h\Psi) = (\nabla\rho, \nabla(\Psi - I_h\Psi))_{L^2} \\ &\leqslant |(\nabla\rho, \nabla(\Psi - I_h\Psi))_{L^2}| \overset{A.41}{\leqslant} \|\nabla\rho\|_{L^2} \cdot \|\nabla(\Psi - I_h\Psi)\|_{L^2} \\ &= |\rho|_{H^1} \cdot |\Psi - I_h\Psi|_{H^1} \overset{(3.5)}{\leqslant} C \cdot h \cdot |\rho|_{H^1} \cdot \|\Psi\|_{H^2} \overset{(3.28)}{\leqslant} C \cdot h \cdot |\rho|_{H^1} \cdot \|\rho\|_{L^2} \end{aligned}$$

Division durch $\|\rho\|_{L^2}$ liefert eine spezielle, h-abhängige Poincaré-Friedrichs-Ungleichung

$$\|\rho\|_{L^2} \leqslant C \cdot h \cdot |\rho|_{H^1} \tag{3.29}$$

Da $v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, erhalten wir schließlich mit (3.5) und $I_h v \in \mathcal{V}_h$

$$\begin{aligned} |\rho|_{H^1}^2 &= \|\nabla\rho\|_{L^2}^2 = (\nabla\rho, \nabla\rho)_{L^2} = a(\rho,\rho) = a(R_h v - v, R_h v - v) \\ &= \min_{\chi \in \mathcal{V}_h} a(\chi - v, \chi - v) \leqslant a(I_h v - v, I_h v - v) = |v - I_h v|_{H^1}^2 \overset{(3.5)}{\leqslant} C^2 \cdot h^2 \cdot \|v\|_{H^2}^2 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Nun folgt aus (3.29) und (3.30)

$$\|\rho\|_{L^2} \overset{(3.29)}{\leqslant} C \cdot h \cdot |\rho|_{H^1} \overset{(3.30)}{\leqslant} C \cdot h^2 \cdot \|v\|_{H^2} \tag{3.31}$$

und somit haben wir den Fall $s = 2$ bewiesen, denn aus (3.30) und (3.31) folgt

$$\|R_h v - v\|_{L^2} + h \cdot |R_h v - v|_{H^1} = \|\rho\|_{L^2} + h \cdot |\rho|_{H^1} \overset{(3.30),(3.31)}{\leqslant} C \cdot h^2 \cdot \|v\|_{H^2}$$

2. Fall: $s = 1$: Sei $v \in H^1(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ und ρ wie zuvor. Dann gelten bis einschließlich (3.29) die Aussagen aus dem Fall $s = 2$, da wir bis dato noch keine Glattheitsvoraussetzungen von v verwendet haben. Aus (3.24) erhalten wir zunächst

$$|\rho|_{H^1} = |R_h v - v|_{H^1} \leqslant |R_h v|_{H^1} + |v|_{H^1} \leqslant \|R_h v\|_{H^1} + \|v\|_{H^1} \overset{(3.24)}{\leqslant} C \cdot \|v\|_{H^1} \tag{3.32}$$

Mit (3.29) und (3.32) bekommen wir

$$\|R_h v - v\|_{L^2} = \|\rho\|_{L^2} \overset{(3.29)}{\leqslant} C \cdot h \cdot |\rho|_{H^1} \overset{(3.32)}{\leqslant} C \cdot h \cdot \|v\|_{H^1} \tag{3.33}$$

Aus (3.32) und (3.33) erhalten wir nun durch

$$\|R_h v - v\|_{L^2} + h \cdot |R_h v - v|_{H^1} \overset{(3.32),(3.33)}{\leqslant} C \cdot h \cdot \|v\|_{H^1}$$

unsere Behauptung. □

Aus der Ritz-Abschätzung 3.11 und Lemma A.12 erhalten wir das folgende Resultat ([16] (3.2), [17] (2.13), [34] Theo.14.1).

3.12 Korollar. *Es sei $\{\mathcal{T}_h\}_{0<h<1}$ eine uniforme Familie regulärer Triangulierungen von Ω. Dann gilt für $s = 1, 2$ die Abschätzung*

$$\|R_h v - v\|_{L^2} + h \cdot \|R_h v - v\|_{H^1} \leqslant C \cdot h^s \cdot \|v\|_{H^s} \quad \forall\, v \in H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \tag{3.34}$$

Beweis. Aus der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung A.12 erhalten wir

$$\|R_h v - v\|_{H^1}^2 \;=\; \|R_h v - v\|_{L^2}^2 + |R_h v - v|_{H^1}^2 \;\leqslant C^2 \cdot |R_h v - v|_{H^1}^2$$

und somit gilt $C^{-1} \cdot \|R_h v - v\|_{H^1} \leqslant |R_h v - v|_{H^1}$ für ein $C > 0$. Daraus und aus (3.25) folgt

$$\min\{C^{-1}, 1\} \cdot (\|R_h v - v\|_{L^2} + h \cdot \|R_h v - v\|_{H^1}) \;\leqslant\; \|R_h v - v\|_{L^2} + h \cdot C^{-1} \cdot \|R_h v - v\|_{H^1}$$
$$\leqslant \|R_h v - v\|_{L^2} + h \cdot |R_h v - v|_{H^1} \overset{(3.25)}{\leqslant} C \cdot h^s \cdot \|v\|_{H^s} \quad \forall\, v \in H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

Division beider Seiten durch $\min\{C^{-1}, 1\}$ liefert die Behauptung. □

Das folgende Korollar enthält die Konsistenzaussagen genau in der Form, in der wir sie im Konvergenzbeweis anwenden werden ([16] (3.8-a), (3.8-b), [17] (2.14),(2.15)).

3.13 Korollar (KONSISTENZ DES FE-VERFAHRENS). *Es sei $\{\mathcal{T}_h\}_{0<h<1}$ eine uniforme Familie regulärer Triangulierungen von Ω.*
(1): Sei $u \in C([0, T_{max}(u_0)[, H_0^1(\Omega))$ die zugehörige Lösung der Integralgleichung (2.24) zu den Anfangsdaten $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ auf dem maximalen Existenzintervall $[0, T_{max}(u_0)[$. Desweiteren seien $R_1 > 0$ und $0 < t_0 < T_{max}(u_0)$ mit $\|u(t)\|_{H^1} \leqslant R_1 \;\forall\, t \in [0, t_0]$. Dann gelten für $\rho(t) := R_h u(t) - u(t)$ sowie für $j = 0, 1$ und $s = 1, 2$ die folgenden Aussagen

$$\text{a): } \|\rho(t)\|_{H^j} \;\leqslant\; C \cdot h^{s-j} \cdot \|u(t)\|_{H^s} \;\leqslant\; C(R_1, t_0) \cdot h^{s-j} \cdot t^{-\frac{(s-1)}{2}} \qquad \forall\, t \in]0, t_0] \tag{3.35}$$
$$\text{b): } \|\rho_t(t)\|_{L^2} \;\leqslant\; C \cdot h^s \cdot \|u_t(t)\|_{H^s} \;\leqslant\; C(R_1, t_0) \cdot h^s \cdot t^{-1-\frac{(s-1)}{2}} \qquad \forall\, t \in]0, t_0] \tag{3.36}$$

(2): Falls zusätzlich zu (1) $u_0 \in H^2(\Omega)$ mit $\|u_0\|_{H^2} \leqslant R_2$ ist, so gilt

$$\text{a): } \|\rho(t)\|_{H^j} \;\leqslant\; C \cdot h^{s-j} \cdot \|u(t)\|_{H^s} \;\leqslant\; C(R_1, R_2, t_0) \cdot h^{s-j} \qquad \forall\, t \in [0, t_0] \tag{3.37}$$
$$\text{b): } \|\rho_t(t)\|_{L^2} \;\leqslant\; C \cdot h^s \cdot \|u_t(t)\|_{H^s} \;\leqslant\; C(R_1, R_2, t_0) \cdot h^s \cdot t^{-\frac{s}{2}} \qquad \forall\, t \in]0, t_0] \tag{3.38}$$

Beweis. *zu (1):* Die Behauptung folgt in beiden Fällen aus (3.34) und den Regularitätsaussagen (2.39) und (2.40)

$$\|\rho(t)\|_{H^j} \overset{(3.34)}{\leqslant} C \cdot h^{s-j} \cdot \|u(t)\|_{H^s} \overset{(2.39)}{\leqslant} C(R_1, t_0) \cdot h^{s-j} \cdot t^{-\frac{(s-1)}{2}} \qquad \forall\, t \in]0, t_0]$$
$$\|\rho_t(t)\|_{L^2} \overset{(3.34)}{\leqslant} C \cdot h^s \cdot \|u_t(t)\|_{H^s} \overset{(2.40)}{\leqslant} C(R_1, t_0) \cdot h^s \cdot t^{-1-\frac{(s-1)}{2}} \qquad \forall\, t \in]0, t_0]$$

zu (2): Analog erhalten wir aus den Regularitätsaussagen (2.42) und (2.43)

$$\|\rho(t)\|_{H^j} \overset{(3.34)}{\leqslant} C \cdot h^{s-j} \cdot \|u(t)\|_{H^s} \overset{(2.42)}{\leqslant} C(R_1, R_2, t_0) \cdot h^{s-j} \qquad \forall\, t \in [0, t_0]$$
$$\|\rho_t(t)\|_{L^2} \overset{(3.34)}{\leqslant} C \cdot h^s \cdot \|u_t(t)\|_{H^s} \overset{(2.43)}{\leqslant} C(R_1, R_2, t_0) \cdot h^s \cdot t^{-\frac{s}{2}} \qquad \forall\, t \in]0, t_0]$$

die Behauptung. □

Die Potenz $s - j$ in (3.35) und (3.37) bezeichnen wir als **Konsistenzordnung**. Diese ist im Fall nichtglatter Anfangsdaten 1 bzgl. der H^1-Norm sowie 2 bzgl. der L^2-Norm und im Fall glatter Anfangsdaten 1 bzgl. der H^1-Norm sowie 2 bzgl. der L^2-Norm. Wir wissen somit, wie groß die optimale Konvergenzordnung jeweils mindestens sein muss, falls das Verfahren konvergiert. Wir beenden nun die Konsistenzanalyse.

Als wesentlich aufwändiger wird sich die Herleitung geeigneter Stabilitätsaussagen erweisen ([16] Theo.3.1, [17] Theo.2.2). Wir werden hierbei erneut zwischen glatten und nichtglatten Anfangsdaten

u_0 unterscheiden und feststellen, dass insbesondere die nichtglatten Anfangsdaten eine Sonderbehandlung in Form der Anwendung der partiellen Integration verlangen. Der Grund dafür ist, dass die Konsistenzabschätzungen in Korollar 3.13 schwache Singularitäten in den Integralen erzeugen würden, was Stabilitätsabschätzungen unbrauchbar machen würde.

3.14 Satz (STABILITÄT DES FE-VERFAHRENS). *Es sei $\{\mathcal{T}_h\}_{0<h<1}$ eine uniforme Familie regulärer Triangulierungen von Ω.*
(1): Sei $u \in C([0, T_{max}(u_0)[, H_0^1(\Omega))$ (bzw. $u_h \in C([0, T_{max}(u_{h0})[, \mathcal{V}_h))$ die zugehörige Lösung der Integralgleichung (2.24) (bzw. (3.15)) zu den Anfangsdaten $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ (bzw. $u_{h0} \in \mathcal{V}_h$) auf dem maximalen Existenzintervall $[0, T_{max}(u_0)[$ (bzw. $[0, T_{max}(u_{h0})[$). Desweiteren seien $R_1 > 0$ und $0 < t_0 < \min\{T_{max}(u_0), T_{max}(u_{h0})\}$ mit $\|u(t)\|_{H^1} \leqslant R_1$ und $\|u_h(t)\|_{H^1} \leqslant R_1$ $\forall\, t \in [0, t_0]$. Dann gilt für $\theta(t) := u_h(t) - R_h u(t) \in \mathcal{V}_h$

$$\begin{aligned} a)\text{: } \|\theta(t)\|_{L^2} &\leqslant C(R_1, t_0) \cdot (\|u_{h0} - P_h u_0\|_{L^2} + h^2 \cdot t^{-\frac{1}{2}}) && (3.39)\\ &\quad + C(R_1) \cdot \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \cdot \|u_h(s) - u(s)\|_{L^2}\, ds \quad \forall\, t \in]0, t_0] \\ b)\text{: } \|\theta(t)\|_{H^1} &\leqslant C(R_1, t_0) \cdot t^{-\frac{1}{2}} \cdot (\|u_{h0} - P_h u_0\|_{L^2} + h) && (3.40)\\ &\quad + C(R_1) \cdot \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \cdot \|u_h(s) - u(s)\|_{H^1}\, ds \quad \forall\, t \in]0, t_0] \end{aligned}$$

(2): Falls zusätzlich zu (1) $u_0 \in H^2(\Omega)$ mit $\|u_0\|_{H^2} \leqslant R_2$ ist, so gilt

$$\begin{aligned} a)\text{: } \|\theta(t)\|_{L^2} &\leqslant C(R_1, R_2, t_0) \cdot (\|u_{h0} - P_h u_0\|_{L^2} + h^2) && (3.41)\\ &\quad + C(R_1) \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u_h(s) - u(s)\|_{L^2}\, ds \quad \forall\, t \in]0, t_0] \\ b)\text{: } \|\theta(t)\|_{H^1} &\leqslant C(R_1, R_2, t_0) \cdot (\|u_{h0} - u_0\|_{H^1} + h) && (3.42)\\ &\quad + C(R_1) \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u_h(s) - u(s)\|_{H^1}\, ds \quad \forall\, t \in]0, t_0] \end{aligned}$$

Beweis. Zunächst untersuchen wir, welches AWP die Funktion θ löst. Aus (3.1), (3.8), (3.9), (3.13) und (3.23) erhalten wir

$$\begin{aligned} &(A_h R_h v, \chi)_{L^2} \overset{(3.9)}{=} a(R_h v, \chi) \overset{(3.23)}{=} a(v, \chi) \overset{(3.8)}{=} (\nabla v, \nabla \chi)_{L^2} \overset{(3.1)}{=} (Av, \chi)_{L^2} \\ \overset{(3.13)}{=} &(P_h A v, \chi)_{L^2} \quad \forall\, \chi \in \mathcal{V}_h\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned} \tag{3.43}$$

Wegen (3.43) gilt $A_h R_h = P_h A$. Weiter folgt daraus sowie aus (2.20) und (3.14)

$$\begin{aligned} \theta_t + A_h \theta &= (u_h)_t - R_h u_t + A_h u_h - A_h R_h u \\ &\overset{(3.43)}{=} (u_h)_t - P_h R_h u_t + A_h u_h - P_h A u - P_h u_t + P_h u_t \\ &\overset{(2.20),(3.14)}{=} P_h(F(u_h)) - P_h(F(u)) - P_h(R_h u_t - u_t) = P_h(F(u_h) - F(u) - \rho_t) \end{aligned}$$

Damit erfüllt $\theta(t)$ das AWP

$$\begin{aligned} \theta_t + A_h \theta &= P_h(F(u_h) - F(u) - \rho_t) \quad &, t \in]0, t_0] \\ \theta(0) &= u_{h0} - R_h u_0 &, t = 0 \end{aligned}$$

Die Lösung lässt sich wegen (3.15) darstellen als

$$\theta(t) = E_h(t)\theta(0) + \int_0^t E_h(t-s) P_h(F(u_h(s)) - F(u(s)) - \rho_s(s))\, ds \quad \forall\, t \in [0, t_0] \tag{3.44}$$

zu (1): Unter Verwendung der partiellen Integration erhalten wir

$$-\int_0^{\frac{t}{2}} E_h(t-s)P_h\rho_s(s)\,ds \;=\; -\left[E_h(t-s)P_h\rho(s)\right]_0^{\frac{t}{2}} + \int_0^{\frac{t}{2}} E_{h,s}(t-s)P_h\rho(s)\,ds$$

$$= E_h(t)P_h\rho(0) - E_h(\frac{t}{2})P_h\rho(\frac{t}{2}) + \int_0^{\frac{t}{2}} E_{h,s}(t-s)P_h\rho(s)\,ds \tag{3.45}$$

Damit können wir $\theta(t)$ in (3.44) wegen (3.45) und der Linearität des Operators P_h auch schreiben als

$$\begin{aligned}
\theta(t) \;&\overset{(3.44)}{=}\; E_h(t)\theta(0) - \int_0^t E_h(t-s)P_h\rho_s(s)\,ds + \int_0^t E_h(t-s)P_h(F(u_h(s)) - F(u(s)))\,ds \\
&=\; E_h(t)\theta(0) - \int_0^{\frac{t}{2}} E_h(t-s)P_h\rho_s(s)\,ds - \int_{\frac{t}{2}}^t E_h(t-s)P_h\rho_s(s)\,ds \\
&\qquad + \int_0^t E_h(t-s)P_h(F(u_h(s)) - F(u(s)))\,ds \\
&\overset{(3.45)}{=}\; E_h(t)\theta(0) + E_h(t)P_h\rho(0) - E_h(\frac{t}{2})P_h\rho(\frac{t}{2}) + \int_0^{\frac{t}{2}} E_{h,s}(t-s)P_h\rho(s)\,ds \\
&\qquad - \int_{\frac{t}{2}}^t E_h(t-s)P_h\rho_s(s)\,ds + \int_0^t E_h(t-s)P_h(F(u_h(s)) - F(u(s)))\,ds \\
&=\; E_h(t)P_he(0) - E_h(\frac{t}{2})P_h\rho(\frac{t}{2}) + \int_0^{\frac{t}{2}} E_{h,s}(t-s)P_h\rho(s)\,ds - \int_{\frac{t}{2}}^t E_h(t-s)P_h\rho_s(s)\,ds \\
&\qquad + \int_0^t E_h(t-s)P_h(F(u_h(s)) - F(u(s)))\,ds \quad \forall\, t \in [0, t_0]
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Im letzten Schritt wurde

$$\theta(0) + P_h\rho(0) \;=\; P_h\theta(0) + P_h\rho(0) \;=\; P_h(\theta(0) + \rho(0)) \;=\; P_h(u_h(0) - u(0)) \;=\; P_h(e(0))$$

verwendet. Nun werden wir die beiden Stabilitätsaussagen für nichtglatte Anfangsdaten zeigen. Aus (2.6), (3.17), (3.19), (3.20), (3.21), (3.41), (3.42) und (3.46) erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\|\theta(t)\|_{L^2} \\
\overset{(3.46)}{\leqslant}\; &\|E_h(t)P_he(0)\|_{L^2} + \|E_h(\frac{t}{2})P_h\rho(\frac{t}{2})\|_{L^2} + \int_0^{\frac{t}{2}} \|E_{h,s}(t-s)P_h\rho(s)\|_{L^2}\,ds \\
&\quad + \int_{\frac{t}{2}}^t \|E_h(t-s)P_h\rho_s(s)\|_{L^2}\,ds + \int_0^t \|E_h(t-s)P_h(F(u_h(s)) - F(u(s)))\|_{L^2}\,ds \\
\overset{(3.17),(3.19),(3.20)}{\leqslant}\; &C(\|P_he(0)\|_{L^2} + \|\rho(\frac{t}{2})\|_{L^2}) + C\int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{-1}\|\rho(s)\|_{L^2}\,ds + C\int_{\frac{t}{2}}^t \|\rho_s(s)\|_{L^2}\,ds \\
&\quad + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|A_h^{-\frac{1}{2}}P_h(F(u_h(s)) - F(u(s)))\|_{L^2}\,ds \\
\overset{(3.21),(3.41),(3.42)}{\leqslant}\; &C(R_1, t_0)\cdot(\|P_he(0)\|_{L^2} + h^2t^{-\frac{1}{2}}) + C(R_1, t_0)h^2\left(\int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{-1}s^{-\frac{1}{2}}\,ds + \int_{\frac{t}{2}}^t s^{-\frac{3}{2}}\,ds\right) \\
&\quad + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|F(u_h(s)) - F(u(s))\|_{H^{-1}}\,ds \\
\overset{(2.6)}{\leqslant}\; &C(R_1, t_0)\cdot(\|u_{h0} - P_hu_0\|_{L^2} + h^2t^{-\frac{1}{2}}) \\
&\quad + C(R_1)\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|u_h(s) - u(s)\|_{L^2}\,ds \quad \forall\, t \in]0, t_0]
\end{aligned}$$

Ähnlich erhalten wir aus (2.3), (3.19), (3.20), (3.41), (3.42) und (3.46)

$$\begin{aligned}
&\|\theta(t)\|_{H^1} \\
\overset{(3.46)}{\leqslant}\ & \|E_h(t)P_h e(0)\|_{H^1} + \|E_h(\frac{t}{2})P_h\rho(\frac{t}{2})\|_{H^1} + \int_0^{\frac{t}{2}} \|E_{h,s}(t-s)P_h\rho(s)\|_{H^1}\,ds \\
&\quad + \int_{\frac{t}{2}}^t \|E_h(t-s)P_h\rho_s(s)\|_{H^1}\,ds + \int_0^t \|E_h(t-s)P_h(F(u_h(s)) - F(u(s)))\|_{H^1}\,ds \\
\overset{(3.19),(3.20)}{\leqslant}\ & Ct^{-\frac{1}{2}}(\|P_h e(0)\|_{L^2} + \|\rho(\frac{t}{2})\|_{L^2}) + C\int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{-\frac{3}{2}}\|\rho(s)\|_{L^2}\,ds \\
&\quad + C\int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|\rho_s(s)\|_{L^2}\,ds + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|F(u_h(s)) - F(u(s))\|_{L^2}\,ds \\
\overset{(3.41),(3.42)}{\leqslant}\ & C(R_1,t_0)t^{-\frac{1}{2}}\cdot(\|P_h e(0)\|_{L^2} + h) + C(R_1,t_0)h\left(\int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{-\frac{3}{2}}\,ds + \int_{\frac{t}{2}}^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}s^{-1}\,ds\right) \\
&\quad + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|F(u_h(s)) - F(u(s))\|_{L^2}\,ds \\
\overset{(2.3)}{\leqslant}\ & C(R_1,t_0)t^{-\frac{1}{2}}\cdot(\|u_{h0} - P_h u_0\|_{L^2} + h) \\
&\quad + C(R_1)\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|u_h(s) - u(s)\|_{H^1}\,ds \quad \forall\, t \in]0,t_0]
\end{aligned}$$

zu (2): Für die Abschätzung in der L^2-Norm greifen wir ein letztes Mal auf die Darstellung (3.46) zurück. Mit (2.6), (3.17), (3.19), (3.20), (3.21), (3.37), (3.38) und (3.46) erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\|\theta(t)\|_{L^2} \\
\overset{(3.46)}{\leqslant}\ & \|E_h(t)P_h e(0)\|_{L^2} + \|E_h(\frac{t}{2})P_h\rho(\frac{t}{2})\|_{L^2} + \int_0^{\frac{t}{2}} \|E_{h,s}(t-s)P_h\rho(s)\|_{L^2}\,ds \\
&\quad + \int_{\frac{t}{2}}^t \|E_h(t-s)P_h\rho_s(s)\|_{L^2}\,ds + \int_0^t \|E_h(t-s)P_h(F(u_h(s)) - F(u(s)))\|_{L^2}\,ds \\
\overset{(3.17),(3.19),(3.20)}{\leqslant}\ & C(\|P_h e(0)\|_{L^2} + \|\rho(\frac{t}{2})\|_{L^2}) + C\int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{-1}\|\rho(s)\|_{L^2}\,ds + C\int_{\frac{t}{2}}^t \|\rho_s(s)\|_{L^2}\,ds \\
&\quad + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|A_h^{-\frac{1}{2}}P_h(F(u_h(s)) - F(u(s)))\|_{L^2}\,ds \\
\overset{(3.21),(3.37),(3.38)}{\leqslant}\ & C(R_1,R_2,t_0)\cdot(\|P_h e(0)\|_{L^2} + h^2) + C(R_1,R_2,t_0)h^2\left(\int_0^{\frac{t}{2}} (t-s)^{-1}\,ds + \int_{\frac{t}{2}}^t s^{-1}\,ds\right) \\
&\quad + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|F(u_h(s)) - F(u(s))\|_{H^{-1}}\,ds \\
\overset{(2.6)}{\leqslant}\ & C(R_1,R_2,t_0)\cdot(\|u_{h0} - P_h u_0\|_{L^2} + h^2) \\
&\quad + C(R_1)\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|u_h(s) - u(s)\|_{L^2}\,ds \quad \forall\, t \in]0,t_0]
\end{aligned}$$

Für die Abschätzung in der H^1-Norm ergänzen wir (3.44) mit $+E_h(t)R_h\rho(0) - E_h(t)R_h\rho(0)$ (beachte: aus $\theta(0) \in \mathcal{V}_h$ folgt $\theta(0) = R_h\theta(0)$) und verwenden die Abschätzungen

$$\|E_h(t)R_h\rho(0)\|_{H^1} \overset{(3.19)}{\leqslant} C\|R_h\rho(0)\|_{H^1} \overset{(3.24)}{\leqslant} C\|\rho(0)\|_{H^1} \overset{(3.34)}{\leqslant} Ch\|u_0\|_{H^2} \leqslant C(R_2)h \tag{3.47}$$

$$\begin{aligned}
\|E_h(t)\theta(0) + E_h(t)R_h\rho(0)\|_{H^1} &= \|E_h(t)(R_h\theta(0) + R_h\rho(0))\|_{H^1} \\
&\overset{(3.19)}{\leqslant} C\|R_h(\theta(0) + \rho(0))\|_{H^1} \overset{(3.24)}{\leqslant} C\|\theta(0) + \rho(0)\|_{H^1}
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Damit erhalten wir aus (2.3), (3.19), (3.20), (3.38), (3.44), (3.47) und (3.48) durch (beachte: $R_h\rho(0) = 0$)

$$\begin{aligned}
&\|\theta(t)\|_{H^1} \\
\overset{(3.44)}{\leqslant}\ & \|E_h(t)R_h(\theta(0)+\rho(0))\|_{H^1} + \|E_h(t)R_h\rho(0)\|_{H^1} \\
&\quad + \int_0^t \|E_h(t-s)P_h(F(u_h(s)) - F(u(s)))\|_{H^1} + \|E_h(t-s)P_h\rho_s(s)\|_{H^1}\, ds \\
\overset{(3.19),(3.20),(3.48)}{\leqslant}\ & C\|\theta(0)+\rho(0)\|_{H^1} + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|F(u_h(s)) - F(u(s))\|_{L^2}\, ds \\
&\quad + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|\rho_s(s)\|_{L^2}\, ds + \|E_h(t)R_h\rho(0)\|_{H^1} \\
\overset{(3.38),(3.47)}{\leqslant}\ & C\|u_{h0} - u_0\|_{H^1} + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|F(u_h(s)) - F(u(s))\|_{L^2}\, ds \\
&\quad + C(R_1,R_2,t_0)h(\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}s^{-\frac{1}{2}}\, ds + 1) \\
\overset{(2.3)}{\leqslant}\ & C(R_1,R_2,t_0)\cdot(\|u_{h0}-u_0\|_{H^1} + h) \\
&\quad + C(R_1)\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|u_h(s) - u(s)\|_{H^1}\, ds \quad \forall\, t \in]0,t_0]
\end{aligned}$$

die Behauptung. □

Wir haben nun alles, was wir benötigen, um den Fehler zwischen der exakten Lösung $u : [0,T[\longrightarrow H_0^1(\Omega)$ von (2.24) und der Näherungslösung $u_h : [0,T[\longrightarrow \mathcal{V}_h$ von (3.15) abzuschätzen ([16] Theo.3.1, [17] Theo.2.2). Wir unterscheiden dabei erneut zwischen glatten und nichtglatten Anfangsdaten u_0.

3.15 Satz (KONVERGENZ DES FE-VERFAHRENS). *Es sei $\{\mathcal{T}_h\}_{0<h<1}$ eine uniforme Familie regulärer Triangulierungen von Ω.*
(1): Sei $u \in C([0,T_{max}(u_0)[, H_0^1(\Omega))$ (bzw. $u_h \in C([0,T_{max}(u_{h0})[,\mathcal{V}_h)$) die zugehörige Lösung der Integralgleichung (2.24) (bzw. (3.15)) zu den Anfangsdaten $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ (bzw. $u_{h0} \in \mathcal{V}_h$) auf dem maximalen Existenzintervall $[0,T_{max}(u_0)[$ (bzw. $[0,T_{max}(u_{h0})[$). Desweiteren seien $R_1 > 0$ und $0 < t_0 < \min\{T_{max}(u_0), T_{max}(u_{h0})\}$ mit $\|u(t)\|_{H^1} \leqslant R_1$ und $\|u_h(t)\|_{H^1} \leqslant R_1$ $\forall\, t \in [0,t_0]$. Dann gilt:

$$\text{a): } \|u_h(t) - u(t)\|_{L^2} \leqslant C(R_1,t_0)\cdot(\|u_{h0} - P_hu_0\|_{L^2} + h^2t^{-\frac{1}{2}}) \qquad \forall\, t\in]0,t_0] \tag{3.49}$$

$$\text{b): } \|u_h(t) - u(t)\|_{H^1} \leqslant C(R_1,t_0)\cdot t^{-\frac{1}{2}}\cdot(\|u_{h0} - P_hu_0\|_{L^2} + h) \qquad \forall\, t\in]0,t_0] \tag{3.50}$$

(2) Falls zusätzlich zu (1) $u_0 \in H^2(\Omega)$ mit $\|u_0\|_{H^2} \leqslant R_2$ ist, so gilt

$$\text{a): } \|u_h(t) - u(t)\|_{L^2} \leqslant C(R_1,R_2,t_0)\cdot(\|u_{h0} - P_hu_0\|_{L^2} + h^2) \qquad \forall\, t\in [0,t_0] \tag{3.51}$$

$$\text{b): } \|u_h(t) - u(t)\|_{H^1} \leqslant C(R_1,R_2,t_0)\cdot(\|u_{h0} - u_0\|_{H^1} + h) \qquad \forall\, t\in [0,t_0] \tag{3.52}$$

Beweis. *zu (1)a):* Aus (3.35) und (3.39) folgt

$$\begin{aligned}
&\|u_h(t) - u(t)\|_{L^2} \leqslant \|u_h(t) - R_hu(t)\|_{L^2} + \|R_hu(t) - u(t)\|_{L^2} = \|\theta(t)\|_{L^2} + \|\rho(t)\|_{L^2} \\
\overset{(3.35),(3.39)}{\leqslant}\ & C(R_1,t_0)(\|u_{h0} - P_hu_0\|_{L^2} + h^2t^{-\frac{1}{2}}) \\
&\quad + C(R_1)\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|u_h(s) - u(s)\|_{L^2}\, ds + C(R_1,t_0)h^2t^{-\frac{1}{2}} \\
\leqslant\ & C(R_1,t_0)(\|u_{h0} - P_hu_0\|_{L^2} + h^2t^{-\frac{1}{2}}) \\
&\quad + C(R_1)\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}}\|u_h(s) - u(s)\|_{L^2}\, ds \quad \forall\, t \in]0,t_0]
\end{aligned}$$

Das verallgemeinerte Gronwall-Lemma A.48 liefert uns eine Konstante $C(R_1, t_0) > 0$, so dass die Ungleichung

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{L^2} \leqslant C(R_1, t_0)(\|u_{h0} - P_h u_0\|_{L^2} + h^2 t^{-\frac{1}{2}}) \quad \forall\, t \in]0, t_0]$$

gilt. Beachte hierbei, dass wegen des schwachen Singularitätsterms $t^{-\frac{1}{2}}$ keine Konvergenz zum Zeitpunkt $t = 0$ vorliegt.
zu (1)b): Aus (3.35) und (3.40) folgt

$$\begin{aligned} \|u_h(t) - u(t)\|_{H^1} &\leqslant \|u_h(t) - R_h u(t)\|_{H^1} + \|R_h u(t) - u(t)\|_{H^1} = \|\theta(t)\|_{H^1} + \|\rho(t)\|_{H^1} \\ &\overset{(3.35),(3.40)}{\leqslant} C(R_1, t_0) t^{-\frac{1}{2}} (\|u_{h0} - P_h u_0\|_{L^2} + h) \\ &\quad + C(R_1) \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u_h(s) - u(s)\|_{H^1}\, ds \quad \forall\, t \in]0, t_0] \end{aligned}$$

Das verallgemeinerte Gronwall-Lemma A.48 liefert uns eine Konstante $C(R_1, t_0) > 0$, so dass die Ungleichung

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{H^1} \leqslant C(R_1, t_0) t^{-\frac{1}{2}} (\|u_{h0} - P_h u_0\|_{L^2} + h) \quad \forall\, t \in]0, t_0]$$

gilt. Beachte hierbei, dass wegen des schwachen Singularitätsterms $t^{-\frac{1}{2}}$ auch hier keine Konvergenz zum Zeitpunkt $t = 0$ vorliegt.
zu (2)a): Aus (3.37) und (3.41) folgt

$$\begin{aligned} \|u_h(t) - u(t)\|_{L^2} &\leqslant \|u_h(t) - R_h u(t)\|_{L^2} + \|R_h u(t) - u(t)\|_{L^2} = \|\theta(t)\|_{L^2} + \|\rho(t)\|_{L^2} \\ &\overset{(3.37),(3.41)}{\leqslant} C(R_1, R_2, t_0) \cdot (\|u_{h0} - P_h u_0\|_{L^2} + h^2) \\ &\quad + C(R_1) \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u_h(s) - u(s)\|_{L^2}\, ds \quad \forall\, t \in]0, t_0] \end{aligned}$$

Das verallgemeinerte Gronwall-Lemma A.48 liefert uns eine Konstante $C(R_1, t_0) > 0$, so dass die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|u_h(t) - u(t)\|_{L^2} &\leqslant C(R_1, R_2, t_0) \cdot (\|u_{h0} - P_h u_0\|_{L^2} + h^2) \\ &\qquad \forall\, t \in [0, t_0] \end{aligned}$$

gilt. Da in diesem Fall keine singuläre Stelle mehr vorhanden ist, gilt die Konvergenz auch zum Zeitpunkt $t = 0$.
zu (2)b): Aus (3.37) und (3.42) folgt

$$\begin{aligned} \|u_h(t) - u(t)\|_{H^1} &\leqslant \|u_h(t) - R_h u(t)\|_{H^1} + \|R_h u(t) - u(t)\|_{H^1} = \|\theta(t)\|_{H^1} + \|\rho(t)\|_{H^1} \\ &\overset{(3.37),(3.42)}{\leqslant} C(R_1, R_2, t_0) \cdot (\|u_{h0} - u_0\|_{H^1} + h) \\ &\quad + C(R_1) \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \|u_h(s) - u(s)\|_{H^1}\, ds \quad \forall\, t \in]0, t_0] \end{aligned}$$

Das verallgemeinerte Gronwall-Lemma A.48 liefert uns eine Konstante $C(R_1, t_0) > 0$, so dass die Ungleichung

$$\|u_h(t) - u(t)\|_{H^1} \leqslant C(R_1, R_2, t_0) \cdot (\|u_{h0} - u_0\|_{H^1} + h) \quad \forall\, t \in [0, t_0]$$

gilt. Da auch in diesem Fall keine singuläre Stelle mehr vorhanden ist, gilt auch hier die Konvergenz zum Zeitpunkt $t = 0$, womit die Behauptung gezeigt ist.
Man beachte, dass die aus dem Gronwall-Lemma A.48 stammenden Konstanten $C(R_1, t_0)$ und $C(R_1, R_2, t_0)$ in allen Beweisteilen nicht-fallend in t_0 sind.

□

3.16 Bemerkung. *i) Damit die Fehlerschranken im Konvergenzsatz 3.15 optimal sind, müssen wir für die Anfangswertfunktionen u_{h0} die zugehörige Approximation geeignet wählen.*

$$\begin{array}{llll} \text{Fehlerschranke in (3.49) optimal} & \Longleftrightarrow \|u_{h0} - P_h u_0\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^2) & \Longleftarrow & u_{h0} := P_h u_0 \\ \text{Fehlerschranke in (3.50) optimal} & \Longleftrightarrow \|u_{h0} - P_h u_0\|_{L^2} = \mathcal{O}(h) & \Longleftarrow & u_{h0} := P_h u_0 \\ \text{Fehlerschranke in (3.51) optimal} & \Longleftrightarrow \|u_{h0} - P_h u_0\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^2) & \Longleftarrow & u_{h0} := P_h u_0 \\ \text{Fehlerschranke in (3.52) optimal} & \Longleftrightarrow \|u_{h0} - u_0\|_{H^1} = \mathcal{O}(h) & \Longleftarrow & u_{h0} := R_h u_0 \text{ oder} \\ & & & u_{h0} := I_h u_0 \end{array}$$

Unter dieser Bedingung stellen wir hinsichtlich der Konvergenz des FE-Verfahrens fest, dass das FE-Verfahren - unabhängig von der Glattheit der Anfangsdaten - in der L^2-Norm quadratisch und in der H^1-Norm linear konvergiert. Man beachte hierbei, dass der Term $\|u_{h0} - P_h u_0\|_{L^2}$ in den Situationen von (3.49), (3.50) und (3.51) bei der Wahl von $u_{h0} := P_h u_0$ stets 0 wird.
ii) Da in den Konvergenzabschätzungen (3.51) und (3.52) die Regularität der Anfangsdaten hinreichend ist, um eine Fehlerabschätzung optimaler Ordnung auf dem gesamten kompakten Intervall $[0, t_0]$ zu erhalten, bezeichnet man dies auch als ***Fall der glatten Anfangsdaten****. Die Ungleichungen (3.49) und (3.50) hingegen sind Beispiele für Fehlerabschätzungen* ***nichtglatter Anfangsdaten****, da die Regularität der Anfangsdaten für die optimale Konvergenz im Punkt $t = 0$ schlichtweg unzureichend ist. Mit anderen Worten muss zunächst etwas Zeit vergangen sein, ehe wir konkrete Aussagen über den Konvergenzfehler des FE-Verfahrens treffen können. Der Grund dafür liegt in den schwachen Singularitätstermen $t^{-\frac{1}{2}}$, die wir uns in den Stabilitätsabschätzungen wegen der unzulänglichen Regularität der Anfangsdaten eingehandelt haben. Dieser Term lässt die Fehlerschranken für Zeiten nahe bei 0 regelrecht explodieren und macht sie daher unbrauchbar. Dennoch haben wir dank der Glättungseigenschaften unserer homogenen linearen Lösungsoperatoren E und E_h die optimale Konvergenzordnung für $t > 0$.*
iii) In Bezug auf die Beweisstruktur beachte man insbesondere den folgenden wichtigen Zusammenhang:

Konsistenz	+	Stabilität	=	Konvergenz
(3.35)	+	(3.39)	=	(3.49)
(3.35)	+	(3.40)	=	(3.50)
(3.37)	+	(3.41)	=	(3.51)
(3.37)	+	(3.42)	=	(3.52)

iv) Fehlerabschätzungen höherer Ordnung werden in [5] und [19] behandelt. Es sei noch vermerkt, dass es wegen der Nichtlinearität eine Begrenzung der Konvergenzordnung gibt. Zum Beispiel wurde gezeigt, dass $\|u_h(t) - u(t)\|_{L^2}$ nicht kleiner als $\mathcal{O}(h^4)$ für $t > 0$ und $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ ist.

Wir werden nun abschließend die Konvergenzaussagen für die Lösungsoperatoren S und S_h aus (2.54) und (3.22) formulieren.

3.17 Korollar. *Es sei $\{\mathcal{T}_h\}_{0<h<1}$ eine uniforme Familie regulärer Triangulierungen von Ω.*
(1): Sei $S(\bullet)u_0 \in C([0, T_{max}(u_0)[, H_0^1(\Omega))$ (bzw. $S_h(\bullet)u_{h0} \in C([0, T_{max}(u_{h0})[, \mathcal{V}_h))$ die zugehörige Lösung der Integralgleichung (2.24) (bzw. (3.15)) zu den Anfangsdaten $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ (bzw. $u_{h0} \in \mathcal{V}_h$) auf dem maximalen Existenzintervall $[0, T_{max}(u_0)[$ (bzw. $[0, T_{max}(u_{h0})[$). Desweiteren seien $R_1 > 0$ und $0 < T_1 < T_2 < \min\{T_{max}(u_0), T_{max}(u_{h0})\}$ mit $\|S(t)u_0\|_{H^1} \leqslant R_1$ und $\|S_h(t)u_{h0}\|_{H^1} \leqslant R_1 \; \forall\, t \in [0, T_2]$. Weiter sei u_{h0} für die folgenden Fälle entsprechend der Bemerkung 3.16i) gewählt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{a)}: \|S_h(t)u_{h0} - S(t)u_0\|_{L^2} &\leqslant C(R_1, T_2) \cdot t^{-\frac{1}{2}} \cdot h^2 && \forall\, t \in]0, T_2] \\ \|S_h(t)u_{h0} - S(t)u_0\|_{L^2} &\leqslant C(R_1, T_1, T_2) \cdot h^2 && \forall\, t \in [T_1, T_2] \\ \text{b)}: \|S_h(t)u_{h0} - S(t)u_0\|_{H^1} &\leqslant C(R_1, T_2) \cdot t^{-\frac{1}{2}} \cdot h && \forall\, t \in]0, T_2] \\ \|S_h(t)u_{h0} - S(t)u_0\|_{H^1} &\leqslant C(R_1, T_1, T_2) \cdot h && \forall\, t \in [T_1, T_2] \end{aligned} \tag{3.53}$$

(2) Falls zusätzlich zu (1) $u_0 \in H^2(\Omega)$ mit $\|u_0\|_{H^2} \leqslant R_2$ ist, so gilt

$$\begin{aligned}
&a): \|S_h(t)u_{h0} - S(t)u_0\|_{L^2} \leqslant C(R_1, R_2, T_2) \cdot h^2 && \forall\, t \in [0, T_2] \\
&b): \|S_h(t)u_{h0} - S(t)u_0\|_{H^1} \leqslant C(R_1, R_2, T_2) \cdot h && \forall\, t \in [0, T_2]
\end{aligned}$$

Beweis. Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen $S(t)u_0$ und $S_h(t)u_{h0}$ auf einem größten gemeinsamen Existenzintervall $[0, T_2[$ folgt aus den Sätzen 2.6 und 3.8. Wählen wir nun u_{h0}, wie es in Bemerkung 3.16i) geschildet wurde, so liefert uns der Konvergenzsatz 3.15 die behaupteten Ergebnisse. □

3.6. Erweiterungen der Finite-Elemente-Methode

In diesem Abschnitt wollen wir abschließend einige Anmerkungen und Hintergrundinformationen der FE-Methode zusammentragen.

Glattheit des Gebiets: Der Einfachheit halber haben wir in diesem Kapitel gefordert, dass das Gebiet Ω ein polygonales konvexes Gebiet der Dimension $d = 1, 2, 3$ sei. Bei der Behandlung von konvexen Gebieten mit glatter (also gekrümmter) anstelle der polygonalen Berandung bekommt man bekanntlich Schwierigkeiten bei der Approximation am Rande des Gebiets. Wie das Verfahren bei einer derartigen Berandung funktioniert, wird in [24] im Abschnitt 3.8 anhand isoparametrischer Elemente verdeutlicht.

Dimension des Gebiets: Die Dimensionseinschränkung $d \leqslant 3$ ist nötig, da die verwendete Interpolationsabschätzung (3.6) bei stückweise linearen finiten Elementen und für Gebiete mit einer Dimension größer 3 ihre Gültigkeit verliert ([6], [24]). Um dies einzusehen, sollte man zum einen beachten, dass die Lösung u im Raum $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ liegt, und zum anderen, dass der Interpolationsoperator I_h auf dem Raum $C(\overline{\Omega})$ definiert ist. Der Einbettungssatz A.17 liefert uns für $d \leqslant 3$ die Inklusion $H^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, weswegen der Interpolationsoperator I_h auf $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ wohldefiniert ist. Für die Dimension $d = 4$ liefert uns der Einbettungssatz A.17 $H^3(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$, woraus sich $H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$ schließen lässt. Daher ist der Interpolationsoperator für $d = 4$ wohldefiniert auf $H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Da die Lösung $u(t)$ für $t > 0$ im Allgemeinen jedoch nicht im Raum $H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ sondern nur im Raum $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ liegt, lässt sich die in diesem Kapitel durchgeführte Theorie auf vierdimensionale Gebiete nicht durchführen.

Regularität der Triangulierung: In diesem Kapitel haben wir von unserer Familie regulärer Triangulierungen gefordert, dass sie uniform ist. Diese Bedingung ist für den Beweis der Interpolationsabschätzung unerlässlich und kann daher auch unter keinen Umständen abgeschwächt werden.

Art der Finite-Elemente: Verwenden wir bei der Konstruktion des Finite-Elemente-Raums anstatt der stückweise linearen Funktionen stückweise polynomiale Funktionen vom Grad $r-1$ mit $r \geqslant 2$, so erhalten wir für Gebiete der Dimension $d = 1, 2, 3$ die lokalen Fehlerabschätzungen ([6], [24])

$$\begin{aligned}
\|I_h v - v\|_{L^2(T)} &\leqslant C_T h_T^r \|v\|_{H^r(T)} && \forall\, T \in \mathcal{T}_h\ \forall\, v \in H^r(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\
\|\nabla(I_h v - v)\|_{L^2(T)} &\leqslant C_T h_T^{r-1} \|v\|_{H^r(T)} && \forall\, T \in \mathcal{T}_h\ \forall\, v \in H^r(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)
\end{aligned}$$

und wegen der Uniformität der Triangulierung die globalen Fehlerabschätzungen

$$\begin{aligned}
\|I_h v - v\|_{L^2(\Omega)} &= \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|I_h v - v\|_{L^2(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} C_T^2 h_T^{2r} \|v\|_{H^r(T)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C h^r \|v\|_{H^r(\Omega)} \quad \forall\, v \in H^r(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\
\|\nabla(I_h v - v)\|_{L^2(\Omega)} &\leqslant C h^{r-1} \|v\|_{H^r(\Omega)} \quad \forall\, v \in H^r(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)
\end{aligned}$$

und damit die allgemeinere **Interpolationsabschätzung**

$$\|I_h v - v\|_{L^2} + h|I_h v - v|_{H^1} \leqslant Ch^r \|v\|_{H^r} \quad \forall\, v \in H^r(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

In diesem Zusammenhang erfüllt der orthogonale Operator P_h die Abschätzung

$$\|P_h v - v\|_{L^2} \leqslant \|I_h v - v\|_{L^2} \leqslant Ch^r \|v\|_{H^r} \quad \forall\, v \in H^r(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

Generell gilt unsere Interpolationsabschätzung auch, wenn wir die linearen Dreieckselemente durch bilineare Viereckselemente ersetzen ([4] Tab.3, [6] Fig.3.1.2).

Randbedingungen: Wir haben auch in diesem Kapitel bei der Behandlung des semilinearen parabolischen Anfangs-Randwertproblems (1.1) ausschließlich eine homogene Dirichlet-Randbedingung gefordert. Es ist dennoch ebenso in diesem Kapitel möglich diese Randbedingung durch eine homogene Neumann-Randbedingung oder eine homogene Robin-Randbedingung zu ersetzen. Die daraus resultierenden Probleme lassen sich auf dieselbe Weise behandeln, verlangt allerdings einige Modifikationen. Beispielsweise verlangt die Wahl einer homogenen Neumann-Randbedingung, dass wir anstelle von $V = H_0^1(\Omega)$ den Raum $V = H^1(\Omega)$ betrachten. Dementsprechend sind anschließend die Bilinearform $a(.,.)$ und der Finite-Elemente-Raum $\mathcal{V}_h$ zu definieren. Dabei ist etwas Vorsicht bei der Anwendung der Greenschen Formel A.40 geboten, da in diesem Fall (wegen der fehlenden Nullrandbedingung) ein zusätzlicher Term auftritt. Desweiteren verliert die Poincaré-Friedrichs-Ungleichung A.12 ihre Gültigkeit und der Finite-Elemente-Raum weist in der Regel keine Nullrandbedingung mehr auf.

Beispiele: Da jedes unserer Standardbeispiele (1.2)-(1.5) die Generalvoraussetzung 2.1 erfüllt, ist folglich die gesamte Theorie dieses Kapitels anwendbar. Dabei ist zu beachten, dass die Familie regulärer Triangulierungen so zu wählen ist, dass sie die Uniformitätsbedingung erfüllt. Weitere Beispiele zur Lösbarkeit und zur räumlichen Diskretisierung mittels stückweise linearer Finiter-Elemente finden sich auch in Anhang A.7.a.

4. Zeitliche Diskretisierung mit implizitem Euler-Verfahren

In diesem Kapitel untersuchen wir die zeitliche Diskretisierung semilinearer parabolischer Anfangs-Randwertprobleme sowie dessen Konvergenzverhalten unter Verwendung des impliziten Euler-Verfahrens. Dazu werden wir zunächst in Abschnitt 4.1 aus dem in Kapitel 3 behandelten räumlich diskretisierten Problem das vollständig diskretisierte Anfangswertproblem herleiten und eine Lösungsdarstellung in Form einer endlichen Summe bestimmen ([16], [17], [18]). In Abschnitt 4.2 beweisen wir die lokale Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der Finite-Elemente und implizite-Euler diskretisierten semilinearen parabolischen Differentialgleichung mit homogener Dirichlet-Randbedingung, indem wir wie zuvor ein Fixpunktargument anwenden ([17], [18]). In Abschnitt 4.3 zeigen dann wir für das vollständig diskretisierte Problem sowohl für glatte als auch für nichtglatte Anfangsdaten einige konvergenztheoretische Resultate bezüglich der L^2- sowie bezüglich der H^1-Norm ([17], [16], [18]). Weiterhin werden wir in diesem gesamten Kapitel annehmen, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein konvexes polygonales Gebiet der Dimension $d = 1, 2$ oder 3 ist.

4.1. Volldiskretisierung mit implizitem Euler-Verfahren

In diesem Abschnitt wollen wir mittels der impliziten Euler-Methode eine vollständige Diskretisierung durchführen ([15] Abs.5, [16] Abs.5, [17] Abs.2.2). Wir werden dabei so vorgehen, dass wir zunächst das volldiskrete homogene lineare AWP formulieren und dessen Lösung herleiten. Im Anschluss daran kommen wir zum volldiskreten nichtlinearen AWP, bei dem wir ähnlich vorgehen werden. Vorweg benötigen wir noch einige Notationen. Im Folgenden bezeichnen $t_n = nk$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ die äquidistanten diskreten Zeitpunkte der kontinuierlichen Zeitachse $\mathbb{R}_+$, wobei $k > 0$ fortan ein fest vorgegebener **zeitlicher Diskretisierungsparameter** ist. Es sei vermerkt, dass wir ausschließlich äquidistante Schrittweiten betrachten. Weiter bezeichnen wir mit U_n die Approximation von $u_n = u(t_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Für den homogenen linearen Fall betrachten wir zunächst das semidiskrete homogene lineare Problem (3.10) in folgender Form

$$\begin{aligned} (u_h)_t &= -A_h u_h && , t \in]0, T[\\ u_h(0) &= u_{h0} \in \mathcal{V}_h && , t = 0 \end{aligned}$$

Gesucht ist hierbei eine Lösung $u_h : [0, T[\longrightarrow \mathcal{V}_h$. Das implizite Euler-Verfahren liefert uns das volldiskrete homogene lineare AWP

$$\begin{aligned} \overline{\partial}_t U_n + A_h U_n &= 0 && , t_n \in]0, T[\\ U_0 &= u_{h0} && , t_n = 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

wobei

$$\overline{\partial}_t U_n := \frac{U_n - U_{n-1}}{k} \tag{4.2}$$

der sogenannte **Rückwärtsdifferenzenquotient** (oder: **rückwärtsgenommener Differenzenquotient**) ist. Eine Lösung U_n des homogenen linearen Problems (4.1) erhält man induktiv durch

$$U_n = U_{n-1} + k \cdot (-A_h U_n)$$

$$\begin{aligned}
&\iff (I + kA_h)U_n \;=\; U_{n-1} \\
&\iff U_n \;=\; (I + kA_h)^{-1}U_{n-1} \\
&\iff U_n \;=\; (I + kA_h)^{-n}U_0
\end{aligned}$$

Das volldiskrete homogene lineare AWP besitzt daher die Lösung

$$E^n_{hk}U_0 \;:=\; (I + kA_h)^{-n}U_0 \;=\; (I + kA_h)^{-n}u_{h0} \tag{4.3}$$

Für den nichtlinearen Fall betrachten wir diesmal das semidiskrete nichtlineare Anfangswertproblem (3.14) in folgender Form

$$\begin{aligned}
(u_h)_t \;&=\; P_hF(u_h) - A_hu_h \qquad &&, t \in]0, T[\\
u_h(0) \;&=\; u_{h0} &&, t = 0
\end{aligned}$$

Das implizite Euler-Verfahren liefert uns analog das volldiskrete nichtlineare AWP

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}_tU_n + A_hU_n \;&=\; P_hF(U_n) \quad &&, t_n \in]0, T[\\
U_0 \;&=\; u_{h0} &&, t_n = 0
\end{aligned} \tag{4.4}$$

wobei auch hier $\overline{\partial}_tU_n$ den Rückwärtsdifferenzenquotienten darstellt. Eine andere Darstellung des nichtlinearen Problems (4.4) erhalten wir auch hier induktiv durch

$$\begin{aligned}
&(I + kA_h)U_n \\
&= U_{n-1} + k \cdot (P_hF(U_n) - A_hU_n) \\
&= (I + kA_h)^{-1}[U_{n-2} + kP_hF(U_{n-1})] + kP_hF(U_n) \\
&= (I + kA_h)^{-1}U_{n-2} + k \cdot [(I + kA_h)^{-1}P_hF(U_{n-1}) + P_hF(U_n)] \\
&= (I + kA_h)^{-(n-1)}U_0 + k \cdot \sum_{j=1}^{n}(I + kA_h)^{-(n-j)}P_hF(U_j)
\end{aligned}$$

Aufgrund der positiven Definitheit von A_h ist $(I + kA_h)$ invertierbar und die Linksmultiplikation mit $(I + kA_h)^{-1}$ liefert

$$U_n \;=\; (I + kA_h)^{-n}U_0 + k \cdot \sum_{j=1}^{n}(I + kA_h)^{-(n-j+1)}P_hF(U_j)$$

Verwenden wir die Operatorschreibweise aus (4.3), indem wir $(I + kA_h)^{-n}$ durch den volldiskreten homogenen linearen Lösungsoperator E^n_{hk} ersetzen, so erhalten wir eine Lösungsdarstellung für das nichtlineare Problem (4.4)

$$U_n \;=\; E^n_{hk}u_{h0} + k \cdot \sum_{j=1}^{n} E^{n-j+1}_{hk}P_hF(U_j) \quad \forall\, t_n \geqslant 0 \tag{4.5}$$

Wie man sieht, haben wir an dieser Stelle, im Gegensatz zu den Integralgleichungen der zwei vorherigen Kapitel, jetzt eine endliche Summationsgleichung vorliegen, mit der wir auch in diesem Kapitel hauptsächlich arbeiten werden.

Zum Abschluss dieses Abschnitts werfen wir erneut die einige Fragen in den Raum: Ist die Summationsgleichung (4.5) eindeutig lösbar in $\mathcal{V}_h$? Falls sie es ist, so sind $\overline{\partial}_tU_n$ und A_hU_n wohldefiniert und die Lösung der Summationsgleichung (4.5) löst das zugehörige AWP (4.4). Desweiteren sollten wir uns fragen, ob die Lösung der Summationsgleichung (4.5) für $k \longrightarrow 0$ und für $h \longrightarrow 0$ gegen die exakte Lösung konvergiert, also gegen die Lösung der Integralgleichung (2.24). Die Beantwortung dieser Fragen ist das Ziel der folgenden zwei Abschnitte.

4.2. Existenz und Eindeutigkeit

Für den Beweis der Existenz und Eindeutigkeit einer vollständig diskretisierten - d.h. einer räumlich und zeitlich diskretisierten - Lösung $U : \{t_n = nk \mid n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } t_n < T\} \longrightarrow \mathcal{V}_h$ für die Summationsgleichung (4.5) benötigen wir auch hier vorab eine sogenannte *volldiskrete Glättungseigenschaft* bezüglich des Lösungsoperators E^n_{hk} aus (4.3) für das volldiskrete homogene lineare AWP (4.1). Es bezeichne auch hier $A_h := -\triangle_h$ den diskreten negativen Laplace-Operator aus (3.9). Da A_h selbstadjungiert und positiv (uniform in h) ist, erhalten wir ein diskretes Analogon zu (2.31) und (3.18).

4.1 Lemma.

$$\|\overline{\partial}^l_t E^n_{hk} v_h\|_{L^2} = \|A^l_h E^n_{hk} v_h\|_{L^2} \leqslant C_l \cdot t_n^{-l} \cdot \|v_h\|_{L^2} \quad \forall\, v_h \in \mathcal{V}_h,\ t_n > t_l \geqslant 0,\ l \geqslant 0 \tag{4.6}$$

Beweis. siehe [11], [34] Lem.7.3. □

Damit können wir jetzt - analog zu (2.33) und (3.19) - eine Glattheitseigenschaft für den Operator E_{hk} formulieren ([16] (5.2), [17] (2.20)).

4.2 Lemma (GLÄTTUNGSEIGENSCHAFTEN VON E_{hk}). *Für jedes $l \in \{0,1\}$ und für jedes $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $-1 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$ gibt es eine Konstante $C = C(l,a,b) > 0$, so dass die Abschätzung*

$$\|\overline{\partial}^l_t E^n_{hk} v_h\|_{H^b} \leqslant C \cdot t_n^{-l-\frac{(b-a)}{2}} \cdot \|v_h\|_{H^a} \quad \forall\, v_h \in \mathcal{V}_h\ \forall\, t_n \geqslant t_{l+\frac{(b-a)}{2}} \tag{4.7}$$

erfüllt ist. Falls $l = 0$ und $a = b$, so gilt die Ungleichung (4.7) für $t_n \geqslant 0$.

Beweis. Der Beweis folgt auch hier direkt aus (3.16), (3.17) sowie (4.6) und lässt sich wortwörtlich von (2.33) und (3.19) übernehmen. □

Auch im diskreten Fall können wir aufgrund der Abschätzung (4.7) den Beweis des nun folgenden Existenz- und Eindeutigkeitssatzes von seinem Vorgänger im kontinuierlichen bzw. semidiskreten Fall wortwörtlich übernehmen ([17] Theo.2.4).

4.3 Satz (EXISTENZ- UND EINDEUTIGKEITSSATZ). *(1) Für jeden Radius $R > 0$ gibt es einen Zeitpunkt $0 < T(R) < \infty$, so dass die Summationsgleichung (4.5) für jede Anfangswertfunktion $U_0 = u_{h0} \in \mathcal{V}_h$ mit $\|U_0\|_{H^1} \leqslant R$ eine eindeutige Lösung $U : \{t_n = nk \mid n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } t_n \leqslant T(R)\} \longrightarrow \mathcal{V}_h$ besitzt.*
(2) Weiter existiert eine Konstante $C > 0$ mit der Eigenschaft

$$\max_{t_n \in [0,T(R)]} \|U_n\|_{H^1} \leqslant C \cdot R$$

(3): Seien $U_0 = u_{h0} \in \mathcal{V}_h$, $\rho > 0$ und $N > 0$ gegeben. Falls für jede Lösung U auf $[0, Mk] \subset [0, Nk]$ von (4.5) die a-priori Abschätzung

$$\|U_n\|_{H^1} \leqslant \rho \quad \forall\, n = 0, \ldots, M$$

gilt, so existiert eine eindeutige Lösung U von (4.5) auf dem Intervall $[0, Nk]$.

Beweis. Die Behauptungen erfolgen ähnlich wie in den Beweisen von Satz 2.6 und Satz 3.8. Zusätzlich verlangt der Beweis die verallgemeinerte Summationsabschätzung A.45. Insbesondere stimmt die Konstante $T(R)$ aus diesem Beweis mit dem $T(R)$ aus den Beweisen von Satz 2.6 und Satz 3.8 überein. □

Wir wissen daher, dass die Summationsgleichung (4.5) genau eine eindeutige Lösung U_n für Anfangswertfunktionen $U_0 = u_{h0} \in \mathcal{V}_h$ besitzt. Daher bezeichnen wir mit

$$\begin{aligned} S_{hk} &: \mathbb{T}_k \times \mathcal{V}_h \supset \mathcal{D}(S_{hk}) \longrightarrow \mathcal{V}_h \quad \text{mit} \quad S_{hk}(t_n)U_0 := U_n \\ \mathcal{D}(S_{hk}) &:= \{(t_n, U_0) \in \mathbb{T}_k \times \mathcal{V}_h \mid t \in [0, T_{\max}(U_0)[\} \end{aligned}$$

den maximal fortgesetzten volldiskreten Lösungsoperator von (4.4), wobei U_n die eindeutige maximal fortgesetzte Lösung der Summationsgleichung (4.5) mit maximalen Existenzintervall $[0, T_{\max}(U_0)[$ sei. In diesem Zusammenhang bezeichne $\mathbb{T}_k := \{t_n = nk \mid n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } t_n \leqslant T\} \subset \mathbb{R}_+$ die diskretisierte Zeitachse. Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, dass diese Lösung $S_{hk}(t_n)U_0$ für kleiner werdende h, kleiner werdende k sowie für eine geeignet gewählte approximierte Anfangswertfunktion U_0 gegen die Lösung $S(t)u_0$ der Integralgleichung (2.20) und somit gegen die Lösung des AWP's (2.11) konvergiert.

4.3. Konvergenz

In diesem Abschnitt kommen wir nun zur Konvergenzanalyse der Finite-Elemente-Methode zusammen mit dem impliziten Euler-Verfahren ([16], [17]). Kurzum ist das Ziel hierbei, unter geeigneten Bedingungen eine Abschätzung der Form

$$\|U_n - u(t_n)\| \leqslant C(t_n, R) \cdot (h^s + k^q)$$

zu finden, wobei $s, q \in \mathbb{N}$ seien. Es handelt sich dabei um eine Konvergenzeigenschaft zwischen der exakten Lösung $u : [0, T[\longrightarrow H_0^1(\Omega)$ von (2.24) und der Näherungslösung $U : \{t_n = nk \mid n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } t_n \leqslant T\} \longrightarrow \mathcal{V}_h$ von (4.5). $\|U_n - u(t_n)\|$ wird auch an dieser Stelle als **Approximationsfehler** oder **Konvergenzfehler**, s als **räumliche Konvergenzordnung** und q als **zeitliche Konvergenzordnung** bezeichnet. Wir erwähnen nochmals, das sowohl der Konvergenzfehler als auch die Konvergenzordnungen von der Norm abhängen, in der wir den Fehler messen. Die Berechnungen werden wir wie üblich in der L^2- und in der H^1-Norm durchführen. Dazu verwenden wir wie im semidiskreten Fall den folgenden Fehlerzerlegungsschritt

$$\|\underbrace{U_n - u_n}_{=:e_n}\| \leqslant \|\underbrace{U_n - R_h u_n}_{=:\theta_n}\| + \|\underbrace{R_h u_n - u_n}_{=:\rho_n}\|$$

Hierbei lässt sich die Konsistenzabschätzung für ρ_n aus Korollar 3.13 übernehmen. Die Konsistenzabschätzung der Zeitableitung von $\rho(t) = R_h u(t) - u(t)$ muss jedoch modifiziert werden, da wir die Zeitableitung in diesem Kapitel durch den Rückwärtsdifferenzenquotienten ersetzt haben.

4.4 Satz (KONSISTENZ DES IMPLIZITEN EULER-VERFAHRENS).
(1): Sei $u \in C([0, T_{max}(u_0)[, H_0^1(\Omega))$ die zugehörige Lösung der Integralgleichung (2.24) zu den Anfangsdaten $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ auf dem maximalen Existenzintervall $[0, T_{max}(u_0)[$. Desweiteren seien $R_1 > 0$ und $0 < t_0 < T_{max}(u_0)$ mit $\|u(t)\|_{H^1} \leqslant R_1$ $\forall\, t \in [0, t_0]$. Dann gelten für $\rho_n := R_h u_n - u_n$ sowie für $j = 0, 1$ und $s = 1, 2$ die folgenden Aussagen

$$\text{a)}: \|\rho_n\|_{H^j} \leqslant C \cdot h^{s-j} \cdot \|u_n\|_{H^s} \leqslant C(R_1, t_0) \cdot h^{s-j} \cdot t_n^{-\frac{(s-1)}{2}} \qquad \forall\, t_n \in]0, t_0] \tag{4.8}$$

$$\text{b)}: \|\overline{\partial}_t \rho_n\|_{L^2} \leqslant C(R_1, t_0) \cdot h^s \cdot t_n^{-1-\frac{(s-1)}{2}} \qquad \forall\, t_n \in [t_2, t_0] \tag{4.9}$$

(2): Falls zusätzlich zu (1) $u_0 \in H^2(\Omega)$ mit $\|u_0\|_{H^2} \leqslant R_2$ ist, so gilt

$$\text{a)}: \|\rho_n\|_{H^j} \leqslant C \cdot h^{s-j} \cdot \|u_n\|_{H^s} \leqslant C(R_1, R_2, t_0) \cdot h^{s-j} \qquad \forall\, t_n \in [0, t_0] \tag{4.10}$$

$$\text{b)}: \|\overline{\partial}_t \rho_n\|_{L^2} \leqslant C(R_1, R_2, t_0) \cdot h^s \cdot t_n^{-\frac{s}{2}} \qquad \forall\, t_n \in [t_2, t_0] \tag{4.11}$$

Beweis. *zu (1):* Die Abschätzung (4.8) folgt direkt aus (3.35) in Korollar 3.13. Für die Abschätzung (4.9) erhalten wir zunächst

$$\overline{\partial}_t \rho_n \overset{(4.2)}{=} \frac{\rho_n - \rho_{n-1}}{k} = k^{-1} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \rho_t(t)\, dt \quad \forall\, n \geqslant 1$$

Daraus folgt unmittelbar

$$\|\overline{\partial}_t\rho_n\|_{L^2} = \|k^{-1}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\rho_t(t)\,dt\|_{L^2} \leqslant k^{-1}(t_n-t_{n-1})\max_{t\in[t_{n-1},t_n]}\|\rho_t(t)\|_{L^2} \tag{4.12}$$
$$= \max_{t\in[t_{n-1},t_n]}\|\rho_t(t)\|_{L^2} \quad \forall n \geqslant 1$$

Die Abschätzung (4.9) folgt nun aus (4.12), (3.36) und aus der Tatsache $\frac{1}{2}t_n \leqslant t_{n-1} \leqslant t_n$ für $n \geqslant 2$

$$\|\overline{\partial}_t\rho_n\|_{L^2} \overset{(4.2)}{\leqslant} \max_{t\in[t_{n-1},t_n]}\|\rho_t(t)\|_{L^2} \overset{(3.36)}{\leqslant} \max_{t\in[t_{n-1},t_n]} C(R_1,t_0)h^s t^{-1-\frac{(s-1)}{2}}$$
$$= C(R_1,t_0)h^s t_{n-1}^{-1-\frac{(s-1)}{2}} \leqslant C(R_1,t_0)h^s t_n^{-1-\frac{(s-1)}{2}} \quad \forall n\geqslant 2\,\forall t_n\in[t_2,t_0]$$

zu (2): Die erste Abschätzung (4.10) folgt wieder direkt aus (3.37) in Korollar 3.13. Die zweite Abschätzung (4.11) erhalten wir aus (4.12), (3.38) und wieder aus der Tatsache $\frac{1}{2}t_n \leqslant t_{n-1} \leqslant t_n$ für $n \geqslant 2$

$$\|\overline{\partial}_t\rho_n\|_{L^2} \overset{(4.2)}{\leqslant} \max_{t\in[t_{n-1},t_n]}\|\rho_t(t)\|_{L^2} \overset{(3.38)}{\leqslant} \max_{t\in[t_{n-1},t_n]} C(R_1,R_2,t_0)h^s t^{-\frac{s}{2}}$$
$$= C(R_1,R_2,t_0)h^s t_{n-1}^{-\frac{s}{2}} \leqslant C(R_1,R_2,t_0)h^s t_n^{-\frac{s}{2}} \quad \forall n\geqslant 2\,\forall t_n\in[t_2,t_0]$$

□

Das folgende Lemma liefert uns Abschätzungen für den Fehler, der beim Ersetzen der Zeitableitung durch den Rückwärtsdifferenzenquotienten entsteht ([16]). Diese Ungleichungen werden wir für unseren darauffolgenden Stabilitätssatz benötigen. In diesem Zusammenhang bezeichne $A := -\triangle$ weiterhin den kontinuierlichen negativen Laplace-Operator.

4.5 Lemma. *(1): Sei $u \in C([0,T_{max}(u_0)[,H_0^1(\Omega))$ die zugehörige Lösung der Integralgleichung (2.24) zu den Anfangsdaten $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ auf dem maximalen Existenzintervall $[0,T_{max}(u_0)[$. Desweiteren seien $R_1 > 0$ und $0 < t_0 < T_{max}(u_0)$ mit $\|u(t)\|_{H^1} \leqslant R_1\ \forall t\in[0,t_0]$. Dann gelten für $s = 0$ und $l = 0$ bzw. für $s = 1, 2$ und $l = 1$ sowie für $k > 0$ die folgenden Aussagen*

$$a): \|A^{-l}(u_t(t_j)-\overline{\partial}_t u_j)\|_{H^s} \leqslant C(R_1,t_0)\cdot t_j^{l-1-\frac{(s-1)}{2}} \quad \forall t_j\in]0,t_0] \tag{4.13}$$
$$b): \|A^{-l}(u_t(t_j)-\overline{\partial}_t u_j)\|_{L^2} \leqslant C(R_1,t_0)\cdot k\cdot t_j^{l-\frac{3}{2}} \quad \forall t_j\in]0,t_0] \tag{4.14}$$

(2): Falls zusätzlich zu (1) $u_0 \in H^2(\Omega)$ mit $\|u_0\|_{H^2} \leqslant R_2$ ist, so gilt

$$a): \|A^{-l}(u_t(t_j)-\overline{\partial}_t u_j)\|_{H^s} \leqslant C(R_1,R_2,t_0) \quad \forall t_j\in]0,t_0] \tag{4.15}$$
$$b): \|A^{-l}(u_t(t_j)-\overline{\partial}_t u_j)\|_{L^2} \leqslant C(R_1,R_2,t_0)\cdot k\cdot t_j^{l-1} \quad \forall t_j\in]0,t_0] \tag{4.16}$$

Beweis. *zu (1):* Zunächst erhalten wir aus (4.2), der partiellen Integration für $l\in\{0,1\}$ und der Tatsache $t_j - t_{j-1} = k$

$$\begin{aligned}
k^{-1}\int_{t_{j-1}}^{t_j}(t-t_{j-1})A^{-l}u_{tt}(t)\,dt &= k^{-1}\left(\Big[(t-t_{j-1})A^{-l}u_t(t)\Big]_{t_{j-1}}^{t_j} - \int_{t_{j-1}}^{t_j}A^{-l}u_t(t)\,dt\right)\\
&= k^{-1}((t_j-t_{j-1})A^{-l}u_t(t_j) - A^{-l}u(t_j) + A^{-l}u(t_{j-1}))\\
&= A^{-l}\left(u_t(t_j) - \frac{u(t_j)-u(t_{j-1})}{k}\right)\\
&\overset{(4.2)}{=} A^{-l}(u_t(t_j)-\overline{\partial}_t u_j)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Aus (4.17), der Hölderschen Ungleichung A.43 (mit $\frac{1}{2} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{2}$) und abermals aus $t_j - t_{j-1} = k$ erhalten wir für $l \in \{0, 1\}$

$$\begin{aligned}
\|A^{-l}(u_t(t_j) - \overline{\partial}_t u_j)\|_{L^2} &\overset{(4.17)}{=} \|k^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t - t_{j-1}) A^{-l} u_{tt}(t)\, dt\|_{L^2} \\
&\leqslant k^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|(t - t_{j-1}) A^{-l} u_{tt}(t)\|_{L^2}\, dt \\
&\overset{\text{A.43}}{\leqslant} k^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|t - t_{j-1}\|_{L^\infty} \|A^{-l} u_{tt}(t)\|_{L^2}\, dt \\
&\leqslant k^{-1}(t_j - t_{j-1}) \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|A^{-l} u_{tt}(t)\|_{L^2}\, dt \\
&\leqslant k^{-1}(t_j - t_{j-1})^2 \max_{t \in [t_{j-1}, t_j]} \|A^{-l} u_{tt}(t)\|_{L^2} \\
&= k \max_{t \in [t_{j-1}, t_j]} \|A^{-l} u_{tt}(t)\|_{L^2}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Für $l = 0$ erhalten wir die Aussage mithilfe von (2.41) aus (4.18)

$$\begin{aligned}
\|u_t(t_j) - \overline{\partial}_t u_j\|_{L^2} &\overset{(4.18)}{\leqslant} k \max_{t \in [t_{j-1}, t_j]} \|u_{tt}(t)\|_{L^2} \overset{(2.41)}{\leqslant} C(R_1, t_0) k \max_{t \in [t_{j-1}, t_j]} t^{-\frac{3}{2}} \\
&\leqslant C(R_1, t_0) k t_{j-1}^{-\frac{3}{2}} \leqslant C(R_1, t_0) k t_j^{-\frac{3}{2}} \quad \forall\, t_j \in [t_2, t_0]
\end{aligned}$$

Hierbei wurde $\frac{1}{2} t_j \leqslant t_{j-1} \leqslant t_j$ verwendet. Für $l = 1$ erhalten wir die Aussage mithilfe von (2.5), (2.30), (2.40), $\|\bullet\|_{H^{-1}} \leqslant \|\bullet\|_{L^2}$ (siehe: A.1.b) und Differentiation nach t von (2.20) aus (4.18)

$$\begin{aligned}
\|A^{-1}(u_t(t_j) - \overline{\partial}_t u_j)\|_{L^2} &\overset{(4.18)}{\leqslant} k \max_{t \in [t_{j-1}, t_j]} \|A^{-1} u_{tt}(t)\|_{L^2} \\
&\overset{(2.20)}{\leqslant} k \max_{t \in [t_{j-1}, t_j]} (\|A^{-1} dF(u(t)) u_t(t)\|_{L^2} + \|u_t(t)\|_{L^2}) \\
&\overset{(2.30)}{\leqslant} k \max_{t \in [t_{j-1}, t_j]} (C\|A^{-\frac{1}{2}} dF(u(t)) u_t(t)\|_{H^{-1}} + \|u_t(t)\|_{L^2}) \\
&\leqslant k \max_{t \in [t_{j-1}, t_j]} (C\|A^{-\frac{1}{2}} dF(u(t)) u_t(t)\|_{L^2} + \|u_t(t)\|_{L^2}) \\
&\overset{(2.30)}{\leqslant} k \max_{t \in [t_{j-1}, t_j]} (C\|dF(u(t)) u_t(t)\|_{H^{-1}} + \|u_t(t)\|_{L^2}) \\
&\overset{(2.5)}{\leqslant} k \max_{t \in [t_{j-1}, t_j]} (C(R_1)\|u_t(t)\|_{L^2} + \|u_t(t)\|_{L^2}) \\
&\overset{(2.40)}{\leqslant} C(R_1, t_0) k \max_{t \in [t_{j-1}, t_j]} t^{-\frac{1}{2}} \\
&\leqslant C(R_1, t_0) k t_{j-1}^{-\frac{1}{2}} \leqslant C(R_1, t_0) k t_j^{-\frac{1}{2}} \quad \forall\, t_j \in [t_2, t_0]
\end{aligned}$$

Damit haben wir (4.14) für $t_j \in [t_2, t_0]$ gezeigt. Die Aussage (4.13) für $l = s = 0$ folgt direkt aus (4.14) für $l = 0$ und der Tatsache $k \leqslant t_j$ für $j \geqslant 1$

$$\|u_t(t_j) - \overline{\partial}_t u_j\|_{L^2} \overset{(4.14)}{\leqslant} C(R_1, t_0) k t_j^{-\frac{3}{2}} \leqslant C(R_1, t_0) t_j^{-\frac{1}{2}} \quad \forall\, t_j \in [t_2, t_0]$$

Für $l = s = 1$ folgt die Aussage (4.13) aus (2.20), (2.29), (2.30), (2.4) und (2.39)

$$\begin{aligned}
\|A^{-1}(u_t(t_j) - \overline{\partial}_t u_j)\|_{H^1} &\leqslant \max_{t \in [t_{j-1}, t_j]} \|A^{-1} u_t(t)\|_{H^1} \\
&\overset{(2.20)}{\leqslant} \max_{t \in [t_{j-1}, t_j]} (\|A^{-1} F(u(t))\|_{H^1} + \|u(t)\|_{H^1})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{(2.29)}{\leqslant} \max_{t\in[t_{j-1},t_j]}(C\|A^{-\frac{1}{2}}F(u(t))\|_{L^2}+\|u(t)\|_{H^1})\\
&\overset{(2.30)}{\leqslant} \max_{t\in[t_{j-1},t_j]}(C\|F(u(t))\|_{H^{-1}}+\|u(t)\|_{H^1})\\
&\leqslant \max_{t\in[t_{j-1},t_j]}(C\|F(u(t))\|_{L^2}+\|u(t)\|_{H^1})\\
&\overset{(2.4),(2.39)}{\leqslant} (C(R_1)+C(R_1,t_0)) = C(R_1,t_0) \quad \forall t_j\in[t_2,t_0]
\end{aligned}
$$

Für $l=1$ und $s=2$ erhalten wir (4.13) aus (2.20), (2.26), (2.4) und (2.39)

$$
\begin{aligned}
\|A^{-1}(u_t(t_j)-\overline{\partial}_t u_j)\|_{H^2} &\leqslant \max_{t\in[t_{j-1},t_j]}\|A^{-1}u_t(t)\|_{H^2}\\
&\overset{(2.20)}{\leqslant} \max_{t\in[t_{j-1},t_j]}(\|A^{-1}F(u(t))\|_{H^2}+\|u(t)\|_{H^2})\\
&\overset{(2.26)}{\leqslant} \max_{t\in[t_{j-1},t_j]}(C\|F(u(t))\|_{L^2}+\|u(t)\|_{H^2})\\
&\overset{(2.4),(2.39)}{\leqslant} \max_{t\in[t_{j-1},t_j]}(C(R_1)+C(R_1,t_0)t^{-\frac{1}{2}})\\
&= \max_{t\in[t_{j-1},t_j]}((C(R_1)t^{-\frac{1}{2}}+C(R_1,t_0))t^{-\frac{1}{2}})\\
&\leqslant C(R_1,t_0)\max_{t\in[t_{j-1},t_j]}t^{-\frac{1}{2}}\\
&\leqslant C(R_1,t_0)t_{j-1}^{-\frac{1}{2}} \leqslant C(R_1,t_0)t_j^{-\frac{1}{2}} \quad \forall t_j\in[t_2,t_0]
\end{aligned}
$$

Damit haben wir auch (4.13) für $t_j\in[t_2,t_0]$ gezeigt. Schlussendlich zeigen wir, dass die Ungleichungen (4.13) und (4.14) auch für $j=1$ gelten. Mit $t_1=k$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\|A^{-l}(u_t(t_1)-\overline{\partial}_t u_1)\|_{H^s} &\overset{(4.17)}{\leqslant} k^{-1}\int_0^k t\|A^{-l}u_{tt}(t)\|_{H^s}\,dt\\
&\leqslant C(R_1,t_0)k^{-1}\int_0^k t^{l-1-\frac{(s-1)}{2}}\,dt\\
&= C(R_1,t_0)k^{l-1-\frac{(s-1)}{2}} = C(R_1,t_0)t_1^{l-1-\frac{(s-1)}{2}}
\end{aligned}
$$

Die mittlere Ungleichung gilt dabei wegen (2.26) und (2.41).
zu (2): Ersetzen wir im Beweis von Teil (1) die Abschätzungen (2.39) durch (2.42), (2.40) durch (2.43) sowie (2.41) durch (2.44), so erhalten wir die Ungleichungen (4.15) und (4.16). □

4.6 Satz (STABILITÄT DES IMPLIZITEN EULER-VERFAHRENS).
(1): Sei $u\in C([0,T_{max}(u_0)[,H_0^1(\Omega))$ (bzw. $U:\{t_n=nk\mid n\in\mathbb{N}_0$ und $t_n<T_{max}(U_0)\}\longrightarrow\mathcal{V}_h$) die zugehörige Lösung der Integralgleichung (2.24) (bzw. der Summationsgleichung (4.5)) zu den Anfangsdaten $u_0\in H_0^1(\Omega)$ (bzw. $U_0\in\mathcal{V}_h$) auf dem maximalen Existenzintervall $[0,T_{max}(u_0)[$ (bzw. $[0,T_{max}(U_0)[$). Desweiteren seien $R_1>0$ und $0<t_0<\min\{T_{max}(u_0),T_{max}(U_0)\}$ mit $\|u(t)\|_{H^1}\leqslant R_1$ und $\|U_n\|_{H^1}\leqslant R_1$ $\forall t,t_n\in[0,t_0]$. Dann gilt für $\theta_n:=U_n-R_hu_n\in\mathcal{V}_h$ und für $s=1,2$

$$
\begin{aligned}
\text{a): } \|\theta_n\|_{L^2} &\leqslant C(R_1,t_0)\cdot(\|u_{h0}-P_hu_0\|_{L^2}+h^st_n^{-\frac{(s-1)}{2}}+kt_n^{-\frac{1}{2}})\\
&\quad + C(R_1)k\cdot\sum_{j=1}^n t_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}}\|U_j-u_j\|_{L^2} \quad \forall t_n\in]0,t_0]
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{b): } t_n\|\theta_n\|_{H^1} &\leqslant C(R_1,t_0)(\|u_{h0}-u_0\|_{L^2}t_n^{\frac{1}{2}}+ht_n^{\frac{1}{2}}+k)\\
&\quad + C(R_1)\sum_{j=1}^n(t_j\|U_j-u_j\|_{H^1})t_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}} \quad \forall t_n\in]0,t_0]
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

(2): Falls zusätzlich zu (1) $u_0 \in H^2(\Omega)$ mit $\|u_0\|_{H^2} \leqslant R_2$ ist, so gilt

$$\text{a): } \|\theta_n\|_{L^2} \leqslant C(R_1,R_2,t_0)\cdot(\|u_{h0}-P_hu_0\|_{L^2}+h^s+k) + C(R_1)k\cdot\sum_{j=1}^{n} t_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}}\|U_j-u_j\|_{L^2} \quad \forall\, t_n \in]0,t_0] \tag{4.21}$$

$$\text{b): } \|\theta_n\|_{H^1} \leqslant C(R_1,R_2,t_0)\cdot(\|u_{h0}-u_0\|_{H^1}+h+kt_n^{-\frac{1}{2}}) + C(R_1)k\cdot\sum_{j=1}^{n} t_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}}\|U_j-u_j\|_{H^1} \quad \forall\, t_n \in]0,t_0] \tag{4.22}$$

Beweis. Zunächst schauen wir, welches AWP die Funktion θ_n löst. Aus (4.2), (4.4), (3.43), (2.20), den Definitionen von ρ_n und θ_n sowie aus der Linearität von P_h erhalten wir

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}_t\theta_n + A_h\theta_n &\overset{(4.2)}{=} \left[\frac{U_n-U_{n-1}}{k}+A_hU_n\right]-\left[\frac{R_hu_n-R_hu_{n-1}}{k}+A_hR_hu_n\right]\\
&\overset{(4.4)}{=} P_hF(U_n)-\left[\frac{R_hu_n-R_hu_{n-1}}{k}+A_hR_hu_n\right]\\
&\overset{(3.43)}{=} P_hF(U_n)-\left[\frac{R_hu_n-R_hu_{n-1}}{k}+P_hAu_n\right]\\
&\overset{(2.20)}{=} P_hF(U_n)-\left[P_h\left(\frac{R_hu_n-R_hu_{n-1}}{k}\right)+P_h(F(u_n)-u_t(t_n))\right]\\
&= P_hF(U_n)-\left[P_h\left(\frac{\rho_n-\rho_{n-1}}{k}+\frac{u_n-u_{n-1}}{k}\right)+P_h(F(u_n)-u_t(t_n))\right]\\
&= P_h(F(U_n)-F(u_n)-\overline{\partial}_t\rho_n+u_t(t_n)-\overline{\partial}_tu_n) \quad \forall\, t_n\in]0,t_0]
\end{aligned}$$

Damit erfüllt θ_n (wegen $\theta_0 = U_0 - R_hu_0 \in \mathcal{V}_h$) das AWP

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}_t\theta_n + A_h\theta_n &= P_h(F(U_n)-F(u_n)-\overline{\partial}_t\rho_n+u_t(t_n)-\overline{\partial}_tu_n) &&, t_n\in]0,t_0]\\
\theta_0 &= U_0-R_hu_0 &&, t_n = 0
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Die Lösung des AWP's (4.23) ist wegen der Summationsgleichung (4.5) gegeben durch

$$\theta_n = E_{hk}^n\theta_0 + k\sum_{j=1}^{n}E_{hk}^{n-j+1}P_h(F(U_j)-F(u_j)-\overline{\partial}_t\rho_j+u_t(t_j)-\overline{\partial}_tu_j) \quad \forall\, t_n\in[0,t_0] \tag{4.24}$$

zu (1)a): Es bezeichne von nun an n_2 den größten ganzzahligen Anteil von $\frac{n}{2}$, d.h. $n_2 := \lfloor\frac{n}{2}\rfloor$. Unter Verwendung der partiellen Summationsformel A.44 bekommen wir

$$-k\sum_{j=1}^{n_2}E_{hk}^{n-j+1}P_h\overline{\partial}_t\rho_j = E_{hk}^nP_h\rho_0 - E_{hk}^{n-n_2}P_h\rho_{n_2} - k\sum_{j=1}^{n_2}(\overline{\partial}_tE_{hk}^{n-j+1})P_h\rho_j \quad \forall\, n_2\geqslant 0$$

Damit können wir θ_n auch schreiben als

$$\begin{aligned}
\theta_n &= E_{hk}^nP_he_0 - E_{hk}^{n-n_2}P_h\rho_{n_2} - k\sum_{j=1}^{n_2}(\overline{\partial}_tE_{hk}^{n-j+1})P_h\rho_j - k\sum_{j=n_2+1}^{n}E_{hk}^{n-j+1}P_h\overline{\partial}_t\rho_j\\
&\quad + k\sum_{j=1}^{n}A_h^{\frac{1}{2}}E_{hk}^{n-j+1}A_h^{-\frac{1}{2}}P_h(F(U_j)-F(u_j)) + k\sum_{j=1}^{n_2}A_hE_{hk}^{n-j+1}(A_h^{-1}P_h-A^{-1})(u_t(t_j)-\overline{\partial}_tu_j)\\
&\quad + k\sum_{j=1}^{n_2}A_hE_{hk}^{n-j+1}P_hA^{-1}(u_t(t_j)-\overline{\partial}_tu_j) + k\sum_{j=n_2+1}^{n}E_{hk}^{n-j+1}P_h(u_t(t_j)-\overline{\partial}_tu_j)\\
&=: \sum_{i=1}^{8}L_i \quad \forall\, t_n\in[0,t_0]
\end{aligned}$$

Wir werden nun jeden dieser acht Summanden der Reihe nach in der L^2-Norm abschätzen. Für die ersten fünf Summanden benötigen wir die verallgemeinerte Summationsabschätzung A.45, (2.6), (3.20), (3.21), (4.6), (4.8), (4.9) und die Tatsachte $\frac{1}{2}t_n \leqslant t_{n-1} \leqslant t_n \; \forall\, n \geqslant 2$. Wir erhalten

$$
\begin{aligned}
\|L_1\|_{L^2} &= \|E_{hk}^n P_h e_0\|_{L^2} \overset{(4.6)}{\leqslant} C\|P_h e_0\|_{L^2} \\
\|L_2\|_{L^2} &= \|E_{hk}^{n-n_2} P_h \rho_{n_2}\|_{L^2} \overset{(4.6)}{\leqslant} C\|P_h \rho_{n_2}\|_{L^2} \overset{(3.20)}{\leqslant} C\|\rho_{n_2}\|_{L^2} \overset{(4.8)}{\leqslant} C(R_1,t_0)h^s t_{n_2}^{-\frac{(s-1)}{2}} \\
&\leqslant C(R_1,t_0)h^s t_n^{-\frac{(s-1)}{2}} \\
\|L_3\|_{L^2} &\leqslant k\sum_{j=1}^{n_2} \|(\overline{\partial}_t E_{hk}^{n-j+1})P_h\rho_j\|_{L^2} \overset{(4.6)}{\leqslant} k\sum_{j=1}^{n_2} Ct_{n-j+1}^{-1}\|P_h\rho_j\|_{L^2} \\
&\overset{(3.20)}{\leqslant} k\sum_{j=1}^{n_2} Ct_{n-j+1}^{-1}\|\rho_j\|_{L^2} \overset{(4.8)}{\leqslant} C(R_1,t_0)kh^s\sum_{j=1}^{n_2} t_{n-j+1}^{-1} t_j^{-\frac{(s-1)}{2}} \\
&\overset{A.45}{\leqslant} C(R_1,t_0)h^s t_n^{-\frac{(s-1)}{2}} \\
\|L_4\|_{L^2} &\leqslant k\sum_{j=n_2+1}^{n} \|E_{hk}^{n-j+1}P_h\overline{\partial}_t\rho_j\|_{L^2} \overset{(4.6)}{\leqslant} k\sum_{j=n_2+1}^{n} C\|P_h\overline{\partial}_t\rho_j\|_{L^2} \\
&\overset{(3.20)}{\leqslant} k\sum_{j=n_2+1}^{n} C\|\overline{\partial}_t\rho_j\|_{L^2} \overset{(4.9)}{\leqslant} C(R_1,t_0)kh^s\sum_{j=n_2+1}^{n} t_j^{-1-\frac{(s-1)}{2}} \\
&\overset{A.45}{\leqslant} C(R_1,t_0)h^s t_n^{-\frac{(s-1)}{2}} \\
\|L_5\|_{L^2} &\leqslant k\sum_{j=1}^{n} \|A_h^{\frac{1}{2}}E_{hk}^{n-j+1}A_h^{-\frac{1}{2}}P_h(F(U_j)-F(u_j))\|_{L^2} \\
&\overset{(4.6)}{\leqslant} k\sum_{j=1}^{n} Ct_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}}\|A_h^{-\frac{1}{2}}P_h(F(U_j)-F(u_j))\|_{L^2} \\
&\overset{(3.21)}{\leqslant} k\sum_{j=1}^{n} Ct_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}}\|F(U_j)-F(u_j)\|_{H^{-1}} \\
&\overset{(2.6)}{\leqslant} C(R_1)k\sum_{j=1}^{n} t_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}}\|U_j-u_j\|_{L^2}
\end{aligned}
$$

Für die verbleibenden drei Abschätzungen benötigen wir zusätzlich (3.25), (4.13), (4.14) und die Tatsache $A_h^{-1}P_h = R_hA^{-1}$, die sich aus $P_hA = A_hR_h$ (siehe: (3.43)) ergibt.

$$
\begin{aligned}
\|L_6\|_{L^2} &\leqslant k\sum_{j=1}^{n_2} \|A_hE_{hk}^{n-j+1}(A_h^{-1}P_h - A^{-1})(u_t(t_j)-\overline{\partial}_t u_j)\|_{L^2} \\
&\overset{(4.6)}{\leqslant} k\sum_{j=1}^{n_2} Ct_{n-j+1}^{-1}\|(A_h^{-1}P_h - A^{-1})(u_t(t_j)-\overline{\partial}_t u_j)\|_{L^2} \\
&= k\sum_{j=1}^{n_2} Ct_{n-j+1}^{-1}\|(R_h - I)A^{-1}(u_t(t_j)-\overline{\partial}_t u_j)\|_{L^2} \\
&\overset{(3.25)}{\leqslant} k\sum_{j=1}^{n_2} Ct_{n-j+1}^{-1}h^s\|A^{-1}(u_t(t_j)-\overline{\partial}_t u_j)\|_{H^s} \\
&\overset{(4.13)}{\leqslant} C(R_1,t_0)kh^s\sum_{j=1}^{n_2} t_{n-j+1}^{-1}t_j^{-\frac{(s-1)}{2}} \\
&\overset{A.45}{\leqslant} C(R_1,t_0)h^s t_n^{-\frac{(s-1)}{2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|L_7\|_{L^2} &\leqslant k\sum_{j=1}^{n_2}\|A_h E_{hk}^{n-j+1}P_h A^{-1}(u_t(t_j)-\overline{\partial}_t u_j)\|_{L^2}\\
&\overset{(4.6)}{\leqslant} k\sum_{j=1}^{n_2} Ct_{n-j+1}^{-1}\|P_h A^{-1}(u_t(t_j)-\overline{\partial}_t u_j)\|_{L^2}\\
&\overset{(3.20)}{\leqslant} k\sum_{j=1}^{n_2} Ct_{n-j+1}^{-1}\|A^{-1}(u_t(t_j)-\overline{\partial}_t u_j)\|_{L^2}\\
&\overset{(4.14)}{\leqslant} C(R_1,t_0)k^2\sum_{j=1}^{n_2} t_{n-j+1}^{-1}t_j^{-\frac{1}{2}}\\
&\overset{A.45}{\leqslant} C(R_1,t_0)kt_n^{-\frac{1}{2}}\\
\|L_8\|_{L^2} &\leqslant k\sum_{j=n_2+1}^{n}\|E_{hk}^{n-j+1}P_h(u_t(t_j)-\overline{\partial}_t u_j)\|_{L^2}\\
&\overset{(4.6)}{\leqslant} k\sum_{j=n_2+1}^{n} C\|P_h(u_t(t_j)-\overline{\partial}_t u_j)\|_{L^2}\\
&\overset{(3.20)}{\leqslant} k\sum_{j=n_2+1}^{n} C\|u_t(t_j)-\overline{\partial}_t u_j\|_{L^2}\\
&\overset{(4.14)}{\leqslant} C(R_1,t_0)k^2\sum_{j=n_2+1}^{n} t_j^{-\frac{3}{2}}\\
&\overset{A.45}{\leqslant} C(R_1,t_0)kt_n^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Zusammengefasst ergeben diese acht Abschätzungen gerade die Behauptung für die L^2-Norm

$$
\begin{aligned}
\|\theta_n\|_{L^2} \leqslant \sum_{i=1}^{8}\|L_i\|_{L^2} &\leqslant C(R_1,t_0)\cdot(\|P_h e_0\|_{L^2}+h^s t_n^{-\frac{(s-1)}{2}}+kt_n^{-\frac{1}{2}})\\
&\quad + C(R_1)k\cdot\sum_{j=1}^{n} t_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}}\|U_j-u_j\|_{L^2} \quad \forall\, t_n\in]0,t_0]
\end{aligned}
$$

zu (1)b): Da für diesen Beweisteil wegen der nicht hinreichend regulären Anfangsdaten die L^2-Konvergenz erforderlich ist, werden wir den Beweis von (4.20) im Anschluss der L^2-Konvergenz durchführen.
zu (2)a): Der Beweis von (4.19) lässt sich bis zu den Abschätzungen der $\|L_i\|_{L^2}$ Terme übernehmen. Ersetzen wir jetzt im Beweis von (4.19) die Abschätzungen (4.8) durch (4.10), (4.9) durch (4.11), (4.13) durch (4.15) sowie (4.14) durch (4.16), so erhalten wir die Ungleichung (4.21).
zu (2)b): Aus (4.24) erhalten wir mit (4.7), (3.20), (4.11), (4.16), (3.34), (2.3) und der Summationsabschätzung A.45

$$
\begin{aligned}
&\|\theta_n\|_{H^1}\\
\overset{(4.24)}{\leqslant}\;& \|E_{hk}^n\theta_0\|_{H^1}+k\sum_{j=1}^{n}\|E_{hk}^{n+j-1}P_h(F(U_j)-F(u_j)-\overline{\partial}_t\rho_j+u_t(t_j)-\overline{\partial}_t u_j)\|_{H^1}\\
\overset{(4.7)}{\leqslant}\;& \|\theta_0\|_{H^1}+k\sum_{j=1}^{n} t_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}}\|P_h(F(U_j)-F(u_j)-\overline{\partial}_t\rho_j+u_t(t_j)-\overline{\partial}_t u_j)\|_{L^2}\\
\overset{(3.20)}{\leqslant}\;& \|e_0\|_{H^1}+\|u_0-R_h u_0\|_{H^1}+k\sum_{j=1}^{n} t_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}}(\|F(U_j)-F(u_j)\|_{L^2}+\|\overline{\partial}_t\rho_j\|_{L^2}\\
&\quad +\|u_t(t_j)-\overline{\partial}_t u_j\|_{L^2})
\end{aligned}
$$

$$\overset{(4.11),(4.16),(3.34)}{\leqslant} \|e_0\|_{H^1} + Ch\|u_0\|_{H^2} + C(R_1,R_2,t_0)hk\sum_{j=1}^{n} t_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}} t_j^{-\frac{1}{2}}$$
$$+ C(R_1,R_2,t_0)k^2\sum_{j=1}^{n} t_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}} t_j^{-1} + k\sum_{j=1}^{n} t_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}}\|F(U_j)-F(u_j)\|_{L^2}$$
$$\overset{(2.3),A.45}{\leqslant} C(R_1,R_2,t_0)(\|u_{h0}-u_0\|_{H^1} + h + kt_n^{-\frac{1}{2}}) + C(R_1)k\sum_{j=1}^{n} t_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}}\|U_j-u_j\|_{H^1}$$
$$\forall\, t_n \in]0,t_0]$$

womit die Ungleichung (4.22) gezeigt ist. □

4.7 Satz (KONVERGENZ DES IMPLIZITEN EULER-VERFAHRENS).
(1): Sei $u \in C([0,T_{max}(u_0)[,H_0^1(\Omega))$ *(bzw.* $U : \{t_n = nk \mid n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } t_n < T_{max}(U_0)\} \longrightarrow \mathcal{V}_h$*) die zugehörige Lösung der Integralgleichung (2.24) (bzw. der Summationsgleichung (4.5)) zu den Anfangsdaten* $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ *(bzw.* $U_0 \in \mathcal{V}_h$*) auf dem maximalen Existenzintervall* $[0,T_{max}(u_0)[$ *(bzw.* $[0,T_{max}(U_0)[$*). Desweiteren seien* $R_1 > 0$ *und* $0 < t_0 < \min\{T_{max}(u_0),T_{max}(U_0)\}$ *mit* $\|u(t)\|_{H^1} \leqslant R_1$ *und* $\|U_n\|_{H^1} \leqslant R_1$ $\forall\, t,t_n \in [0,t_0]$*. Dann gilt für* $k \leqslant k_0(R_1)$

$$\text{a): } \|U_n-u(t_n)\|_{L^2} \leqslant C(R_1,t_0)\cdot(\|u_{h0}-P_hu_0\|_{L^2} + h^2t_n^{-\frac{1}{2}} + kt_n^{-\frac{1}{2}}) \qquad \forall\, t_n \in]0,t_0] \tag{4.25}$$
$$\text{b): } \|U_n-u(t_n)\|_{H^1} \leqslant C(R_1,t_0)\cdot(\|u_{h0}-u_0\|_{L^2}t_n^{-\frac{1}{2}} + ht_n^{-\frac{1}{2}} + kt_n^{-1}) \qquad \forall\, t_n \in]0,t_0] \tag{4.26}$$

(2): Falls zusätzlich zu (1) $u_0 \in H^2(\Omega)$ *mit* $\|u_0\|_{H^2} \leqslant R_2$ *ist, so gilt für* $k \leqslant k_0(R_1,R_2)$

$$\text{a): } \|U_n-u(t_n)\|_{L^2} \leqslant C(R_1,R_2,t_0)\cdot(\|u_{h0}-u_0\|_{L^2} + h^2 + k) \qquad \forall\, t_n \in [0,t_0] \tag{4.27}$$
$$\text{b): } \|U_n-u(t_n)\|_{H^1} \leqslant C(R_1,R_2,t_0)\cdot(\|u_{h0}-u_0\|_{H^1} + h + kt_n^{-\frac{1}{2}}) \qquad \forall\, t_n \in]0,t_0] \tag{4.28}$$

Beweis. *zu (1)a):* Aus (4.8) und (4.19) folgt für $s = 2$

$$\|U_n-u(t_n)\|_{L^2} \leqslant \|U_n-R_hu_n\|_{L^2} + \|R_hu_n-u_n\|_{L^2} = \|\theta_n\|_{L^2} + \|\rho_n\|_{L^2}$$
$$\leqslant C(R_1,t_0)\cdot(\|u_{h0}-P_hu_0\|_{L^2} + h^2t_n^{-\frac{1}{2}} + kt_n^{-\frac{1}{2}}) + C(R_1)k\cdot\sum_{j=1}^{n} t_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}}\|U_j-u_j\|_{L^2} \quad \forall\, t_n \in]0,t_0]$$

Das verallgemeinerte diskrete Gronwall-Lemma A.49 liefert uns nun eine Konstante $C(R_1,t_0) > 0$, so dass die Ungleichung

$$\|U_n-u(t_n)\|_{L^2} \leqslant C(R_1,t_0)\cdot(\|u_{h0}-P_hu_0\|_{L^2} + h^2t_n^{-\frac{1}{2}} + kt_n^{-\frac{1}{2}}) \quad \forall\, t_n \in]0,t_0]\ \forall\, k \in]0,k_0]$$

gilt.
zu (1)b): Wir betrachten zunächst (4.23). Wegen

$$t_n\overline{\partial}_t\theta_n \overset{(4.2)}{=} t_n\frac{\theta_n-\theta_{n-1}}{k} = \frac{t_n\theta_n - t_{n-1}\theta_{n-1}}{k} - \frac{(t_n-t_{n-1})\theta_{n-1}}{k} \overset{(4.2)}{=} \overline{\partial}_t(t_n\theta_n) - \theta_{n-1}$$

erhalten wir nach Multiplizieren von (4.23) mit t_n das AWP

$$\begin{aligned} \overline{\partial}_t(t_n\theta_n) + A_h(t_n\theta_n) &= \theta_{n-1} + t_nP_h(F(U_n)-F(u_n) - \overline{\partial}_t\rho_n + u_t(t_n) - \overline{\partial}_tu_n) &&, t_n \in]0,t_0] \\ t_0\theta_0 &= 0 &&, t_n = 0 \end{aligned}$$

dessen Lösung wegen der Summationsgleichung (4.5) durch

$$t_n\theta_n = k\cdot\sum_{j=1}^{n} E_{hk}^{n-j+1}(\theta_{j-1} + t_jP_h(F(U_j)-F(u_j) - \overline{\partial}_t\rho_j + u_t(t_j) - \overline{\partial}_tu_j)) \tag{4.29}$$

gegeben ist. Aus (4.29), (4.7) und (3.20) bekommen wir zunächst

$$\begin{aligned} & t_n\|\theta_n\|_{H^1} \\ \overset{(4.29)}{\leqslant}\; & k\sum_{j=1}^{n}\|E_{hk}^{n-j+1}(\theta_{j-1}+t_jP_h(F(U_j)-F(u_j)-\overline{\partial}_t\rho_j+u_t(t_j)-\overline{\partial}_tu_j))\|_{H^1} \\ \overset{(4.7),(3.20)}{\leqslant}\; & k\cdot\sum_{j=1}^{n}t_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}}(\|\theta_{j-1}\|_{L^2}+t_j\|F(U_j)-F(u_j)\|_{L^2}+t_j\|\overline{\partial}_t\rho_j\|_{L^2}+t_j\|u_t(t_j)-\overline{\partial}_tu_j\|_{L^2}) \end{aligned} \tag{4.30}$$

Wir schätzen nun die Ausdrücke in (4.30) der Reihe nach ab. Der erste in Klammern stehende Term lässt sich mit (4.8), (4.25), (3.20) und der Tatsache $\frac{1}{2}t_j\leqslant t_{j-1}$ für $j\geqslant 2$ abschätzen

$$\begin{aligned} \|\theta_{j-1}\|_{L^2} &\leqslant \|e_{j-1}\|_{L^2}+\|\rho_{j-1}\|_{L^2} \overset{(4.8),(4.25)}{\leqslant} C(R_1,t_0)\cdot(\|P_he_0\|_{L^2}+h+kt_{j-1}^{-\frac{1}{2}}) \\ &\overset{(3.20)}{\leqslant} C(R_1,t_0)(\|e_0\|_{L^2}+h+kt_j^{-\frac{1}{2}}) \end{aligned} \tag{4.31}$$

Für $j=1$ erhalten wir die Abschätzung mit (4.8), die für $j=0$ und $s=1$ bekanntlich auf $[0,t_0]$ gilt (siehe dazu: (3.25))

$$\|\theta_0\|_{L^2} \leqslant \|e_0\|_{L^2}+\|\rho_0\|_{L^2} \overset{(4.8)}{\leqslant} \|e_0\|_{L^2}+C(R_1)h$$

Damit ist (4.31) auf dem Intervall $]0,t_0]$ erfüllt. Den dritten Term können wir durch (4.9) abschätzen

$$t_j\|\overline{\partial}_t\rho_j\|_{L^2} \overset{(4.9)}{\leqslant} t_jC(R_1,t_0)ht_j^{-1} = C(R_1,t_0)h \tag{4.32}$$

Für $j=1$ folgt die Abschätzung (4.32) aus (4.2), (4.8) und $t_1=k$

$$t_1\|\overline{\partial}_t\rho_1\|_{L^2} \overset{(4.2)}{=} t_1\|\frac{\rho_1-\rho_0}{k}\|_{L^2} \leqslant \|\rho_1\|_{L^2}+\|\rho_0\|_{L^2} \overset{(4.8)}{\leqslant} C(R_1,t_0)h$$

wodurch die Gültigkeit von (4.32) auf $]0,t_0]$ gezeigt wäre. Der letzte Term (4.30) lässt sich auf dem Intervall $]0,t_0]$ durch (4.14) abschätzen

$$t_j\|u_t(t_j)-\overline{\partial}_tu_j\|_{L^2} \overset{(4.14)}{\leqslant} t_jC(R_1,t_0)kt_j^{-\frac{3}{2}} = C(R_1,t_0)kt_j^{-\frac{1}{2}} \tag{4.33}$$

Insgesamt erhalten wir aus (4.30) durch Anwendung von (2.3), (4.31), (4.32), (4.33) und anschließender Ausführung der verallgemeinerten Summationsabschätzung A.45(1) zunächst die Stabilitätsaussage (4.20)

$$\begin{aligned} & t_n\|\theta_n\|_{H^1} \\ & \leqslant C(R_1,t_0)k\sum_{j=1}^{n}(\|e_0\|_{L^2}+h+kt_j^{-\frac{1}{2}})t_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}}+C(R_1)k\sum_{j=1}^{n}(t_j\|e_j\|_{H^1})t_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}} \\ & \qquad +C(R_1,t_0)hk\sum_{j=1}^{n}t_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}}+C(R_1,t_0)k^2\sum_{j=1}^{n}t_j^{-\frac{1}{2}}t_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}} \\ & \leqslant C(R_1,t_0)(\|e_0\|_{L^2}t_n^{\frac{1}{2}}+ht_n^{\frac{1}{2}}+k)+C(R_1)\sum_{j=1}^{n}(t_j\|U_j-u_j\|_{H^1})t_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}} \quad \forall t_n\in]0,t_0] \end{aligned}$$

Aus den Aussagen (4.20) und (4.8) erhalten wir eine Abschätzung für den Gesamtfehler in der H^1-Norm

$$\begin{aligned} & t_n\|U_n-u_n\|_{H^1} \leqslant t_n\|\theta_n\|_{H^1}+t_n\|\rho\|_{H^1} \\ & \leqslant C(R_1,t_0)(\|e_0\|_{L^2}t_n^{\frac{1}{2}}+ht_n^{\frac{1}{2}}+k)+C(R_1)\sum_{j=1}^{n}(t_j\|U_j-u_j\|_{H^1})t_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}} \quad \forall t_n\in]0,t_0] \end{aligned}$$

Das verallgemeinerte diskrete Gronwall-Lemma A.49 liefert uns nun eine Konstante $C(R_1, t_0) > 0$, so dass die Ungleichung

$$t_n\|U_n - u_n\|_{H^1} \leqslant C(R_1, t_0)(\|e_0\|_{L^2} t_n^{\frac{1}{2}} + h t_n^{\frac{1}{2}} + k) \quad \forall\, t_n \in]0, t_0]\ \forall\, k \in]0, k_0]$$

gilt. Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung mit t_n^{-1}, so folgt die behauptete Konvergenzabschätzung.
zu (2)a): Aus (4.10) und (4.21) folgt für $s = 2$

$$\begin{aligned}&\|U_n - u(t_n)\|_{L^2} \leqslant \|U_n - R_h u_n\|_{L^2} + \|R_h u_n - u_n\|_{L^2} = \|\theta_n\|_{L^2} + \|\rho_n\|_{L^2}\\ \leqslant\, &C(R_1, R_2, t_0) \cdot (\|u_{h0} - P_h u_0\|_{L^2} + h^2 + k) + C(R_1) k \sum_{j=1}^{n} t_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}} \|U_j - u_j\|_{L^2} \quad \forall\, t_n \in]0, t_0]\end{aligned}$$

Das verallgemeinerte diskrete Gronwall-Lemma A.49 liefert uns nun eine Konstante $C(R_1, R_2, t_0) > 0$, so dass die Ungleichung

$$\|U_n - u(t_n)\|_{L^2} \leqslant C(R_1, t_0) \cdot (\|P_h e_0\|_{L^2} + h^2 + k) \quad \forall\, t_n \in]0, t_0]\ \forall\, k \in]0, k_0]$$

gilt.
zu (2)b): Aus (4.10) und (4.22) folgt

$$\begin{aligned}&\|U_n - u(t_n)\|_{H^1} \leqslant \|U_n - R_h u_n\|_{H^1} + \|R_h u_n - u_n\|_{H^1} = \|\theta_n\|_{H^1} + \|\rho_n\|_{H^1}\\ \leqslant\, &C(R_1, R_2, t_0) \cdot (\|u_{h0} - u_0\|_{H^1} + h + k t_n^{-\frac{1}{2}}) + C(R_1) k \sum_{j=1}^{n} t_{n-j+1}^{-\frac{1}{2}} \|U_j - u_j\|_{L^2} \quad \forall\, t_n \in]0, t_0]\end{aligned}$$

Das verallgemeinerte diskrete Gronwall-Lemma A.49 liefert uns nun eine Konstante $C(R_1, t_0) > 0$, so dass die Ungleichung

$$\|U_n - u(t_n)\|_{L^2} \leqslant C(R_1, t_0) \cdot (\|P_h e_0\|_{L^2} + h + k t_n^{-\frac{1}{2}}) \quad \forall\, t_n \in]0, t_0]\ \forall\, k \in]0, k_0]$$

gilt.

Man beachte, dass die aus dem Gronwall-Lemma A.49 stammenden Konstanten $C(R_1, t_0)$ und $C(R_1, R_2, t_0)$ in allen Beweisteilen nicht-fallend in t_0 sind. □

4.4. Erweiterungen zur zeitlichen Diskretisierung

In diesem Abschnitt wollen wir abschließend einige Anmerkungen und Hintergrundinformationen des impliziten Euler-Verfahrens zusammentragen.

Voraussetzungen: Die Forderungen an das Gebiet Ω und an die Triangulierungen $\{\mathcal{T}_h\}_{0<h<1}$ waren in diesem Kapitel nach wie vor dieselben wie in Kapitel 3, d.h. $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ polygonal konvexes Gebiet der Dimension $d = 1, 2, 3$ und $\{\mathcal{T}_h\}_{0<h<1}$ uniforme Familie regulärer Triangulierungen von Ω. Desweiteren haben wir weiterhin gefordert, dass die Generalvoraussetzung 2.1 erfüllt ist.

Randbedingungen: Wir haben auch in diesem Kapitel bei der Behandlung des semilinearen parabolischen Anfangs-Randwertproblems (1.1) ausschließlich eine homogene Dirichlet-Randbedingung gefordert. Es ist dennoch ebenso in diesem Kapitel möglich diese Randbedingung durch eine homogene Neumann-Randbedingung oder eine homogene Robin-Randbedingung zu ersetzen. Die daraus resultierenden Probleme lassen sich auf dieselbe Weise behandeln, verlangen allerdings einige Modifikationen, die den Abschlussbemerkungen der zwei vorangegangenen Kapitel zu entnehmen sind.

Konvergenzordnung: Die in unserem Konvergenzsatz bewiesene zeitliche Konvergenzordnung 1 deckt sich in allen vier Abschätzungen mit der üblichen Konvergenzordnung für das implizite Euler-Verfahren. Desweiteren bleibt die im vorherigen Kapitel festgestellte räumliche Konvergenzordnung der Finite-Elemente-Methode unter der zusätzlichen impliziten Euler-Diskretisierung erhalten. Man beachte allerdings, dass im Falle glatter Anfangsdaten ein Singularitätsterm in der H^1-Normabschätzung auftritt, durch den eine Fehlerschranke optimaler Ordnung auf dem gesamten Intervall $[0, t_0]$ nicht mehr gewährleistet ist.

Art der zeitlichen Diskretisierung: Es besteht in der Tat die Möglichkeit, das verwendete implizite Euler-Verfahren durch andere zeitliche Diskretisierungsmethoden zu ersetzen, wie zum Beispiel dem expliziten Euler-Verfahren oder dem semi-impliziten Euler-Verfahren. Das explizite Euler-Verfahren verlangt jedoch eine zusätzliche Bedingung bezüglich der Wahl des zeitlichen Diskretisierungsparameters k um die Stabilität des Verfahrens zu garantieren. Diese Einschränkung entfällt beim impliziten Euler-Verfahren, dafür verlang dies pro Iterationsschritt ein nichtlineares Gleichungssystem zu lösen. Bei der semi-impliziten Euler-Methode haben wir anstelle von (4.4) ([16])

$$\begin{aligned} \overline{\partial}_t U_n + A_h U_n &= P_h F(U_{n-1}) \quad , t_n \in]0, T[\\ U_0 &= u_{h0} \qquad\qquad , t_n = 0 \end{aligned}$$

In diesem Fall muss die Gleichung (4.23) entsprechend geändert werden.

Beispiele: Da jedes unserer Standardbeispiele (1.2)-(1.5) die Generalvoraussetzung 2.1 erfüllt, ist folglich die gesamte Theorie dieses Kapitels anwendbar. Dabei sind die im vorherigen Kapitel genannten Eigenschaften an die Triangulierungen einzuhalten. Weitere Beispiele zur Lösbarkeit und zur zeitlichen Diskretisierung finden sich auch in Anhang A.7.a.

5. Das Langzeitverhalten

Bisher haben wir uns ausführlich mit der eindeutigen Lösbarkeit kontinuierlicher, semidiskreter sowie volldiskreter semilinearer parabolischer Anfangs-Randwertprobleme Probleme beschäftigt und haben deren räumliches und zeitliches Konvergenzverhalten unter Verwendung der Finiten-Elemente-Methode und des impliziten Euler-Verfahrens studiert. In diesem Kapitel analysieren wir das Langzeitverhalten und die Existenz globaler Attraktoren semilinearer parabolischer Probleme in kontinuierlicher und FE-diskretisierter Form. Dazu führen wir in Abschnitt 5.1 zusätzlich zu der Generalvoraussetzung 2.1 zwei weitere Bedingungen für die rechte Seite ein. Diese sind notwendig, um die zeitlich globale Existenz aller Lösungen zu zeigen. In Abschnitt 5.2 werden wir für die Lösungsoperatoren S und S_h a-priori Schranken herleiten, die uns die gewünschte zeitlich globale Existenz aller Lösungen zu beliebigen Anfangsdaten liefern. Dazu führen wir vorab bereits das Lyapunov-Funktional ein und verwenden für den Nachweis einige Eigenschaften dieses Funktionals. Anschließend zeigen wir, dass $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ und $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ semidynamische Systeme bilden. In Abschnitt 5.3 beweisen wir für semilineare parabolische Probleme die Existenz einer gleichmäßig absorbierenden Menge im Raum $L^2(\Omega)$, mit der wir eine weitere gleichmäßig absorbierende Menge im Raum $H_0^1(\Omega)$ lokalisieren können. In Abschnitt 5.4 führt uns dies zu den dissipativen semidynamischen Systemen. Dabei handelt es sich um spezielle Systeme, die bei endlich-dimensionalen Phasenräumen stets einen globalen Attraktor besitzen, der sich mithilfe der ω-Limes-Mengen darstellen lässt. Für das kontinuierliche System erfordert dieses Resultat aufgrund des unendlich-dimensionalen Phasenraums $H_0^1(\Omega)$ jedoch eine zusätzliche Regularität des Systems. In Abschnitt 5.5 werden wir die Existenz des Lyapunov-Funktionals für semilineare parabolische Differentialgleichungen ausnutzen, um an weitere Informationen über die asymptotische Dynamik im Inneren des Attraktors zu gelangen. Dieses spezielle Funktional kann dazu verwendet werden, invariante Mengen zu bestimmen und Grenzmengen zu lokalisieren. Mithilfe unserer Generalvoraussetzungen für semilineare parabolische Anfangs-Randwertproblem und der Existenz des Lyapunov-Funktionals können wir folgern, dass es keine periodischen Lösungen geben kann. Daher sind die einzigen Mengen, gegen die die Lösungstrajektorien konvergieren können, Fixpunkte oder Vereinigungen von Fixpunkten. Desweiteren erhalten wir das Resultat, dass der globale Attraktor äquivalent zur instabilen Mannigfaltigkeit der Menge aller Gleichgewichtspunkte ist. In Abschnitt 5.6 untersuchen wir in unserem Hauptresultat das Konvergenzverhalten des kontinuierlichen und des aus der Finite-Elemente-Methode entstandenen semidiskreten globalen Attraktors für semilineare parabolische Probleme. Dabei werden wir sehen, dass diese Attraktoren oberhalbstetig sind und die Grenzmenge der semidiskreten Attraktoren daher im kontinuierlichen Attraktor enthalten ist. Mit anderen Worten können Teile des exakten Attraktors unter der Finite-Elemente-Approximation verloren gehen. Dieses Resultat wird uns aufgrund der fehlenden Bedingungen an die Attraktionsraten jedoch keine Information über die Konvergenzgeschwindigkeit liefern. Bei exponentieller Attraktionsrate können wir jedoch die Stetigkeit des globalen Attraktors zeigen. Abschließen werden wir das Kapitel in Abschnitt 5.7 mit einer Ergänzung zur Unterhalbstetigkeit und weiteren Eigenschaften der Attraktoren.

5.1. Generalvoraussetzungen

Die zeitlich globale Lösbarkeit des semilinearen parabolischen Anfangs-Randwertproblems (1.1) ist ohne weitere Annahmen an den Reaktionsterm f nicht zwangsläufig garantiert, wie sich am Beispiel $f(u) = u^2$ leicht feststellen lässt. Zwar erfüllt f die Bedingung (2.1), d.h. $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und $|f^{(j)}(u)| \leqslant C(1+|u|^{\delta+1-j})$ für alle $u \in \mathbb{R}$, $j = 1,2$ mit $C = 2$, wodurch die Existenz und Eindeutigkeit gesichert ist, doch gibt es hierbei einen Blow-up-Effekt, d.h. einige Lösungen explodieren und können nicht zeitlich global existieren ([9] 9.4.1). Daher benötigen wir zusätzliche Annahmen an unsere Funktion f, die uns die globale Existenz der Lösungen semilinearer parabolischer Probleme garantiert ([27] Theo.8.4, [33] Kap.III.1.1.2(1.8)). Dazu fordern wir für das gesamte Kapitel, dass $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein konvexes und polygonal berandetes Gebiet der Dimension $d = 1,2$ oder 3 ist. Desweiteren seien die Generalvoraussetzung 2.1 und die folgende Generalvoraussetzung durchweg erfüllt.

5.1 Generalvoraussetzung. *Die Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ erfülle zusätzlich zu der Generalvoraussetzung (2.1) die Abschätzungen*

$$(1):\ -\kappa - \alpha_1 \cdot |u|^\gamma \leqslant f(u)u \leqslant \kappa - \alpha_2 \cdot |u|^\gamma \qquad \forall\, u \in \mathbb{R} \tag{5.1}$$

$$(2):\ f'(u) \leqslant l \qquad \forall\, u \in \mathbb{R} \tag{5.2}$$

mit Konstanten $\alpha_1,\alpha_2,\gamma,\kappa,l \in \mathbb{R}_+^*$ und $\gamma \geqslant 2$.

Hinzukommend zu der Differenzierbarkeitsanforderung und der punktweisen Beschränktheit der ersten zwei Ableitungen in (2.1) verlangen wir fortan für die Funktion f die Wachstumsschranke (5.7) und die Tatsache (5.7), dass die erste Ableitung von f nach oben beschränkt ist. Wir werden später zeigen, dass die Lösung von (1.1) unter dieser zusätzlichen Forderung an f generell auf dem Zeitintervall $[0,\infty[$ existieren.

Beispiel. (1): In Bezug auf das Beispiel $f(u) = u^2$ bzw. $f(u) = u^3$ sei bemerkt, dass diese Funktionen die Bedingung (5.7) nicht erfüllen. Genauer existieren die Lösungen in der Tat im Allgemeinen nicht zeitlich global ([9] Sec.9.4, [14] 3.1 Exer., [25] Abs.11.7).
(2): Ebenso wenig genügt die Kolmogorov-Petrovsky-Piskounov-Gleichung (1.2) unseren Voraussetzungen 5.1, da sie die Bedingung (5.7) nicht erfüllt

$$\lim_{u \to -\infty} \lambda(1-2u) = \infty$$

(3): Es lässt sich aber für jedes unserer Standardbeispiele (1.3)-(1.5) zeigen, dass sie die zusätzliche Generalvoraussetzung 5.1 für $d = 1,2,3$ erfüllen. Exemplarisch zeigen wir dies für die Chafee-Infante-Gleichung (1.4) mit $f(u) = \lambda(u-u^3)$: Zum Beweis der Ungleichung in (5.7) zeigen wir

$$\lambda(u^2-u^4) - \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2}|u|^4 \leqslant 0 \quad \forall\, u \in \mathbb{R}$$
$$-\frac{\lambda}{2} - \lambda|u|^4 - \lambda(u^2-u^4) \leqslant 0 \quad \forall\, u \in \mathbb{R}$$

Da die linken Seiten der Ungleichungen offenbar Achsensymmetrisch sind, genügt es die Abschätzungen für $u \geqslant 0$ zu zeigen. Da $\lambda > 0$ gilt, können wir in beiden Ungleichungen beide Seiten durch λ teilen und erhalten

$$u^2 - u^4 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|u|^4 = -\frac{1}{2}u^4 + u^2 - \frac{1}{2} \leqslant 0 \quad \forall\, u \in \mathbb{R}$$
$$-\frac{1}{2} - |u|^4 - u^2 + u^4 = -u^2 - \frac{1}{2} \leqslant -\frac{1}{2} \leqslant 0 \quad \forall\, u \in \mathbb{R}$$

da die Funktion $-\frac{1}{2}u^4 - u^2 - \frac{1}{2}$ in $u \in \{-1,1\}$ ihr Maximum 0 und die Funktion $-u^2 - \frac{1}{2}$ in $u = 0$ ihr Maximum $-\frac{1}{2}$ annimmt. (5.7) gilt wegen

$$\lambda(1-3u^2) = \lambda - 3\lambda u^2 \leqslant \lambda \quad \forall\, u \in \mathbb{R}$$

Damit erfüllt die Chafee-Infante-Gleichung unsere Generalvoraussetzung 5.1 mit $\kappa = \frac{\lambda}{2}$, $\alpha_1 = \lambda$, $\alpha_2 = \frac{\lambda}{2}$, $\gamma = 4$ und $l = \lambda$. Die Standardbeispiele (1.3) und (1.5) lassen sich ähnlich behandeln. Weitere Beispiele zum Langzeitverhalten finden sich im Anhang A.7.b. □

5.2. A-priori Beschränktheit und Lyapunov-Funktional

In diesem Abschnitt leiten wir sowohl für den kontinuierlichen Lösungsoperator S aus (2.54) als auch für den Lösungsoperator S_h aus (3.22) des FE-diskretisierten Problems jeweils eine a-priori Schranke her, aus der sich mit Satz 2.6(3) bzw. mit Satz 3.8(3) anschließend die zeitlich globale Existenz von Lösungen zu beliebigen Anfangsdaten ableiten lässt. Als Konsequenz daraus erhalten wir, dass $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ und $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ semidynamische Systeme sind. Einige elementare Grundbegriffe zur Theorie (semi-)dynamischer Systeme sind im Anhang A.6 zusammengetragen und werden als bekannt vorausgesetzt.

5.2 Lemma. *Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es eine Konstante $C(\varepsilon) > 0$, so dass*

$$\mathcal{F}(u) := \int_0^u f(w)\,dw \leqslant \varepsilon u^2 + C(\varepsilon) \quad \forall\, u \in \mathbb{R} \tag{5.3}$$

gilt.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest. Wir beginnen zunächst mit zwei Hilfsaussagen:

1. z.z.: $\exists\, u_0(\varepsilon) > 0 : \; f(u) \leqslant \varepsilon u \;\forall\, u \geqslant u_0(\varepsilon)$. Die Generalvoraussetzung 5.1 liefert uns wegen (5.7)

$$f(u) \leqslant \frac{\kappa}{u} - \alpha_2 u^{\gamma-1} \leqslant 1 \quad \forall\, u \geqslant \kappa \tag{5.4}$$

Setze $u_0(\varepsilon) := \max\{\frac{1}{\varepsilon}, \kappa\}$, dann folgt für $u \geqslant u_0(\varepsilon)$, dass $u \geqslant \kappa$ und $u \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, also $\varepsilon u \geqslant 1$ und daher

$$f(u) \overset{(5.4)}{\leqslant} 1 \leqslant \varepsilon u \quad \forall\, u \geqslant u_0(\varepsilon) \tag{5.5}$$

2. z.z.: $f(u) \geqslant \varepsilon u \;\forall\, u \leqslant -u_0(\varepsilon)$. Aus der Generalvoraussetzung 5.1 erhalten wir wegen (5.7)

$$f(u) \geqslant \frac{\kappa}{u} - \alpha_2 \frac{(-u)^\gamma}{u} = \frac{\kappa}{u} + \underbrace{\alpha_2 (-u)^{\gamma-1}}_{\geqslant 0} \geqslant -1 \quad \forall\, u \leqslant -\kappa \tag{5.6}$$

Aufgrund der Wahl von $u_0(\varepsilon)$ gilt für $u \leqslant -u_0(\varepsilon) = \min\{-\frac{1}{\varepsilon}, -\kappa\}$, dass $u \leqslant -\kappa$ und $u \leqslant -\frac{1}{\varepsilon}$, also $\varepsilon u \leqslant -1$ und daher

$$f(u) \overset{(5.6)}{\geqslant} -1 \geqslant \varepsilon u \quad \forall\, u \leqslant -u_0(\varepsilon) \tag{5.7}$$

3. Für die im Lemma behauptete Abschätzung (5.3) unterscheiden wir drei Fälle.
1.Fall: $(u > u_0(2\varepsilon))$

$$\begin{aligned}\int_0^u f(w)\,dw &= \int_0^{u_0(2\varepsilon)} f(w)\,dw + \int_{u_0(2\varepsilon)}^u f(w)\,dw \\ &\overset{(5.5)}{\leqslant} \underbrace{\left(\sup_{x\in[-u_0(2\varepsilon),u_0(2\varepsilon)]} |f(x)|\right) u_0(2\varepsilon)}_{=:C(\varepsilon)} + \varepsilon u^2 - \underbrace{\varepsilon u_0(2\varepsilon)^2}_{>0} \\ &< \varepsilon u^2 + C(\varepsilon) \quad \forall\, u \geqslant u_0(2\varepsilon)\end{aligned}$$

2.Fall: $(u < -u_0(2\varepsilon))$

$$\begin{aligned}\int_0^u f(w)\,dw &= -\int_u^{-u_0(2\varepsilon)} f(w)\,dw - \int_{-u_0(2\varepsilon)}^0 f(w)\,dw \\ &\overset{(5.7)}{\leqslant} -\underbrace{\varepsilon u_0(2\varepsilon)^2}_{>0} + \varepsilon u^2 + \underbrace{\left(\sup_{x\in[-u_0(2\varepsilon),u_0(2\varepsilon)]} |f(x)|\right) u_0(2\varepsilon)}_{=C(\varepsilon)} \\ &< \varepsilon u^2 + C(\varepsilon) \quad \forall\, u \leqslant -u_0(2\varepsilon)\end{aligned}$$

3.Fall: $(u \in [-u_0(2\varepsilon), u_0(2\varepsilon)])$

$$\begin{aligned}\int_0^u f(w)\,dw &\leqslant \left(\sup_{x\in[-u_0(2\varepsilon),u_0(2\varepsilon)]} |f(x)|\right) u_0(2\varepsilon)\\ &= C(\varepsilon)\\ &\leqslant \varepsilon u^2 + C(\varepsilon) \quad \forall -u_0(2\varepsilon) \leqslant u \leqslant u_0(2\varepsilon)\end{aligned}$$

Aufgrund der Stetigkeit von f gilt insbesondere $C(\varepsilon) < \infty$. □

5.3 Satz (EXISTENZSATZ EINES LYAPUNOV-FUNKTIONALS FÜR $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$). *Sei $S(\bullet)\bullet$ der Lösungsoperator aus (2.54) des nichtlinearen AWP's (2.20) und*

$$\mathcal{L} : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}(u) := \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 - \mathcal{F}(u(x))\,dx$$

Dann gilt:

(1): $\mathcal{L}$ ist stetig in $H_0^1(\Omega)$

(2): $\forall\, u_0 \in H_0^1(\Omega):\ \mathcal{L}(S(t)u_0)$ ist nichtwachsend in t

(3): $\mathcal{L}(u) \geqslant -C(\varepsilon)|\Omega| \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega)$, wobei $\varepsilon = \frac{\lambda_1}{4}$ und $C(\varepsilon) > 0$ aus Lemma 5.2

(4): $\mathcal{L}(u) \longrightarrow \infty$ für $\|u\|_{H^1} \longrightarrow \infty$

(5): Falls für $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ der Lösungsoperator $S(t)u_0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist und falls es ein $T \in \mathbb{R}$ gibt mit $\mathcal{L}(S(T)u_0) = \mathcal{L}(u_0)$, dann gilt $Au_0 = F(u_0)$, d.h. u_0 ist ein Gleichgewichtspunkt von (2.20).

Beweis. *zu (1):* Wir zeigen: $\mathcal{L}$ ist Lipschitz-stetig auf $B_R = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \|u\|_{H^1} \leqslant R\}\ \forall\, R > 0$.

$$\mathcal{L}(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 - \mathcal{F}(u(x))\,dx = \frac{1}{2}\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \int_\Omega \mathcal{F}(u)\,dx$$

Zunächst zeigen wir, dass $u \longmapsto \|\nabla u\|_{L^2}^2$ Lipschitz-stetig auf B_R ist. Die Abschätzung folgt unmittelbar aus der Beschränktheit von B_R

$$\|\nabla u\|_{L^2} \leqslant \|u\|_{H^1} \leqslant R \quad \forall\, u \in B_R$$

und der umgekehrten Dreiecksungleichung. Seien $u, v \in \mathcal{A}$, dann gilt

$$\begin{aligned}|\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \|\nabla v\|_{L^2}^2| &= |\|\nabla u\|_{L^2} + \|\nabla v\|_{L^2}| \cdot |\|\nabla u\|_{L^2} - \|\nabla v\|_{L^2}|\\ &\leqslant (\|\nabla u\|_{L^2} + \|\nabla v\|_{L^2}) \cdot \|\nabla(u-v)\|_{L^2}\\ &\leqslant 2R\|u-v\|_{H^1} \quad \forall\, u, v \in B_R\end{aligned}$$

Als nächstes zeigen wir, dass auch der zweite Summand Lipschitz-stetig in B_R ist. Die Aussage ergibt sich aus der Hölderschen Ungleichung A.43 (mit $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$), (2.4) und $\mathcal{F}' = f$

$$\begin{aligned}|\int_\Omega \mathcal{F}(u(x))\,dx - \int_\Omega \mathcal{F}(v(x))\,dx| &= \int_\Omega \left(\int_0^1 \mathcal{F}'(su(x) + (1-s)v(x))\,ds\right) \cdot (u(x) - v(x))\,dx\\ &= \int_0^1 \|F(su + (1-s)v) \cdot (u-v)\|_{L^1}\,ds\\ &\overset{A.43}{\leqslant} \int_0^1 \|F(su + (1-s)v)\|_{L^2} \cdot \|u-v\|_{L^2}\,ds\\ &\overset{(2.4)}{\leqslant} \int_0^1 C(R)\|u-v\|_{L^2}\,ds\\ &= C(R)\|u-v\|_{L^2} \leqslant C(R)\|u-v\|_{H^1} \quad \forall\, u, v \in B_R\end{aligned}$$

Damit ist $\mathcal{L}$ als Komposition in B_R Lipschitz-stetiger Funktionen auch Lipschitz-stetig in B_R für jedes $R > 0$ und damit in $H_0^1(\Omega)$.
zu (2): Es genügt zu zeigen, dass die zeitliche Ableitung $\frac{d}{dt}\mathcal{L}(u(t))$ für jede Lösung u von (2.20) mit Anfangswertfunktion $u_0 \in B_R$ nichtpositiv ist. Multiplizieren wir (2.20) mit u_t und integrieren anschließend über Ω, so erhalten wir aus der Kettenregel

$$\|u_t\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_{L^2}^2 \;=\; \int_\Omega f(u(x))u_t(x)\,dx \;=\; \frac{d}{dt}\int_\Omega \mathcal{F}(u(x))\,dx$$

Daraus folgt, dass $\mathcal{L}$ nicht wachsend ist, denn

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(u(t)) \;=\; \frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 - \mathcal{F}(u(x))\,dx \;=\; -\|u_t\|_{L^2}^2 \;\leqslant\; 0 \quad \forall\, t \geqslant 0\,\forall\, u_0 \in B_R$$

zu (3) und (4): Aus Lemma 5.2, der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung A.12 und der Normäquivalenz $|\bullet|_{H^1} \geqslant C\|\bullet\|_{H^1}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(u) \;&=\; \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 - \mathcal{F}(u(x))\,dx \\
&=\; \frac{1}{2}|u|_{H^1}^2 - \int_\Omega \mathcal{F}(u(x))\,dx \\
&\overset{5.2}{\geqslant}\; \frac{1}{2}|u|_{H^1}^2 - \int_\Omega \varepsilon|u(x)|^2 + C(\varepsilon)\,dx \\
&=\; \frac{1}{2}|u|_{H^1}^2 - \varepsilon\|u\|_{L^2}^2 - C(\varepsilon)|\Omega| \\
&\overset{A.12}{\geqslant}\; \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\lambda_1^{-1}\right)|u|_{H^1}^2 - C(\varepsilon)|\Omega| \\
&\geqslant\; \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\lambda_1^{-1}\right)C\|u\|_{H^1}^2 - C(\varepsilon)|\Omega| \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega)
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Wählen wir speziell $\varepsilon = \frac{\lambda_1}{4} > 0$, so erhalten wir für jede Funktion $u \in H_0^1(\Omega)$ die Abschätzung $\mathcal{L}(u) \geqslant \frac{C}{4}\|u\|_{H^1} - C(\varepsilon)|\Omega|$ (wobei $C = (\lambda_1^{-1}+1)^{-1}$ wegen Lemma A.12) und die Aussagen (3) und (4) folgen.
zu (5): Da $\mathcal{L}(u(T)) = \mathcal{L}(u_0)$ und $\mathcal{L}$ nach Aussage (2) entlang von Trajektorien nichtwachsend ist, folgt

$$u(t) \;=\; u_0 \quad \forall\, t \in [0,T]$$

und daher gilt $u_t(t) = 0$. Daraus ergibt sich wegen (2.20)

$$0 \;=\; u_t(t) \;\overset{(2.20)}{=}\; F(u(t)) - Au(t) \;=\; F(u_0) - Au_0$$

womit u_0 ein Gleichgewichtspunkt von (2.20) ist. □

5.4 Satz. *Sei $R > 0$ beliebig. Dann gilt:*

(1): $\forall\, u_0 \in B_R :\; S(t)u_0$ existiert zeitlich global, d.h. $T_{max}(u_0) = \infty$

(2): $\exists\, h_0 > 0\,\forall\, 0 < h \leqslant h_0 \,\wedge\, \forall\, u_{h0} \in B_R \cap \mathcal{V}_h :\; S_h(t)u_{h0}$ existiert zeitlich global, d.h. $T_{max}(u_{h0}) = \infty$

Beweis. *zu (1):* Wir führen den Beweis in drei Schritten durch, indem wir der Reihe nach bezüglich $\|\bullet\|_{L^2}$, $|\bullet|_{H^1}$ und $\|\bullet\|_{H^1}$ jeweils eine a-priori Schranke bestimmen. Die globale Lösbarkeit folgt anschließend direkt aus Satz 2.6(3).

1. Multiplizieren wir (2.20) mit u und integrieren anschließend über Ω, so erhalten wir aus (5.7)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 + |u|_{H^1}^2 \;\overset{(2.20)}{=}\; \int_\Omega f(u(x))\cdot u(x)\,dx \;\overset{(5.7)}{\leqslant}\; \int_\Omega \kappa - \alpha_2|u(x)|^\gamma\,dx \tag{5.9}$$

Mit der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung A.12 bekommen wir auf der linken Seite

$$\|u\|_{L^2}^2 \overset{\text{A.12}}{\leqslant} \lambda_1^{-1}\|\nabla u\|_{L^2}^2 = \lambda_1^{-1}|u|_{H^1}^2 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1\|u\|_{L^2}^2 \leqslant |u|_{H^1}^2 \tag{5.10}$$

Da $\alpha_2 > 0$ ist, erhalten wir auf der rechten Seite

$$\int_\Omega \kappa - \alpha_2|u(x)|^\gamma \, dx = \int_\Omega \kappa \, dx - \int_\Omega \alpha_2|u(x)|^\gamma \, dx \leqslant \int_\Omega \kappa \, dx = \kappa|\Omega| \tag{5.11}$$

wobei $|\Omega| := \int_\Omega dx$ das Maß von Ω ist. Insgesamt bekommen wir aus (5.9), (5.10) und (5.11) nach Multiplikation mit 2 die Ungleichung

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 + 2\lambda_1\|u\|_{L^2}^2 \overset{(5.10)}{\leqslant} \frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 + 2|u|_{H^1}^2 \overset{(5.9)}{\leqslant} 2\int_\Omega \kappa - \alpha_2|u(x)|^\gamma \, dx \overset{(5.11)}{\leqslant} 2\kappa|\Omega|$$

Damit sind die Voraussetzungen des differentiellen Gronwall-Lemmas A.46 erfüllt und es gilt

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{L^2}^2 &\leqslant \|u(0)\|_{L^2}^2 \cdot e^{\int_0^t -2\lambda_1 \, d\tau} + \int_0^t e^{\int_s^t -2\lambda_1 \, d\tau} \cdot 2\kappa|\Omega| \, ds \\
&= \|u_0\|_{L^2}^2 \cdot e^{-2\lambda_1 t} + \int_0^t e^{-2\lambda_1(t-s)} \cdot 2\kappa|\Omega| \, ds \\
&= \|u_0\|_{L^2}^2 \cdot e^{-2\lambda_1 t} + 2\kappa|\Omega| \cdot \left(\frac{e^{2\lambda_1(s-t)}}{2\lambda_1}\right)\Bigg|_0^t \\
&= \|u_0\|_{L^2}^2 \cdot e^{-2\lambda_1 t} + \frac{\kappa|\Omega|}{\lambda_1} \cdot (1 - e^{-2\lambda_1 t}) \\
&\leqslant \|u_0\|_{H^1}^2 + \frac{\kappa|\Omega|}{\lambda_1} \quad \forall\, t \geqslant 0
\end{aligned} \tag{5.12}$$

2. Aus einem Zwischenschritt in (5.8) mit $\varepsilon_1 := \varepsilon = \frac{\lambda_1}{4}$ erhalten wir

$$\mathcal{L}(u) \overset{(5.8)}{\geqslant} \frac{1}{4}|u|_{H^1}^2 - C\left(\frac{\lambda_1}{4}\right)|\Omega| \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega) \tag{5.13}$$

Desweiteren liefert uns Lemma 5.2 und die Poincaré-Friedrichs-Ungleichung A.12

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(u) &= \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 - \mathcal{F}(u(x)) \, dx \\
&\leqslant \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 + |\mathcal{F}(u(x))| \, dx \\
&\overset{5.2}{\leqslant} \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 + \varepsilon_2 u(x)^2 + C(\varepsilon_2) \, dx \\
&= \frac{1}{2}|u|_{H^1}^2 + \varepsilon_2\|u\|_{L^2}^2 + C(\varepsilon_2)|\Omega| \\
&\overset{\text{A.12}}{\leqslant} \left(\frac{1}{2} + \varepsilon_2\lambda_1^{-1}\right)|u|_{H^1}^2 + C(\varepsilon_2)|\Omega| \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega)
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Speziell für $\varepsilon_2 = \frac{\lambda_1}{4}$ bekommen wir daraus

$$\mathcal{L}(u) \leqslant \frac{3}{4}|u|_{H^1}^2 + C\left(\frac{\lambda_1}{4}\right)|\Omega| \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega) \tag{5.15}$$

Für eine Lösung $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ von (2.20) zu den Anfangsdaten $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ gilt wegen Satz 5.3(2) $\mathcal{L}(u(t)) \leqslant \mathcal{L}(u(0)) \; \forall t \geqslant 0$. Daraus zusammen mit (5.13) und (5.15) erhalten wir

$$\begin{aligned}
|u(t)|_{H^1}^2 &\overset{(5.13)}{\leqslant} 4\left(\mathcal{L}(u(t)) + C\left(\frac{\lambda_1}{4}\right)|\Omega|\right) \\
&\leqslant 4\left(\mathcal{L}(u(0)) + C\left(\frac{\lambda_1}{4}\right)|\Omega|\right) \\
&\overset{(5.15)}{\leqslant} 4(\frac{3}{4}|u_0|_{H^1}^2 + 2|\Omega| C\left(\frac{\lambda_1}{4}\right)) \\
&\leqslant 3\|u_0\|_{H^1}^2 + 8|\Omega| C\left(\frac{\lambda_1}{4}\right) \quad \forall t \geqslant 0 \; \forall u_0 \in H_0^1(\Omega)
\end{aligned} \tag{5.16}$$

3. Aus (5.12) und (5.16) erhalten wir eine a-priori Schranke in $H_0^1(\Omega)$ bzgl. $\|\bullet\|_{H^1}$

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_{H^1}^2 &= \|u(t)\|_{L^2}^2 + |u(t)|_{H^1}^2 \\
&\leqslant \|u_0\|_{H^1}^2 + \frac{\kappa|\Omega|}{\lambda_1} + 3\|u_0\|_{H^1}^2 + 8|\Omega| C\left(\frac{\lambda_1}{4}\right) \\
&= 4\|u_0\|_{H^1}^2 + |\Omega|\left(\frac{\kappa}{\lambda_1} + 8C\left(\frac{\lambda_1}{4}\right)\right) \\
&=: \rho^2 \quad \forall t \geqslant 0
\end{aligned}$$

zu (2): Wir führen den Beweis wie oben in drei Schritten durch und leiten analog dazu a-priori Schranken her. Die globale Lösbarkeit folgt anschließend direkt aus Satz 3.8(3).

1. Multiplizieren wir (3.14) mit $u_h \in \mathcal{V}_h$ und integrieren anschließend über Ω, so erhalten wir unter Verwendung von (3.13), (5.7) und (5.11)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_h\|_{L^2}^2 + |u_h|_{H^1}^2 = (P_h F(u_h), u_h)_{L^2} \overset{(3.13)}{=} (F(u_h), u_h)_{L^2} \\
&= \int_\Omega f(u_h(x)) \cdot u_h(x)\, dx \overset{(5.7)}{\leqslant} \int_\Omega \kappa - \alpha_2 |u_h(x)|^\gamma \, dx \overset{(5.11)}{\leqslant} \kappa|\Omega|
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Mit der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung A.12 bekommen wir auf der linken Seite

$$\|u_h\|_{L^2}^2 \overset{A.12}{\leqslant} \lambda_{h1}^{-1}\|\nabla u_h\|_{L^2}^2 = \lambda_{h1}^{-1}|u_h|_{H^1}^2 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{h1}\|u_h\|_{L^2}^2 \leqslant |u_h|_{H^1}^2$$

wobei λ_{h1} der kleinste Eigenwert der semidiskreten Helmholz-Gleichung aus Kapitel 3 ist. Aus der elliptischen Eigenwerttheorie bedienen wir uns einer Abschätzung für die Eigenwerte der kontinuierlichen und FE-diskretisierten Helmholtz-Gleichung (Satz A.57). Wir benötigen aus Satz A.57 zunächst nur die linke Ungleichung für $j = 1$ und erhalten daraus insbesondere ein $h_0 > 0$ mit

$$\lambda_1\|u_h\|_{L^2}^2 \overset{A.57}{\leqslant} \lambda_{h1}\|u_h\|_{L^2}^2 \leqslant |u_h|_{H^1} \quad \forall\, 0 < h \leqslant h_0$$

Insgesamt haben wir daher

$$\frac{d}{dt}\|u_h\|_{L^2}^2 + 2\lambda_1\|u_h\|_{L^2}^2 \overset{A.57}{\leqslant} \frac{d}{dt}\|u_h\|_{L^2}^2 + 2|u_h|_{H^1}^2 \overset{(5.17)}{\leqslant} 2\kappa|\Omega| \tag{5.18}$$

und erhalten aus dem differentiellen Gronwall-Lemmas A.46 vollkommen analog zu (5.12)

$$\|u_h(t)\|_{L^2}^2 \leqslant \|u_{h0}\|_{H^1}^2 + \frac{\kappa|\Omega|}{\lambda_1} \quad \forall t \geqslant 0 \; \forall\, 0 < h \leqslant h_0 \tag{5.19}$$

2. Aus einem Zwischenschritt in (5.8) mit $\varepsilon_3 := \varepsilon = \frac{\lambda_1}{4}$ erhalten wir unter Verwendung der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung A.12 und der linken Ungleichung von Satz A.57 mit $j = 1$ für $0 < h \leqslant h_0$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u_h) &\overset{(5.8)}{\geqslant} \frac{1}{2}|u_h|^2_{H^1} - \frac{\lambda_1}{4}\|u_h\|^2_{L^2} - C\left(\frac{\lambda_1}{4}\right)|\Omega| \\ &\overset{A.12}{\geqslant} \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda_1}{4}\lambda_{h1}^{-1}\right)|u_h|^2_{H^1} - C\left(\frac{\lambda_1}{4}\right)|\Omega| \\ &\overset{A.57}{\geqslant} \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda_1}{4}\lambda_1^{-1}\right)|u_h|^2_{H^1} - C\left(\frac{\lambda_1}{4}\right)|\Omega| \\ &= \frac{1}{4}|u_h|^2_{H^1} - C\left(\frac{\lambda_1}{4}\right)|\Omega| \quad \forall\, u_h \in \mathcal{V}_h\; \forall\, 0 < h \leqslant h_0 \end{aligned} \tag{5.20}$$

Weiter erhalten wir aus einem Zwischenschritt in (5.14), der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung A.12 und Satz A.57 für $h \leqslant h_0$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u_h) &\overset{(5.14)}{\leqslant} \frac{1}{2}|u_h|^2_{H^1} + \varepsilon_4\|u_h\|^2_{L^2} + C(\varepsilon_4)|\Omega| \\ &\overset{A.12}{\leqslant} \left(\frac{1}{2} + \varepsilon_4\lambda_{h1}^{-1}\right)|u_h|^2_{H^1} + C(\varepsilon_4)|\Omega| \\ &\overset{A.57}{\leqslant} \left(\frac{1}{2} + \varepsilon_4\lambda_1^{-1}\right)|u_h|^2_{H^1} + C(\varepsilon_4)|\Omega| \quad \forall\, u_h \in \mathcal{V}_h\; \forall\, 0 < h \leqslant h_0\end{aligned}$$

Speziell für $\varepsilon_4 = \frac{\lambda_1}{4}$ bekommen wir daraus analog zu (5.15)

$$\mathcal{L}(u_h) \leqslant \frac{3}{4}|u_h|^2_{H^1} + C\left(\frac{\lambda_1}{4}\right)|\Omega| \quad \forall\, u_h \in \mathcal{V}_h\; \forall\, 0 < h \leqslant h_0 \tag{5.21}$$

Für eine Lösung $u_h(t) \in \mathcal{V}_h$ von (3.14) zu den Anfangsdaten $u_{h0} \in \mathcal{V}_h$ gilt wegen $\mathcal{V}_h \subset H^1_0(\Omega)$ und Satz 5.3(2) $\mathcal{L}(u_h(t)) \leqslant \mathcal{L}(u_h(0))\; \forall\, t \geqslant 0$. Daraus zusammen mit (5.20) und (5.21) erhalten wir analog zu (5.16)

$$|u_h(t)|^2_{H^1} \leqslant 3\|u_{h0}\|^2_{H^1} + 8|\Omega|C\left(\frac{\lambda_1}{4}\right) \quad \forall\, t \geqslant 0\; \forall\, u_{h0} \in \mathcal{V}_h\; \forall\, 0 < h \leqslant h_0 \tag{5.22}$$

3. Der letzte Teil lässt sich wegen (5.19) und (5.22) übernehmen.

$$\|u_h(t)\|^2_{H^1} \leqslant 4\|u_{h0}\|^2_{H^1} + |\Omega|\left(\frac{\kappa}{\lambda_1} + 8C\left(\frac{\lambda_1}{4}\right)\right) =: \rho^2 \quad \forall\, t \geqslant 0\; \forall\, 0 < h \leqslant h_0$$

$\square$

5.5 Korollar (EXISTENZSATZ EINES LYAPUNOV-FUNKTIONALS FÜR $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$). *Sei $S_h(\bullet)\bullet$ der Lösungsoperator aus (3.22) des nichtlinearen AWP's (3.14) für $0 < h \leqslant h_0$ mit h_0 aus Satz 5.4(2) und*

$$\mathcal{L} : H^1_0(\Omega) \supset \mathcal{V}_h \longrightarrow \mathbb{R} \quad \textit{mit} \quad \mathcal{L}(u_h) := \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u_h(x)|^2 - \mathcal{F}(u_h(x))\, dx$$

Dann gilt:

(1): $\mathcal{L}$ ist stetig in $\mathcal{V}_h$

(2): $\forall\, u_{h0} \in \mathcal{V}_h :\ \mathcal{L}(S_h(t)u_{h0})$ ist nichtwachsend in t

(3): $\mathcal{L}(u_h) \geqslant -C(\varepsilon)|\Omega| \quad \forall\, u_h \in \mathcal{V}_h$, wobei $\varepsilon = \dfrac{\lambda_1}{4}$ und $C(\varepsilon) > 0$ aus Lemma 5.2

(4): $\mathcal{L}(u_h) \longrightarrow \infty$ für $\|u_h\|_{H^1} \longrightarrow \infty$

(5): Falls für $u_{h0} \in \mathcal{V}_h$ der Lösungsoperator $S_h(t)u_{h0}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert ist und falls es ein $T \in \mathbb{R}$ gibt mit $\mathcal{L}(S_h(T)u_{h0}) = \mathcal{L}(u_{h0})$, dann gilt $A_h u_{h0} = P_h F(u_{h0})$, d.h. u_{h0} ist ein Gleichgewichtspunkt von (3.14).

Beweis. *zu (1):* Folgt aus Satz 5.3(1) und $\mathcal{V}_h \subset H_0^1(\Omega)$ (siehe: Lemma 3.1(2)).
zu (2): Analog zu Satz 5.3(2). Man verwende zusätzlich (3.13), genauer

$$(P_h F(u_h), (u_h)_t)_{L^2} \overset{(3.13)}{=} (F(u_h), (u_h)_t)_{L^2} \quad \forall\, u_h \in \mathcal{V}_h$$

zu (3) und (4): Folgt direkt aus (5.20).
zu (5): Analog zu Satz 5.3(5). □

Nachdem wir jetzt wissen, dass die Lösungsoperatoren S (bzw. S_h) zu beliebigen Anfangswertfunktionen $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ (bzw. $u_{h0} \in \mathcal{V}_h$ mit $0 < h \leqslant h_0$) zeitlich global existieren, beschäftigen wir uns im verbleibenden Teil des Abschnitts mit dem Nachweis, dass $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ und $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ für jedes $0 < h \leqslant h_0$ semidynamische Systeme sind.

5.6 Lemma (STETIGE ABHÄNGIGKEIT DER ANFANGSDATEN). *(1): Für jeden Radius $R > 0$ gibt es eine positive, monoton wachsende und nach unten beschränkte Funktion $C_1 = C_1(\bullet; R) : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mit $t \longmapsto C_1(t)$, so dass die Abschätzung*

$$\|S(t)u_0 - S(t)v_0\|_{H^1} \leqslant C_1(t) \cdot \|u_0 - v_0\|_{H^1} \quad \forall\, u_0, v_0 \in B_R \;\forall\, t \in]0, \infty[\tag{5.23}$$

gilt.
(2): Für jeden Radius $R > 0$ gibt es ein $h_0 > 0$ und eine positive, monoton wachsende und nach unten beschränkte Funktion $C_1 = C_1(\bullet; R) : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mit $t \longmapsto C_1(t)$, so dass die Abschätzung

$$\|S_h(t)u_{h0} - S_h(t)v_{h0}\|_{H^1} \leqslant C_1(t) \cdot \|u_{h0} - v_{h0}\|_{H^1} \quad \forall\, u_{h0}, v_{h0} \in (B_R \cap \mathcal{V}_h) \;\forall\, t \in]0, \infty[\;\forall\, h \in]0, h_0]$$

gilt.

Beweis. *zu (1):* Seien $R > 0$ und $u_0, v_0 \in B_R$ allesamt beliebig. Aus (2.3), (2.24) und (2.33) erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\|S(t)u_0 - S(t)v_0\|_{H^1} \\
&\overset{(2.24)}{\leqslant} \|E(t)(u_0 - v_0)\|_{H^1} + \int_0^t \|E(t-s)(F(u(s)) - F(v(s)))\|_{H^1}\, ds \\
&\overset{(2.33)}{\leqslant} C\|u_0 - v_0\|_{H^1} + C \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \cdot \|F(u(s)) - F(v(s))\|_{L^2}\, ds \\
&\overset{(2.3)}{\leqslant} C\|u_0 - v_0\|_{H^1} + C(R) \cdot \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \cdot \|S(s)u_0 - S(s)v_0\|_{H^1}\, ds \quad \forall\, t \in]0, \infty[
\end{aligned}$$

Das verallgemeinerte Gronwall-Lemma A.48 liefert uns für jedes $N \in \mathbb{N}$ eine positive und in N monoton wachsende Konstante $C(N) = C(N, R) > 0$, so dass die Ungleichung

$$\|S(t)u_0 - S(t)v_0\|_{H^1} \leqslant C(N) \cdot \|u_0 - v_0\|_{H^1} \quad \forall\, t \in]0, N]$$

gilt. Setzen wir

$$C_1 : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{mit} \quad t \longmapsto C_1(t) := C(\lceil t \rceil) = C(N) \text{ für } N - 1 \leqslant t \leqslant N \text{ und } N \in \mathbb{N}$$

so ist C_1 positiv, monoton wachsend und genügt der Ungleichung

$$\|S(t)u_0 - S(t)v_0\|_{H^1} \leqslant C_1(t) \cdot \|u_0 - v_0\|_{H^1} \quad \forall\, u_0, v_0 \in B_R \;\forall\, t \in]0, \infty[$$

zu (2): Seien $R > 0$, $0 < h \leqslant h_0$ und $u_{h0}, v_{h0} \in (B_R \cap \mathcal{V}_h)$ allesamt beliebig. Aus (2.3), (3.15), (3.19) und (3.20) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\|S_h(t)u_{h0} - S_h(t)v_{h0}\|_{H^1} \\
\overset{(3.15)}{\leqslant}\ & \|E_h(t)(u_{h0} - v_{h0})\|_{H^1} + \int_0^t \|E_h(t-s)(P_h(F(u_h(s)) - F(v_h(s))))\|_{H^1}\, ds \\
\overset{(3.19)}{\leqslant}\ & C\|u_{h0} - v_{h0}\|_{H^1} + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \cdot \|P_h(F(u_h(s)) - F(v_h(s)))\|_{L^2}\, ds \\
\overset{(3.20)}{\leqslant}\ & C\|u_{h0} - v_{h0}\|_{H^1} + C\int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \cdot \|F(u_h(s)) - F(v_h(s))\|_{L^2}\, ds \\
\overset{(2.3)}{\leqslant}\ & C\|u_{h0} - v_{h0}\|_{H^1} + C(R) \cdot \int_0^t (t-s)^{-\frac{1}{2}} \cdot \|S_h(s)u_{h0} - S_h(s)v_{h0}\|_{H^1}\, ds \quad \forall\, t \in]0, \infty[
\end{aligned}
$$

Jetzt können wir das Gronwall-Lemma A.48 anwenden und den Rest analog wie im Beweis von (1) folgern. □

5.7 Satz. *(1): Der Lösungsoperator*

$$S(\bullet)\bullet \;:\; \mathbb{R}_+ \times H_0^1(\Omega) \longrightarrow H_0^1(\Omega)$$

aus (2.54) des nichtlinearen Operator AWP's (2.20) bildet ein semidynamisches System $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ auf $H_0^1(\Omega)$.
(2): Der Lösungsoperator

$$S_h(\bullet)\bullet \;:\; \mathbb{R}_+ \times \mathcal{V}_h \longrightarrow \mathcal{V}_h$$

aus (3.22) des semidiskreten nichtlinearen Operator AWP's (3.14) bildet für jedes $0 < h \leqslant h_0$ ein semidiskretes semidynamisches System $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ auf $\mathcal{V}_h$.

Beweis. *zu (1):*

1. z.z.: Stetigkeit. Betrachten wir die Integraldarstellung (2.24), so ist Stetigkeit bezüglich t sicherlich erfüllt, da es sich hierbei um eine Komposition in t stetiger Funktionen handelt. Die Stetigkeit bezüglich der Anfangsdaten u_0 wurde in Lemma 5.6(1) gezeigt.

2. z.z.: Anfangswerteigenschaft. Sei $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ beliebig, dann folgt aus (2.24) und der Anfangswerteigenschaft von E

$$S(0)u_0 \overset{(2.24)}{=} E(0)u_0 + \int_0^0 E(0-s)F(u(s))\, ds \;=\; E(0)u_0 \;=\; u_0$$

3. z.z.: Kozykluseigenschaft. Seien $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ und $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ beliebig. Aus (2.24), der Kozykluseigenschaft und der Linearität von E erhalten wir

$$
\begin{aligned}
S(t_1+t_2)u_0 &\overset{(2.24)}{=} E(t_1+t_2)u_0 + \int_0^{t_1+t_2} E(t_1+t_2-s)F(u(s))\, ds \\
&= E(t_1)(E(t_2)u_0) + \int_0^{t_1+t_2} E(t_1)(E(t_2-s)F(u(s)))\, ds \\
&= E(t_1)(E(t_2)u_0) + \int_0^{t_2} E(t_1)(E(t_2-s)F(u(s)))\, ds + \int_{t_2}^{t_1+t_2} E(t_1)(E(t_2-s)F(u(s)))\, ds \\
&= E(t_1)(E(t_2)u_0) + E(t_1)(\int_0^{t_2} E(t_2-s)F(u(s))\, ds) + \int_{t_2}^{t_1+t_2} E(t_1)(E(t_2-s)F(u(s)))\, ds \\
&= E(t_1)(E(t_2)u_0 + \int_0^{t_2} E(t_2-s)F(u(s))\, ds) + \int_0^{t_1} E(t_1-s)F(u(s))\, ds \\
&= S(t_1)(E(t_2)u_0 + \int_0^{t_2} E(t_2-s)F(u(s))\, ds) \;=\; S(t_1)(S(t_2)u_0)
\end{aligned}
$$

zu (2): Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von (1). □

Nachdem wir in diesem Abschnitt festgestellt haben, dass die Lösungsoperatoren S (bzw. S_h) für jede Anfangswertfunktion $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ (bzw. $u_{h0} \in \mathcal{V}_h$ mit $0 < h \leqslant h_0$) zeitlich global existieren, sowie dass $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ (bzw. $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ mit $0 < h \leqslant h_0$) semidynamische Systeme sind und $\mathcal{L} \in C(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ (bzw. $\mathcal{L} \in C(\mathcal{V}_h, \mathbb{R})$) ein Lyapunov-Funktional für das semidynamische System $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ (bzw. $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ mit $0 < h \leqslant h_0$) ist, werden wir uns im kommenden Abschnitt den absorbierenden Mengen dieser Systeme widmen.

5.3. Absorbierende Menge

Um das Langzeitverhalten semilinearer parabolischer Anfangs-Randwertprobleme genauer zu untersuchen, werden wir in diesem Abschnitt zeigen, dass sowohl das kontinuierliche semidynamische System $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ als auch das FE-diskretisierte semidynamische System $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ eine gleichmäßig (uniform in h) absorbierende Menge in den Räumen $L^2(\Omega)$ und $H_0^1(\Omega)$ besitzt, was uns im nächsten Abschnitt den Grundbaustein für die dissipativen semidynamischen Systeme liefert.

5.8 Satz (EXISTENZSATZ EINER ABSORBIERENDEN MENGE IN L^2). *Seien $R > 0$,*

$$B_{H_0^1(\Omega),\|\bullet\|_{L^2},R} := \{u_0 \in H_0^1(\Omega) \mid \|u_0\|_{L^2} \leqslant R\}, \quad R_0 := \left(\frac{2\kappa|\Omega|}{\lambda_1}\right)^{\frac{1}{2}} > 0,$$
$$t_0 = t_0(R) := \frac{1}{2\lambda_1} \ln\left(\frac{\lambda_1 R^2}{\kappa|\Omega|}\right), \quad C_0 := \kappa|\Omega| + \frac{1}{2}R_0^2 = \kappa|\Omega|(1 + \lambda_1^{-1}) > 0$$

wobei $\kappa > 0$ aus (5.7) und $\lambda_1 > 0$ der kleinste Eigenwert der Helmholtz-Gleichung sind. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(1): $B_{H_0^1(\Omega),\|\bullet\|_{L^2},R_0} = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \|u\|_{L^2} \leqslant R_0\}$ ist eine gleichmäßig absorbierende Menge von $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ in $L^2(\Omega)$, d.h. es gilt
$$\|S(t)u_0\|_{L^2} \leqslant R_0 \quad \forall\, t \geqslant t_0\ \forall\, u_0 \in B_{H_0^1(\Omega),\|\bullet\|_{L^2},R}$$

(2): $B_{H_0^1(\Omega),\|\bullet\|_{L^2},R_0} \cap \mathcal{V}_h = \{u_h \in \mathcal{V}_h \mid \|u_h\|_{L^2} \leqslant R_0\}$ ist eine gleichmäßig (uniform in h) absorbierende Menge von $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ in $L^2(\Omega)$ für jedes $0 < h \leqslant h_0$, d.h. es gilt
$$\exists\, h_0 > 0 : \ \|S_h(t)u_{h0}\|_{L^2} \leqslant R_0 \quad \forall\, t \geqslant t_0\ \forall\, u_{h0} \in B_{H_0^1(\Omega),\|\bullet\|_{L^2},R} \cap \mathcal{V}_h\ \forall\, 0 < h \leqslant h_0$$

(3): a) $$\int_t^{t+1} |S(s)u_0|_{H^1}^2\, ds \leqslant C_0 \quad \forall\, t \geqslant t_0\ \forall\, u_0 \in B_{H_0^1(\Omega),\|\bullet\|_{L^2},R}$$

b) $$\int_t^{t+1} |S_h(s)u_{h0}|_{H^1}^2\, ds \leqslant C_0 \quad \forall\, t \geqslant t_0\ \forall\, u_{h0} \in B_{H_0^1(\Omega),\|\bullet\|_{L^2},R} \cap \mathcal{V}_h\ \forall\, 0 < h \leqslant h_0$$

Beweis. *zu (1):* Wähle $t_0 = t_0(R) := \frac{1}{2\lambda_1} \cdot \ln\left(\frac{\lambda_1 R^2}{\kappa|\Omega|}\right)$, so gilt mithilfe von (5.12) für alle $t \geqslant t_0$

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 \overset{(5.12)}{\leqslant} \|u_0\|_{L^2}^2 \cdot e^{-2\lambda_1 t} + \frac{\kappa|\Omega|}{\lambda_1} \cdot \underbrace{(1 - e^{-2\lambda_1 t})}_{\leqslant 1\ \forall\, t \geqslant 0}$$
$$\leqslant R^2 \cdot \frac{\kappa|\Omega|}{\lambda_1 R^2} + \frac{\kappa|\Omega|}{\lambda_1} = \frac{2\kappa|\Omega|}{\lambda_1} =: R_0^2 \quad \forall\, t \geqslant t_0\ \forall\, u_0 \in B_R \tag{5.24}$$

Durch Wurzelziehen erhalten wir die behauptete Ungleichung und wir folgern direkt

$$S(t)B_{H_0^1(\Omega),\|\bullet\|_{L^2},R} \subseteq B_{H_0^1(\Omega),\|\bullet\|_{L^2},R_0} \quad \forall\, t \geqslant t_0$$

zu (2): Wegen (5.18) erhalten wir aus dem differentiellen Gronwall-Lemma A.46 wie in (5.12)

$$\|u_h(t)\|_{L^2}^2 \leqslant \|u_{h0}\|_{L^2}^2 \cdot e^{-2\lambda_1 t} + \frac{\kappa|\Omega|}{\lambda_1} \cdot (1 - e^{-2\lambda_1 t}) \quad \forall\, t \geqslant 0\; \forall\, u_{h0} \in B_{H_0^1(\Omega),\|\bullet\|_{L^2},R} \cap \mathcal{V}_h \quad \forall\, 0 < h \leqslant h_0$$

Mit der obigen Wahl von t_0 gilt analog zu (5.24) $\|u_h(t)\|_{L^2}^2 \leqslant \frac{2\kappa|\Omega|}{\lambda_1} =: R_0$ für jedes $t \geqslant t_0$, $u_{h0} \in B_{H_0^1(\Omega),\|\bullet\|_{L^2},R} \cap \mathcal{V}_h$ und für jedes $0 < h \leqslant h_0$. Dies liefert uns direkt

$$S_h(t)(B_{H_0^1(\Omega),\|\bullet\|_{L^2},R} \cap \mathcal{V}_h) \subseteq (B_{H_0^1(\Omega),\|\bullet\|_{L^2},R_0} \cap \mathcal{V}_h) \quad \forall\, t \geqslant t_0\; \forall\, 0 < h \leqslant h_0$$

zu (3): Mit (5.9) und (5.11) bekommen wir

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 + |u|_{H^1}^2 \leqslant \kappa|\Omega| \tag{5.25}$$

Integrieren wir nun beide Seiten der Ungleichung (5.25) von t bis $t+1$ für $t \geqslant t_0$, so bekommen wir

$$\frac{1}{2}\left(\|u(t+1)\|_{L^2}^2 - \|u(t)\|_{L^2}^2\right) + \int_t^{t+1} |u(s)|_{H^1}^2\, ds \leqslant \int_t^{t+1} \kappa|\Omega|\, ds = \kappa|\Omega| \tag{5.26}$$

Bringen wir jetzt den Klammerausdruck in (5.26) auf die rechte Seite, so folgt

$$\int_t^{t+1} |u(s)|_{H^1}^2\, ds \leqslant \kappa|\Omega| - \frac{1}{2}\|u(t+1)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 \leqslant \kappa|\Omega| + \frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2$$

Mit (5.24) bekommen wir insgesamt

$$\int_t^{t+1} |u(s)|_{H^1}^2\, ds \leqslant \kappa|\Omega| + \frac{1}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 \overset{(5.24)}{\leqslant} \kappa|\Omega| + \frac{1}{2}R_0^2 = \kappa|\Omega|(1+\lambda_1^{-1}) =: C_0 \quad \forall\, t \geqslant t_0$$

Analog erhalten wir aus (5.17) und (5.18)

$$\int_t^{t+1} |S_h(s)u_{h0}|_{H^1}^2\, ds \leqslant C_0 \quad \forall\, t \geqslant t_0\; \forall\, u_{h0} \in B_{H_0^1(\Omega),\|\bullet\|_{L^2},R} \cap \mathcal{V}_h\; \forall\, 0 < h \leqslant h_0$$

□

Damit können wir jetzt eine gleichmäßig (uniform in h) absorbierende Menge im Raum $H_0^1(\Omega)$ bestimmen ([27] Prop.11.3).

5.9 Satz (EXISTENZ EINER ABSORBIERENDEN MENGE IN H_0^1). *Seien $R > 0$,*

$$B_{H_0^1(\Omega),|\bullet|_{H^1},R} := \{u_0 \in H_0^1(\Omega) \mid |u_0|_{H^1} \leqslant R\},$$
$$R_1 := ((2l+1)C_0)^{\frac{1}{2}} = (\kappa|\Omega|(2l+1)(1+\lambda_1^{-1}))^{\frac{1}{2}} > 0,$$
$$t_1 = t_1(R) := t_0 + 1 = \frac{1}{2\lambda_1}\ln\left(\frac{\lambda_1 R^2}{\kappa|\Omega|}\right) + 1$$

wobei $\kappa > 0$ aus (5.7), $l > 0$ aus (5.7), $C_0 > 0$ aus Satz 5.8 und $\lambda_1 > 0$ der kleinste Eigenwert der Helmholtz-Gleichung sind. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(1): $B_{H_0^1(\Omega),|\bullet|_{H^1},R_1} = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid |u|_{H^1} \leqslant R_1\}$ ist eine gleichmäßig absorbierende Menge von $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ in $H_0^1(\Omega)$, d.h. es gilt

$$|S(t)u_0|_{H^1} \leqslant R_1 \quad \forall\, t \geqslant t_1\; \forall\, u_0 \in B_{H_0^1(\Omega),|\bullet|_{H^1},R}$$

(2): $B_{H_0^1(\Omega),|\bullet|_{H^1},R_1} \cap \mathcal{V}_h = \{u_h \in \mathcal{V}_h \mid |u_h|_{H^1} \leqslant R_1\}$ ist eine gleichmäßig (uniform in h) absorbierende Menge von $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ in $H_0^1(\Omega)$ für jedes $0 < h \leqslant h_0$, d.h. es gilt

$$\exists\, h_0 > 0 : |S_h(t)u_{h0}|_{H^1} \leqslant R_1 \quad \forall\, t \geqslant t_1\; \forall\, u_{h0} \in B_{H_0^1(\Omega),|\bullet|_{H^1},R} \cap \mathcal{V}_h\; \forall\, 0 < h \leqslant h_0$$

Beweis. *zu (1):* Multiplizieren wir (2.20) mit Au und integrieren anschließend über Ω, so bekommen wir mit (3.1) und (5.7)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|_{H^1}^2 &\leqslant \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u|_{H^1}^2 + \|Au\|_{L^2}^2 = (\nabla u_t, \nabla u)_{L^2} + (Au, Au)_{L^2} \\
&\overset{(3.1)}{=} (u_t, Au)_{L^2} + (Au, Au)_{L^2} = (F(u), Au)_{L^2} \overset{(3.1)}{=} (\nabla(F(u)), \nabla u)_{L^2} \\
&= \int_\Omega \nabla(f(u(x))) \cdot \nabla u(x)\, dx = \int_\Omega \underbrace{f'(u(x))}_{\overset{(5.7)}{\leqslant} l} \cdot \nabla u(x) \cdot \nabla u(x)\, dx \overset{(5.7)}{\leqslant} l|u|_{H^1}^2
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Unsere Berechnungen sind in der Tat gerechtfertigt, denn wegen $u(t) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ und $u_t(t) \in H^1(\Omega)$ für $t > 0$ (nach Regularitätssatz 2.7(1)) gilt $(\nabla u_t, \nabla u)_{L^2} = (u_t, Au)_{L^2}$ (siehe [27] Cor.7.3 und 11.1.2). Multiplizieren wir nun beide Seiten der Gleichung (5.27) mit 2 und integrieren anschließend beide Seiten von s bis t mit $s \in [t, t+1[$, so erhalten wir auf der linken Seite

$$\int_s^{t+1} \frac{d}{dz}|u(z)|_{H^1}^2\, dz = |u(t+1)|_{H^1}^2 - |u(s)|_{H^1}^2$$

und auf der rechten Seite

$$\int_s^{t+1} 2l|u(z)|_{H^1}^2\, dz = 2l \int_s^{t+1} |u(z)|_{H^1}^2\, dz$$

Somit haben wir insgesamt nach Addition von $|u(s)|_{H^1}^2$

$$|u(t+1)|_{H^1}^2 \leqslant 2l \int_s^{t+1} |u(z)|_{H^1}^2\, dz + |u(s)|_{H^1}^2 \tag{5.28}$$

Integrieren wir die Ungleichung (5.28) bzgl. s von t nach $t+1$, so erhalten wir auf der linken Seite wegen der Integration nach s nichts Neues. Auf der rechten Seite hingegen bekommen wir wegen $s \in [t, t+1[$

$$\begin{aligned}
&\int_t^{t+1} \left(2l \int_s^{t+1} |u(z)|_{H^1}^2\, dz + |u(s)|_{H^1}^2\right) ds \\
&= 2l \int_t^{t+1} \left(\int_s^{t+1} |u(z)|_{H^1}^2\, dz\right) ds + \int_t^{t+1} |u(s)|_{H^1}^2\, ds \\
&\leqslant 2l \int_t^{t+1} \left(\int_t^{t+1} |u(z)|_{H^1}^2\, dz\right) ds + \int_t^{t+1} |u(s)|_{H^1}^2\, ds \\
&= 2l \int_t^{t+1} |u(z)|_{H^1}^2\, dz \cdot \left(\int_t^{t+1} ds\right) + \int_t^{t+1} |u(s)|_{H^1}^2\, ds \\
&= (2l+1) \int_t^{t+1} |u(s)|_{H^1}^2\, ds
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Insgesamt erhalten wir aus (5.29) und Satz 5.8(3)a)

$$|u(t+1)|_{H^1}^2 \overset{(5.29)}{\leqslant} (2l+1) \int_t^{t+1} |u(s)|_{H^1}^2\, ds \overset{5.8}{\leqslant} (2l+1)C_0 = \kappa|\Omega|(2l+1)(1+\lambda_1^{-1}) \quad \forall\, t \geqslant t_0$$

und setzen daher

$$R_1^2 := (2l+1)k|\Omega|(1+\lambda_1^{-1}) \quad \text{und} \quad t_1 = t_1(R) := t_0(R) + 1 = \frac{1}{2\lambda_1} \ln\left(\frac{\lambda_1 R^2}{k|\Omega|}\right) + 1$$

Hieraus können wir direkt folgern, dass

$$S(t)B_{H_0^1(\Omega), |\bullet|_{H^1}, R} \subseteq B_{H_0^1(\Omega), |\bullet|_{H^1}, R_1} \quad \forall\, t \geqslant t_1$$

zu (2): Multiplizieren wir (3.14) mit $A_h u_h \in \mathcal{V}_h$ und integrieren anschließend über Ω, so erhalten wir aus (3.9), (3.13) und (5.7)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_h|^2_{H^1} \leqslant a((u_h)_t, u_h) + \|A_h u_h\|^2_{L^2} \overset{(3.9)}{=} ((u_h)_t, A_h u_h)_{L^2} + (A_h u_h, A_h u_h)_{L^2} \\
=&(P_h F(u_h), A_h u_h)_{L^2} \overset{(3.13)}{=} (F(u_h), A_h u_h)_{L^2} \overset{(3.9)}{=} a(F(u_h), u_h) = \int_\Omega \nabla F(u_h(x)) \cdot \nabla u_h(x)\, dx \\
=& \int_\Omega \underbrace{f'(u_h(x))}_{\overset{(5.7)}{\leqslant} l} \cdot \nabla u_h(x) \cdot \nabla u_h(x)\, dx \overset{(5.7)}{\leqslant} l |u_h|^2_{H^1}
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Damit haben wir (5.27) für den semidiskreten Fall gezeigt und können den Rest vom Beweis der Aussage (1) übernehmen. Insgesamt erhalten wir aus Satz 5.8(3)b) anstelle von Satz 5.8(3)a)

$$|u_h(t)|^2_{H^1} \leqslant (2l+1)C_0 = \kappa|\Omega|(2l+1)(1+\lambda_1^{-1}) =: R_1 \quad \forall\, t \geqslant t_1$$

Hieraus können wir direkt folgern, dass

$$S_h(t)(B_{H^1_0(\Omega), |\bullet|_{H^1}, R} \cap \mathcal{V}_h) \subseteq (B_{H^1_0(\Omega), |\bullet|_{H^1}, R_1} \cap \mathcal{V}_h) \quad \forall\, t \geqslant t_1\ \forall\, 0 < h \leqslant h_0$$

□

Wegen der Normäquivalenz von $|.|_{H^1}$ und $\|.\|_{H^1}$ ist es zu erwarten, dass sich die Aussagen des vorherigen Satzes 5.9 direkt auf die H^1-Vollnorm übertragen lassen.

5.10 Korollar (EXISTENZ EINER ABSORBIERENDEN MENGE IN H^1_0). *Seien $R > 0$,*

$$\begin{aligned}
B_R &:= B_{H^1_0(\Omega), \|\bullet\|_{H^1}, R} := \{u_0 \in H^1_0(\Omega) \mid \|u_0\|_{H^1} \leqslant R\}, \\
R_2 &:= (R_0^2 + R_1^2)^{\frac{1}{2}} = (\kappa|\Omega|(3\lambda_1^{-1} + 2l(1+\lambda_1^{-1}) + 1))^{\frac{1}{2}} > 0, \\
t_2 &= t_2(R) := t_1 = \frac{1}{2\lambda_1} \ln\left(\frac{\lambda_1 R^2}{\kappa|\Omega|}\right) + 1
\end{aligned}$$

wobei $\kappa > 0$ aus (5.7), $l > 0$ aus (5.7), $R_0 > 0$ aus Satz 5.8, $R_1 > 0$ aus Satz 5.9 und $\lambda_1 > 0$ der kleinste Eigenwert der Helmholtz-Gleichung sind. Dann gelten die folgenden Aussagen:

(1): $B_{R_2} = \{u \in H^1_0(\Omega) \mid \|u\|_{H^1} \leqslant R_2\}$ ist eine gleichmäßig absorbierende Menge von $(S, \mathbb{R}_+, H^1_0(\Omega))$ in $H^1_0(\Omega)$, d.h. es gilt

$$\|S(t)u_0\|_{H^1} \leqslant R_2 \quad \forall\, t \geqslant t_2\ \forall\, u_0 \in B_R$$

(2): $B_{R_2} \cap \mathcal{V}_h = \{u_h \in \mathcal{V}_h \mid \|u_h\|_{H^1} \leqslant R_2\}$ ist eine gleichmäßig (uniform in h) absorbierende Menge von $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ in $H^1_0(\Omega)$ für jedes $0 < h \leqslant h_0$, d.h. es gilt

$$\exists\, h_0 > 0 : \|S_h(t)u_{h0}\|_{H^1} \leqslant R_2 \quad \forall\, t \geqslant t_2\ \forall\, u_{h0} \in B_R \cap \mathcal{V}_h\ \forall\, 0 < h \leqslant h_0$$

Beweis. *zu (1):* Aus Satz 5.8(1)a) und Satz 5.9(1)a) folgt

$$\|u(t)\|_{H^1} = \left(\|u(t)\|^2_{L^2} + |u(t)|^2_{H^1}\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(R_0^2 + R_1^2\right)^{\frac{1}{2}} =: R_2 \quad \forall\, t \geqslant t_2\ \forall\, u_0 \in B_R$$

und daraus direkt

$$S(t)B_R \subseteq B_{R_2} \quad \forall\, t \geqslant t_2$$

zu (2): Aus Satz 5.8(2)a) und Satz 5.9(2)a) folgt vollkommen analog

$$S_h(t)(B_R \cap \mathcal{V}_h) \subseteq (B_{R_2} \cap \mathcal{V}_h) \quad \forall\, t \geqslant t_2\ \forall\, 0 < h \leqslant h_0$$

□

5.4. Dissipativität und Existenz eines globalen Attraktors

In diesem Abschnitt weisen wir die Existenz globaler Attraktoren für die semidynamischen Systeme der kontinuierlichen (bzw. der FE-diskretisierten) Reaktions-Diffusions-Gleichung $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ (bzw. $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ für jedes $0 < h \leqslant h_0$) nach. Dazu sehen wir zunächst, dass unsere Systeme einer speziellen Klasse dynamischer Systeme angehören, und zwar den sogenannten *dissipativen Systemen* (lat.: dissipātiō = Zerstreuung, Auseinanderfallen). Diese Systeme besitzen in endlich-dimensionalen Phasenräumen die schöne Eigenschaft, dass sie einen globalen Attraktor aufweisen. In unendlich-dimensionalen Räumen verlangt dieses Resultat darüber hinaus eine zusätzliche Regularität des Systems, die uns wiederum eine gewisse relative Kompaktheit liefert. Die Charakterisierung dieses Attraktors erfolgt hierbei über die ω-Limes-Menge, die zugleich die asymptotische Dynamik des zugrunde liegenden Systems in groben Zügen beschreibt. Wir verweisen auch für diesen Abschnitt auf den Anhang A.6.

5.11 Korollar. *(1): Das semidynamische System $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ ist dissipativ mit beschränkter, offener und gleichmäßig absorbierender Menge*

$$\overset{\circ}{B}_\rho = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \|u\|_{H^1} < \rho\}$$

für jedes $\rho > R_2$ mit R_2 aus Korollar 5.10.
(2): Die semidynamischen Systeme $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ sind für jedes $0 < h \leqslant h_0$ dissipativ mit beschränkter, offener und gleichmäßig (uniform in h) absorbierender Menge

$$\overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \|u\|_{H^1} < \rho\} \cap \mathcal{V}_h$$

für jedes $\rho > R_2$ mit R_2 und h_0 aus Korollar 5.10.

Beweis. Die Aussagen folgen unmittelbar aus Korollar 5.10. □

Als nächstes zeigen wir, dass die beiden semidynamischen Systeme $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ und $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ für jedes $0 < h \leqslant h_0$ einen globalen Attraktor besitzen. Für den Nachweis dieser Aussage beziehen wir uns auf den Satz A.67 aus dem Anhang A.6.c. Um den Satz jedoch ordnungsgemäß anwenden zu dürfen, müssen wir vorab nachweisen, dass die gleichmäßig absorbierenden Mengen $\overset{\circ}{B}_\rho$ und $\overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h$ mit $\rho > R_2$ aus Korollar 5.10 die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllen. Bei endlich-dimensionalen Räumen ist der Nachweis der Forderungen problemlos durchführbar. In unendlich-dimensionalen Räumen entstehen hierbei allerdings in der Regel Probleme beim Nachweis der geforderten relativen Kompaktheit von $\bigcup_{t \geqslant t_0} S(t)\overset{\circ}{B}_\rho$. Genauer erfüllt eine absorbierende Menge in unendlich-dimensionalen Räumen eine solche Eigenschaft nicht notwendigerweise. Unter zusätzlichen glättenden Eigenschaften, die wiederum Kompaktheit mit sich bringen, lässt sich diese Eigenschaft aber auch für unendlich-dimensionale Räume zeigen. Genauer erhalten wir Dank unseres Regularitätssatzes 2.7 das folgende Existenzresultat für globale Attraktoren.

5.12 Satz (Existenzsatz eines globalen Attraktors). *(1): Das dissipative semidynamische System $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ mit offener und gleichmäßig absorbierender Menge $\overset{\circ}{B}_\rho \subset H_0^1(\Omega)$, wobei $\rho > R_2$, besitzt den globalen Attraktor $\mathcal{A} = \omega(\overset{\circ}{B}_\rho) \subset H_0^1(\Omega)$. Weiter zieht dieser Attraktor $\mathcal{A}$ die Menge $\overset{\circ}{B}_\rho$ gleichmäßig an und besitzt die Darstellung*

$$\mathcal{A} = \omega(\overset{\circ}{B}_\rho) = \bigcap_{t \geqslant 0} S(t)\overset{\circ}{B}_\rho$$

(2): Das dissipative semidynamische System $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ mit offener und gleichmäßig (uniform in h) absorbierender Menge $\overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}_h$, wobei $\rho > R_2$, besitzt für jedes $0 < h \leqslant h_0$ den globalen Attraktor

$\mathcal{A}_h = \omega(\overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h) \subset \mathcal{V}_h$. Weiter zieht dieser Attraktor $\mathcal{A}_h$ die Menge $\overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h$ gleichmäßig (uniform in h) an und besitzt die Darstellung

$$\mathcal{A}_h = \omega(\overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h) = \bigcap_{t \geqslant 0} S_h(t)(\overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h) \quad \forall\, 0 < h \leqslant h_0$$

Beweis. Wir zeigen in 1. bis 3. jeweils die Voraussetzungen von Satz A.67, der uns die Existenz und die angegebene Darstellung des Attraktors $\mathcal{A}$ (bzw. $\mathcal{A}_h$ für $0 < h \leqslant h_0$) liefert. Der Nachweis für die Globalität der Attraktoren erfolgt in 4.
zu (1):

1. Die Menge $\overset{\circ}{B}_\rho$ ist per Definition nichtleer, offen und beschränkt. Damit ist insbesondere der Abschluss B_ρ nichtleer und beschränkt.

2. Nach Korollar 5.11(1) ist $\overset{\circ}{B}_\rho$ eine offene und gleichmäßig absorbierende Menge von $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$, die speziell ihren Abschluss B_ρ gleichmäßig absorbiert, d.h.

$$\exists\, t_0 := t_2(\rho) = \frac{1}{2\lambda_1} \ln\left(\frac{\lambda_1 \rho^2}{\kappa|\Omega|}\right) + 1 : \; S(t)B_\rho \subset \overset{\circ}{B}_\rho \quad \forall\, t \geqslant t_0 \tag{5.31}$$

3. Es bleibt die relative Kompaktheit zu beweisen, die wir mit dem Sobolevschen Einbettungssatz A.16(2) zeigen werden. Wegen (5.31) gilt $S(t)\overset{\circ}{B}_\rho \subset \overset{\circ}{B}_\rho\ \forall t \geqslant t_0$. Dies zeigt gerade die Beschränktheit in $H_0^1(\Omega)$

$$\|S(t)u_0\|_{H^1} < \rho \quad \forall\, t \geqslant t_0\ \forall\, u_0 \in \overset{\circ}{B}_\rho$$

Die gleichmäßige Absorption von $\overset{\circ}{B}_\rho$ liefert uns $S(nt_0)u_0 \in \overset{\circ}{B}_\rho\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, u_0 \in \overset{\circ}{B}_\rho$. Dies zusammen mit der Regularitätsaussage (2.39) mit $s = 2$ ergibt

$$\begin{aligned}\|S(t)u_0\|_{H^2} &\overset{(2.39)}{\leqslant} C(\rho, 2t_0) \quad \forall\, t \in [t_0, 2t_0]\ \forall\, u_0 \in \overset{\circ}{B}_\rho \\ \|S(t+nt_0)u_0\|_{H^2} &= \|S(t)\underbrace{S(nt_0)u_0}_{\in \overset{\circ}{B}_\rho}\|_{H^2} \overset{(2.39)}{\leqslant} C(\rho, 2t_0) \quad \forall\, t \in [t_0, 2t_0]\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, u_0 \in \overset{\circ}{B}_\rho\end{aligned}$$

und somit die Beschränktheit in $H^2(\Omega)$

$$\|S(t)u_0\|_{H^2} \leqslant C(\rho, 2t_0) \quad \forall\, t \in [nt_0, (n+1)t_0]\ \forall\, n \in \mathbb{N}\ \forall\, u_0 \in \overset{\circ}{B}_\rho$$

Damit ist die Menge $\bigcup_{t \geqslant t_0} S(t)\overset{\circ}{B}_\rho$ beschränkt in $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Nach dem Sobolevschen Einbettungssatz A.16(2) (mit $m_1 = p_1 = p_2 = 2$, $m_2 = 1$, $d = 1, 2, 3$) ist $H^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ kompakt eingebettet. Damit ist insbesondere die Einbettung $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ kompakt. Da $\bigcup_{t \geqslant t_0} S(t)\overset{\circ}{B}_\rho$ in $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ beschränkt ist, folgt daraus, dass $\bigcup_{t \geqslant t_0} S(t)\overset{\circ}{B}_\rho$ relativ kompakt in $H_0^1(\Omega)$ ist.

4. Sei $E \subset H_0^1(\Omega)$ eine beliebige beschränkte Menge. Da $\overset{\circ}{B}_\rho$ die Menge E gleichmäßig absorbiert (Korollar 5.10(1)) und $\mathcal{A}$ als Attraktor die Menge $\overset{\circ}{B}_\rho$ gleichmäßig anzieht, folgt, dass $\mathcal{A}$ auch die Menge E gleichmäßig anzieht.

zu (2):

1. Die Menge $\mathring{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h$ ist per Definition nichtleer, offen und beschränkt. Damit ist insbesondere der Abschluss $\overline{\mathring{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h}$ nichtleer und beschränkt.

2. Nach Korollar 5.11(2) ist $\mathring{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h$ eine offene und gleichmäßig (uniform in h) absorbierende Menge von $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ für $0 < h \leqslant h_0$, die speziell ihren Abschluss $\overline{\mathring{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h}$ gleichmäßig (uniform in h) absorbiert, d.h.
$$\exists\, t_0 := t_2(\rho) = \frac{1}{2\lambda_1} \ln\left(\frac{\lambda_1 \rho^2}{\kappa|\Omega|}\right) + 1 : \; S_h(t)\overline{\mathring{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h} \subset \mathring{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h \quad \forall\, t \geqslant t_0 \;\forall\, 0 < h \leqslant h_0 \tag{5.32}$$

3. Es bleibt die relative Kompaktheit zu zeigen. Da der Abschluss von $\bigcup_{t\geqslant t_0} S_h(t)\mathring{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h$ wegen (5.32) beschränkt und abgeschlossen in dem endlich dimensionalen Raum $\mathcal{V}_h$ ist, ist der Abschluss dieser Menge nach Heine-Borel kompakt in $\mathcal{V}_h$ und die Menge $\bigcup_{t\geqslant t_0} S_h(t)\mathring{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h$ daher relativ kompakt in $\mathcal{V}_h$.

4. Sei $E \subset H_0^1(\Omega)$, also $E \cap \mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}_h$ für $0 < h \leqslant h_0$, eine beliebige beschränkte Menge. Da $\mathring{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h$ die Menge $E \cap \mathcal{V}_h$ gleichmäßig (uniform in h) absorbiert (Korollar 5.10(2)) und $\mathcal{A}_h$ als Attraktor die Menge $\mathring{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h$ gleichmäßig (uniform in h) anzieht, folgt, dass $\mathcal{A}_h$ auch die Menge $E \cap \mathcal{V}_h$ gleichmäßig (uniform in h) anzieht.

$\square$

5.13 Bemerkung. *i) Man beachte, dass der kontinuierliche globale Attraktor $\mathcal{A}$ genau dann zusammenhängend ist, wenn der zugrunde liegende Funktionenraum zusammenhängend ist (Satz A.68, [27] Theo.10.5). Da $H_0^1(\Omega)$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum mit geeigneter Topologie trivialerweise zusammenhängend ist, lässt sich folgern, dass der globale Attraktor $\mathcal{A}$ aus Satz 5.12(1) des semidynamischen Systems $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ zusammenhängend ist. Ebenso ist der globale FE-Attraktor $\mathcal{A}_h$ aus Satz 5.12(2) des semidynamischen Systems $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ für $0 < h \leqslant h_0$ mit h_0 gemäß Satz 5.4(2) zusammenhängend.*
ii) Unter der Betrachtung des semidynamischen Systems $(S, \mathbb{R}_+, L^2(\Omega))$, lässt sich wie in den vorangegangenen Kapiteln und Abschnitten auch ein zusammenhängender globaler Attraktor im Raum $L^2(\Omega)$ finden ([27] Chap.11.1). Spezielle Regularitätsanalysen dieses Attraktors liefern, dass er sowohl im Raum $L^\infty(\Omega)$ als auch im Raum $H^2(\Omega)$ beschränkt ist ([27] Chap.11.2). Falls Ω ein beschränktes Gebiet mit C^∞-Rand und $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist, so ist der Attraktor $\mathcal{A}$ in diesem Fall eine beschränkte Teilmenge von $H^k(\Omega)$ für jedes $k \geqslant 0$ und es gilt insbesondere $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$, insofern $u \in \mathcal{A}$ ([27] Chap.11.2.3). Desweiteren lässt sich zeigen, dass im Inneren des Attraktors eine sogenannte Injektivitätseigenschaft - auch Rückwärts-Eindeutigkeitseigenschaft genannt - erfüllt ist ([27] Chap.11.3).

5.5. Struktur des globalen Attraktors

Die Existenz des Lyapunov-Funktionals $\mathcal{L} : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ (bzw. $\mathcal{L} : \mathcal{V}_h \longrightarrow \mathbb{R}$) für das semidynamische System $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ (bzw. $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$), die in Satz 5.3 (bzw. in Korollar 5.5) gezeigt wurde, liefert uns einige Informationen zur Struktur des globalen Attraktors, mit der sich die asymptotische Dynamik dieser Systems nahezu vollständig erfassen lässt. Genauer ist der globale Attraktor $\mathcal{A}$ (bzw. $\mathcal{A}_h$) der Reaktions-Diffusions-Gleichung gerade die instabile Mannigfaltigkeit aller Gleichgewichtspunkte von $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ (bzw. $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$). Falls die Menge der Gleichgewichtspunkte zudem diskret ist, so besteht der globale Attraktor ausschließlich aus allen heteroklinen Orbits des jeweiligen Systems. In diesem Fall lässt sich der globale Attraktor und die asymptotische Dynamik des Systems vollständig charakterisieren, indem wir auflisten, welche Gleichgewichtspunkte durch die heteroklinen Orbits miteinander verbunden sind. Wir fassen diese Resultate im folgenden Korollar zusammen.

5.14 Korollar (Struktursatz des globalen Attraktors). *(1): Der globale kontinuierliche Attraktor $\mathcal{A}$ des semidynamischen Systems $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ besitzt die Darstellung*

$$\mathcal{A} = W^u(\mathbb{G})$$

wobei $\mathbb{G}$ die Menge der Gleichgewichtspunkte von (2.20) ist. Falls $\mathbb{G}$ zusätzlich diskret ist, so gilt

$$\mathcal{A} = W^u(\mathbb{G}) = \bigcup_{\overline{x} \in \mathbb{G}} W^u(\overline{x})$$

und

$$\mathcal{A} = \mathcal{A} \cap W^s(\mathbb{G}) = \mathcal{A} \cap \bigcup_{\overline{x} \in \mathbb{G}} W^s(\overline{x})$$

(2): Der globale FE-Attraktor $\mathcal{A}_h$ des FE-diskretisierten semidynamischen Systems $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ besitzt für $0 < h \leqslant h_0$ mit h_0 aus Satz 5.4(2) die Darstellung

$$\mathcal{A}_h = W^u(\mathbb{G}_h)$$

wobei $\mathbb{G}_h$ die Menge der Gleichgewichtspunkte von (3.14) ist. Falls $\mathbb{G}_h$ zusätzlich diskret ist, so gilt

$$\mathcal{A}_h = W^u(\mathbb{G}_h) = \bigcup_{\overline{x}_h \in \mathbb{G}_h} W^u(\overline{x}_h)$$

und

$$\mathcal{A}_h = \mathcal{A}_h \cap W^s(\mathbb{G}_h) = \mathcal{A} \cap \bigcup_{\overline{x}_h \in \mathbb{G}_h} W^s(\overline{x}_h)$$

Beweis. *zu (1):* Da $\mathcal{L} \in C(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ und damit insbesondere $\mathcal{L}|_{\mathcal{A}}$ nach Satz 5.3 ein Lyapunov-Funktional für das semidynamische System $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ ist, folgt die Aussage direkt aus dem Struktursatz A.75.
zu (2): Da $\mathcal{L} \in C(\mathcal{V}_h, \mathbb{R})$ und damit insbesondere $\mathcal{L}|_{\mathcal{A}_h}$ nach Korollar 5.5 ein Lyapunov-Funktional für das semidynamische System $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ ist, folgt die Aussage direkt aus dem Struktursatz A.75. □

5.15 Bemerkung. *Im nächsten Kapitel werden wir speziell für die eindimensionale Chafee-Infante-Gleichung (1.4) ein Lyapunov-Funktional bestimmen ([23], [27] Prop.11.13, [32] Exa.2.16) und zeigen, dass die Menge der Gleichgewichtspunkte sowohl im Kontinuierlichen als auch unter FE-Diskretisierung diskret ist. Mit den Darstellungen der globalen Attraktoren aus Korollar 5.14 erhalten wir eine exakte Vorstellung vom Aussehen des jeweiligen globalen Attraktors der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung (1.4).*

5.6. Oberhalbstetigkeit des globalen Attraktors

In diesem Abschnitt werden wir die Oberhalbstetigkeit des Attraktors unter der FE-Diskretisierung zeigen ([32] Theo.7.9). Dabei handelt es sich um eine Konvergenzaussage, die besagt, dass die FE-diskretisierten Attraktoren $\mathcal{A}_h$ mit $0 < h \leqslant h_0$ für $h \to 0$ gegen eine Menge konvergieren, die im kontinuierlichen Attraktor $\mathcal{A}$ enthalten ist. Hinsichtlich dieser Angelegenheit rufen wir uns nochmals die Bedingungen ins Gedächtnis zurück, unter denen wir dieses Hauptresultat zeigen werden. Es seien die Generalvoraussetzungen 2.1 und 5.1 erfüllt. Desweiteren sei $\{\mathcal{T}_h\}$ eine uniforme Familie regulärer Triangulierungen von Ω. Unter der Voraussetzung 2.1 haben wir in Kapitel 2 gezeigt, dass sich die Reaktions-Diffusions-Gleichung (1.1) äquivalent in das Operator-AWP (2.20) umformen lässt, deren

Lösung gerade die eindeutige Lösung der Integraldarstellung (2.24) ist. Den zugehörigen Lösungsoperator haben wir in (2.54) mit S bezeichnet. In Kapitel 3 haben wir unter den zusätzlich geforderten Eigenschaften der Triangulierungen den Zustandsraum $H_0^1(\Omega)$ mittels der FEM diskretisiert und daraus das räumlich diskretisierte AWP (3.14) hergeleitet, deren Lösung auch an dieser Stelle die eindeutige Lösung der Integraldarstellung (3.15) ist. Den zugehörigen räumlich diskretisierten Lösungsoperator haben wir in (3.22) mit S_h bezeichnet. Weiter haben wir im Konvergenzsatz 3.15 gezeigt, dass die FE-diskretisierten Lösungen S_h für $h \to 0$ in der H^1-Norm gegen die kontinuierliche Lösung S konvergiert, insofern man die Approximation der Anfangsdaten entsprechend der Bemerkung 3.16i) wählt. Unter der zusätzlichen Generalvoraussetzung 5.1 konnten wir in Kapitel 5 zeigen, dass die Lösungen der Lösungsoperatoren S bzw. S_h mit $0 < h \leqslant h_0$ für beliebige Anfangsdaten $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ bzw. $u_{h0} \in \mathcal{V}_h$ zeitlich global existieren und dass $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ sowie $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ mit $0 < h \leqslant h_0$ semidynamische System erzeugen, die eine gemeinsame gleichmäßig (uniform in h) absorbierende Menge $B_{R_2} \subset H_0^1(\Omega)$ aufweisen. Aufgrund der Dissipativität dieser Systeme und der hinreichend glatten Lösungen des kontinuierlichen Systems konnten wir die Existenz globaler Attraktoren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_h$ mit $0 < h \leqslant h_0$ beweisen. Diese Attraktoren erfüllen für jedes $\rho > R_2$ wegen $\mathcal{A} = \omega(\mathring{B}_\rho) \subset \mathring{B}_\rho$ und $\mathcal{A}_h = \omega(\mathring{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h) \subset \mathring{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h \subset \mathring{B}_\rho$ für jedes $0 < h \leqslant h_0$ die Eigenschaften

$$\mathcal{A} \subset \mathring{B}_\rho \quad \text{und} \quad \bigcup_{h \in]0,h_0]} \mathcal{A}_h \subset \mathring{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h \subset \mathring{B}_\rho$$

Ehe wir in Kürze mit der Formulierung des Satzes über die Oberhalbstetigkeit der Attraktoren beginnen ([32] Theo.7.9), sei an die Definition A.76 über die Oberhalbstetigkeit der Attraktoren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_h$, an das Korollar 3.17(1)b) über die Konvergenzabschätzungen von S und S_h sowie an das Lemma 5.6 über die Stetigkeit bezüglich der Anfangsdaten von S und S_h erinnert. Man beachte dabei, dass wir für die optimale Konvergenzordnung in Korollar 3.17(1)b) stets $u_{h0} = P_h u_0$ verlangen.

5.16 Satz (OBERHALBSTETIGKEIT DES GLOBALEN ATTRAKTORS). *Sei $\mathcal{A}$ der nach Satz 5.12(1) gegebene globale Attraktor des kontinuierlichen semidynamischen Systems $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ und seien $\mathcal{A}_h$ die nach Satz 5.12(2) gegebenen globalen FE-Attraktoren der FE-diskretisierten semidynamischen Systeme $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ mit $0 < h \leqslant h_0$. Dann gilt:*

$$d_{NH}(\mathcal{A}_h, \mathcal{A}) = \sup_{u_h \in \mathcal{A}_h} \{\inf_{u \in \mathcal{A}} \|u_h - u\|_{H^1}\} \longrightarrow 0 \quad (\textit{für } h \longrightarrow 0) \tag{5.33}$$

d.h. der Attraktor der Reaktions-Diffusions-Gleichung ist oberhalbstetig unter Finiter-Elemente-Diskretisierung.

Beweis. Wähle $t_0 := t_2(\rho)$ mit $\rho > R_2$ wie in Korollar 5.10, dann besitzen die semidynamischen Systeme $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ und $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ die gemeinsame offene gleichmäßig (uniform in h) absorbierende Menge $\mathring{B}_\rho$ für $0 < h \leqslant h_0$. Daher gilt

$$S(t)(\mathring{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h) \subset S(t)\mathring{B}_\rho \subset \mathring{B}_\rho \quad \forall\, t \geqslant t_0 \tag{5.34}$$

$$S_h(t)(\mathring{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h) \subset (\mathring{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h) \subset \mathring{B}_\rho \quad \forall\, t \geqslant t_0\ \forall\, 0 < h \leqslant h_0 \tag{5.35}$$

und wie bereits erwähnt

$$\mathcal{A} \subset \mathring{B}_\rho \quad \text{und} \quad \bigcup_{h \in]0,h_0]} \mathcal{A}_h \subset (\mathring{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h) \subset \mathring{B}_\rho \tag{5.36}$$

Wir zeigen:

1. Es gibt eine stetige, streng monoton wachsende Funktion $g = g(\bullet; t_0, \rho) : [2t_0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+$ mit
$$\|S(t)u_{h0} - S_h(t)u_{h0}\|_{H^1} \leqslant g(t)h \quad \forall\, t \geqslant 2t_0\; \forall\, u_{h0} \in \overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h \tag{5.37}$$
2. Es gibt eine positive, beschränkte, streng monoton fallende Funktion $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ mit
$$\mathrm{d_{NH}}(S(t)\overset{\circ}{B}_\rho, \mathcal{A}) \leqslant f(t) \quad \forall\, t \geqslant 0 \tag{5.38}$$
3. (5.33)

1. Wir zeigen zunächst
$$\|S(nt_0)u_{h0} - S_h(nt_0)u_{h0}\|_{H^1} \leqslant g_n h \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\; \forall\, u_{h0} \in \overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h \tag{5.39}$$
wobei $g_n = g_n(t_0, \rho)$ eine positive, monoton wachsende Zahlenfolge ist. Aus (5.39) folgern wir dann für beliebiges $t \geqslant 2t_0$ mit eindeutiger Darstellung $t = nt_0 + r$ $(n \in \mathbb{N},\ r \in [t_0, 2t_0[)$
$$\|S(t)u_{h0} - S_h(t)u_{h0}\|_{H^1} \leqslant \tilde{g_n} h \quad \forall\, t \geqslant 2t_0\; \forall\, u_{h0} \in \overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h \tag{5.40}$$
wobei $\tilde{g_n} = \tilde{g_n}(t_0, \rho)$ ebenfalls positiv und monoton wachsend ist. Aus (5.40) folgt (5.37) durch Bildung einer stetigen Oberfunktion zur durch $\tilde{g_n}$ gegebenen Treppenfunktion.

- zu (5.39): Wir zeigen die Aussage mit
$$g_n := C_2^n + \sum_{i=1}^{n-1} C_2^{n-i} C_1(it_0)$$
wobei $C_2 = C_2(\rho, t_0) > 0$ die Konstante aus Aussage (3.53) (mit $T_1 = t_0$ und $T_2 = 2t_0$) und $C_1 = C_1(\bullet; \rho) : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+$ aus Lemma 5.6(1) ist. Hierbei ist g_n per Definition positiv und monoton wachsend.
Induktionsanfang: $(n = 1)$. Aus (3.53) und der Definition von g_1 erhalten wir
$$\|S(t_0)u_{h0} - S_h(t_0)u_{h0}\|_{H^1} \overset{(3.53)}{\leqslant} C_2 h = g_1 h \quad \forall\, u_{h0} \in \overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h$$
Induktionsschritt: $(n \longrightarrow n+1)$. Aus den Kozykluseigenschaften von $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ und $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ für $0 < h \leqslant h_0$ (Satz 5.7), (5.23) für $t = nt_0$, dem Induktionsanfang, der Induktionsvoraussetzung in (5.39) und der Definition von g_n erhalten wir
$$\begin{aligned}
&\|S((n+1)t_0)u_{h0} - S_h((n+1)t_0)u_{h0}\|_{H^1} \\
\overset{5.7}{\leqslant}\; &\|S(nt_0)(\underbrace{S(t_0)u_{h0}}_{\in \overset{\circ}{B}_\rho}) - S(nt_0)(\underbrace{S_h(t_0)u_{h0}}_{\in \overset{\circ}{B}_\rho})\|_{H^1} \\
&\quad + \|S(nt_0)(S_h(t_0)u_{h0}) - S_h(nt_0)(S_h(t_0)u_{h0})\|_{H^1} \\
\overset{(5.23)}{\leqslant}\; &C_1(nt_0)\|S(t_0)u_{h0} - S_h(t_0)u_{h0}\|_{H^1} \\
&\quad + \|S(nt_0)(\underbrace{S_h(t_0)u_{h0}}_{\in \overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h}) - S_h(nt_0)(\underbrace{S_h(t_0)u_{h0}}_{\in \overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h})\|_{H^1} \\
\overset{\mathrm{IA,IV}}{\leqslant}\; &C_1(nt_0)g_1 h + C_2 g_n h = C_2\left(C_1(nt_0) + g_n\right) h \\
=\; &C_2\left(C_1(nt_0) + C_2^n + \sum_{i=1}^{n-1} C_2^{n-i} C_1(it_0)\right) h = g_{n+1} h \quad \forall\, u_{h0} \in \overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h
\end{aligned}$$

- zu (5.40): Sei $t = nt_0 + r$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $r \in [t_0, 2t_0[$. Dann folgt aus den Kozykluseigenschaften von $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ und $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ mit $0 < h \leqslant h_0$ (Satz 5.7), (5.23), (3.53), (5.39) und aus den Eigenschaften, dass die Funktion C_1 monoton wachsend und $g_n \geqslant 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist:

$$
\begin{aligned}
& \|S(t)u_{h0} - S_h(t)u_{h0}\|_{H^1} \\
\overset{5.7}{\leqslant}\quad & \|S(r)(\underbrace{S(nt_0)u_{h0}}_{\in \mathring{B}_\rho}) - S(r)(\underbrace{S_h(nt_0)u_{h0}}_{\in \mathring{B}_\rho})\|_{H^1} \\
& \quad + \|S(r)(\underbrace{S_h(nt_0)u_{h0}}_{\in \mathring{B}_\rho}) - S_h(r)(\underbrace{S_h(nt_0)u_{h0}}_{\in \mathring{B}_\rho})\|_{H^1} \\
\overset{(3.53),(5.23)}{\leqslant}\quad & C_1(r)\|S(nt_0)u_{h0} - S_h(nt_0)u_{h0}\|_{H^1} + C_2 h \\
\overset{(5.39)}{\leqslant}\quad & [C_1(r)g_n + C_2]\, h \\
\leqslant\quad & \left[\left(\max_{r\in[t_0,2t_0]} C_1(r)\right) g_n + C_2\right] h \\
=\quad & [C_1(2t_0)g_n + C_2]\, h \\
\leqslant\quad & [C_1(2t_0) + C_2]\, g_n h =: \tilde{g_n} h \quad \forall\, t \geqslant 2t_0\ \forall\, u_{h0} \in \mathring{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h
\end{aligned}
$$

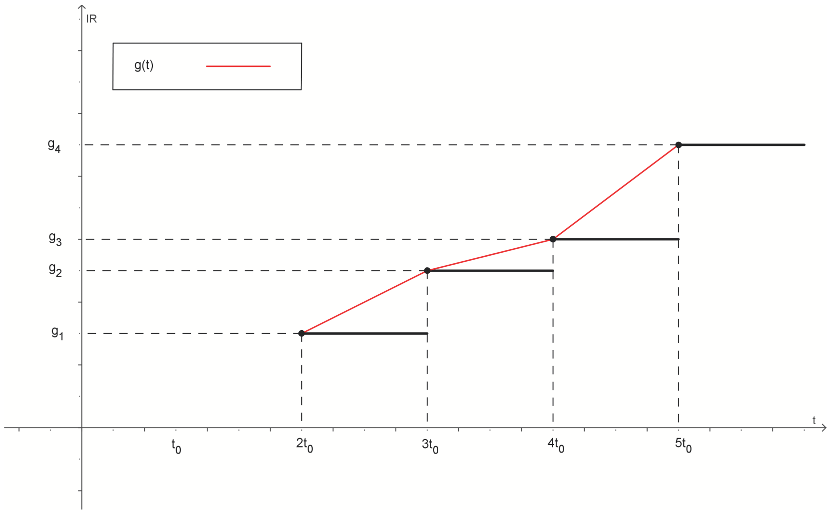


Abbildung 5.1.: Konstruktion der Funktion g für den Approximationsfehler zweier Trajektorien $S(t)u_{h0}$ und $S_h(t)u_{h0}$

2. Da $\mathcal{A}$ als globaler Attraktor die Menge $\mathring{B}_\rho$ gleichmäßig anzieht, gilt speziell für $\varepsilon := \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$

$$
\forall\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, t_n = t_n(n, \mathcal{A}, \mathring{B}_\rho) > 0 : \quad \mathrm{d}_{\mathrm{NH}}(S(t)\mathring{B}_\rho, \mathcal{A}) \leqslant \frac{1}{n} =: f_n \quad \forall\, t \geqslant t_n
$$

Aus den einzelnen Punkten f_n lässt sich eine Treppenfunktion als obere Schranke für den Abstand zwischen den Mengen $S(t)\mathring{B}_\rho$ und $\mathcal{A}$ konstruieren. Hierbei sei o.B.d.A. $t_n > t_{n-1}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Weiter wählen wir

$$
f_0 := \max_{t\in[0,1]} \mathrm{d}_{\mathrm{NH}}(S(t)\mathring{B}_\rho, \mathcal{A}) < \infty
$$

und es sei ohne Einschränkung $f_0 \geqslant 1$. Die Tatsache $f_0 < \infty$ gilt, da $\mathring{B}_\rho$ beschränkt und d_{NH} sowie $S(\bullet)\bullet$ stetig sind. Daraus lässt sich direkt schließen, dass es eine stetige Oberfunktion f der

Treppenfunktion f_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ gibt, die beschränkt (nach oben durch M, nach unten durch 0), streng monoton fallend und positiv ist. Diese Funktion erfüllt konstruktionsgemäß (5.38).

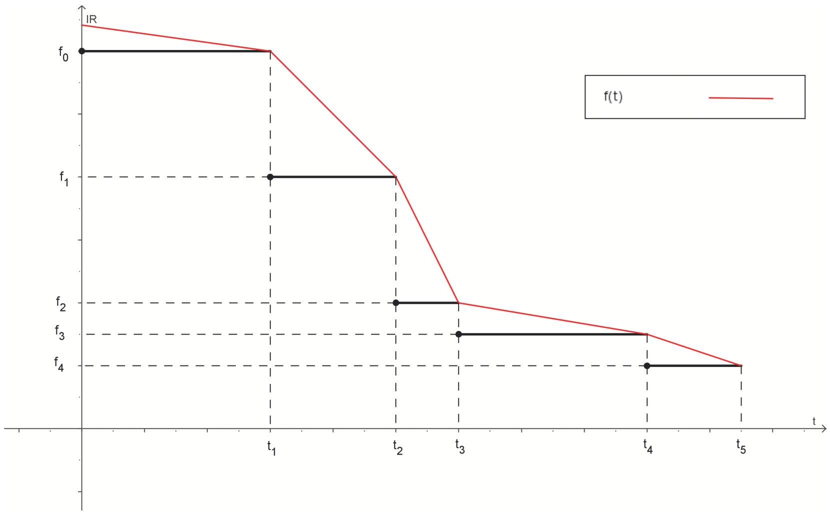


Abbildung 5.2.: Konstruktion der Funktion f für den Abstand zwischen dem kontinuierlichen Bild der absorbierenden Menge und dem kontinuierlichen Attraktor

3. Wir zeigen jetzt (5.33). Aus der Definition des nichtsymmetrischen Hausdorff-Abstandes A.60, der Tatsache $\mathcal{A}_h \subset (\overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h)$ für jedes $0 < h \leqslant h_0$, die wegen (5.36) gilt, und aus (5.37) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{d_{NH}}(S_h(t)\mathcal{A}_h, S(t)\mathcal{A}_h) &\overset{A.60}{=} \sup_{u_h \in S_h(t)\mathcal{A}_h} \{\inf_{v \in S(t)\mathcal{A}_h} \|u_h - v\|_{H^1}\} \\
&= \sup_{u_{h0} \in \mathcal{A}_h} \{\inf_{v_{h0} \in \mathcal{A}_h} \|S_h(t)u_{h0} - S(t)v_{h0}\|_{H^1}\} \\
&\leqslant \sup_{u_{h0} \in \mathcal{A}_h} \|S_h(t)u_{h0} - S(t)u_{h0}\|_{H^1} \\
&\overset{(5.36)}{\leqslant} \sup_{u_{h0} \in \overset{\circ}{B}_\rho \cap \mathcal{V}_h} \|S_h(t)u_{h0} - S(t)u_{h0}\|_{H^1} \\
&\overset{(5.37)}{\leqslant} g(t)h \quad \forall\, t \geqslant 2t_0 \;\forall\, h \in]0, h_0]
\end{aligned}$$

Daraus, aus der Dreiecksungleichung für den nichtsymmetrischen Hausdorff-Abstand in A.60, der Invarianz von $\mathcal{A}_h$ unter S_h für $0 < h \leqslant h_0$, der Tatsache $\mathcal{A}_h \subset \overset{\circ}{B}_\rho$ für $0 < h \leqslant h_0$, die wegen (5.36) gilt, und aus (5.38) folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{d_{NH}}(\mathcal{A}_h, \mathcal{A}) &\leqslant \mathrm{d_{NH}}(\mathcal{A}_h, S(t)\mathcal{A}_h) + \mathrm{d_{NH}}(S(t)\mathcal{A}_h, \mathcal{A}) \\
&\leqslant \mathrm{d_{NH}}(S_h(t)\mathcal{A}_h, S(t)\mathcal{A}_h) + \mathrm{d_{NH}}(S(t)\overset{\circ}{B}_\rho, \mathcal{A}) \\
&\overset{(5.38)}{\leqslant} g(t)h + f(t) \quad \forall\, t \geqslant 2t_0 \;\forall\, h \in]0, h_0]
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Wähle $h_C \in]0, h_0]$ mit der Eigenschaft

$$\forall\, h \in]0, h_C] : \; g(2t_0)h \; < \; f(2t_0) \tag{5.42}$$

Da f und g beide stetig sind, f streng monoton fallend und g streng monoton wachsend ist, garantieren uns dies zusammen mit (5.42) die Existenz eines Schnittpunktes dieser beiden Funktionen, d.h.

$$\forall\, h \in]0, h_C] \; \exists\, t^* = t^*(h) > 2t_0 : \; g(t^*)h \; = \; f(t^*) \tag{5.43}$$

Beachte, dass für $h \to 0$ die Funktion $g(t)h$ immer flacher wird und der Schnittpunkt t^* daher folglich gegen unendlich geht, d.h.

$$t^* = t^*(h) \longrightarrow \infty \text{ für } h \longrightarrow 0 \tag{5.44}$$

Da $f(t)$ für $t \longrightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert, erhalten wir insgesamt für $h \in]0, h_C]$

$$\mathrm{d_{NH}}(\mathcal{A}_h, \mathcal{A}) \overset{(5.41)}{\leqslant} g(t^*)h + f(t^*) \overset{(5.43)}{=} 2f(t^*) \overset{(5.44)}{\longrightarrow} 0 \quad (\text{für } h \longrightarrow 0) \tag{5.45}$$

□

Der Vollständigkeit halber kommen wir abschließend zu einem Satz, der uns zusätzlich zu der Oberhalbstetigkeit auch die Unterhalbstetigkeit und damit die Stetigkeit der Attraktoren unter FE-Diskretisierung garantiert. Dieses Resultat erfordert allerdings, dass die Funktionen f und g aus dem vorherigen Beweis ein exponentielles Wachstum besitzen. Es folgt der Satz über die *Stetigkeit des globalen Attraktors mit exponentieller Attraktionsrate* ([32] Cor.7.12).

5.17 Satz (STETIGKEIT DES GLOBALEN ATTRAKTORS). *Sei $\mathcal{A}$ der nach Satz 5.12(1) gegebene globale Attraktor des kontinuierlichen semidynamischen Systems $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ und seien $\mathcal{A}_h$ die nach Satz 5.12(2) gegebenen globalen FE-Attraktoren der FE-diskretisierten semidynamischen Systeme $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ mit $0 < h \leqslant h_0$. Die Funktion g aus (5.37) besitze für $\alpha, C_1 \in \mathbb{R}_+^*$ die Darstellung*

$$g(t) = C_1 e^{\alpha t} \quad \forall\, t \geqslant t_0$$

wobei t_0 wie im Beweis von Satz 5.16 sei. Weiter besitze die Funktion f aus (5.38) für $\eta, C_2 \in \mathbb{R}_+^*$ die Darstellung

$$f(t) = C_2 e^{-\eta t} \quad \forall\, t \geqslant 0$$

so dass die Attraktoren $\mathcal{A}_h$ gleichmäßig (uniform in h) exponentiell anziehend sind. Dann gilt:

$$\exists\, C > 0: \; d_{SH}(\mathcal{A}_h, \mathcal{A}) \leqslant C h^\beta \quad \forall\, h \in]0, h_C]$$

wobei $\beta := \frac{\eta}{\eta+\alpha} \in [0,1]$ ist.

Beweis. Wegen (5.43) gilt

$$\begin{aligned}
& h \cdot C_1 e^{\alpha t^*} = h \cdot g(t^*) \overset{(5.43)}{=} f(t^*) = C_2 e^{-\eta t^*} \\
\Longrightarrow\; & C_1 C_2^{-1} h = e^{-\eta t^* - \alpha t^*} = \left(e^{-t^*}\right)^{\eta+\alpha} \\
\Longrightarrow\; & (C_1 C_2^{-1})^{\frac{1}{\eta+\alpha}} h^{\frac{1}{\eta+\alpha}} = e^{-t^*} \\
\Longrightarrow\; & f(t^*) = e^{-\eta t^*} = \left(e^{-t^*}\right)^\eta = \left((C_1 C_2^{-1})^{\frac{1}{\eta+\alpha}} h^{\frac{1}{\eta+\alpha}}\right)^\eta = (C_1 C_2^{-1})^{\frac{\eta}{\eta+\alpha}} h^{\frac{\eta}{\eta+\alpha}} =: C_1^\beta C_2^{-\beta} h^\beta \quad \forall\, h \in]0, h_C]
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Aus (5.45) und (5.46) folgt die Schranke für die Oberhalbstetigkeit

$$\mathrm{d_{NH}}(\mathcal{A}_h, \mathcal{A}) \overset{(5.45)}{\leqslant} 2f(t^*) \overset{(5.46)}{=} 2h^\beta$$

Die Schranke für die Unterhalbstetigkeit $\mathrm{dist}(\mathcal{A}, \mathcal{A}_h)$ folgt aus der Rollenvertauschung von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_h$ im Beweis von Satz 5.16. Dies dürfen wir ohne Weiteres tun, da die Attraktionsrate uniform in $h \in]0, h_C]$ ist. □

5.7. Ergänzungen zur Stetigkeit und weitere Eigenschaften der Attraktoren

In diesem Abschnitt wollen wir abschließend einige Anmerkungen und Hintergrundinformationen zum Langzeitverhalten sowie zur Stetigkeit der Attraktoren zusammentragen.

Voraussetzungen: Die Forderungen an das Gebiet Ω und an die Triangulierungen $\{\mathcal{T}_h\}_{0<h<1}$ waren in diesem Kapitel nach wie vor dieselben wie in Kapitel 3. Zu der Generalvoraussetzung 2.1, die wir zur Theorie der Lösbarkeit benötigt haben, haben wir für die Untersuchungen des Langzeitverhaltens und speziell für die Existenz globaler Attraktoren die zusätzliche Generalvoraussetzung 5.1 eingeführt. Dort wurde zum einen verlangt, dass die reaktionsmodellierende Funktion f einen polynomialen Wachstum besitzt, genauer sich punktweise global polynomial von oben und unten beschränken lässt, und zu anderen, dass die Ableitung global nach oben beschränkt ist. Die Untersuchungen dieses Kapitels, die sich in erster Linie mit der Existenz von Attraktoren für die Reaktions-Diffusions-Gleichung beschäftigt haben, wurden bereits in [27], [32] und [33] ausführlich behandelt. In Bezug auf die Generalvoraussetzung 5.1 sei erwähnt, dass wir ausschließlich die rechte Abschätzung und keinen Gebrauch der linken Ungleichung gemacht haben.

Oberhalbstetigkeit unter FE-Diskretisierung: Es sei insgesamt nochmals darauf hingewiesen, dass uns Satz 5.16 ausschließlich die Oberhalbstetigkeit und weder die Unterhalbstetigkeit noch die Stetigkeit garantiert. Mit anderen Worten liefert uns dieser Satz das folgende mengenwertig gemeinte Verhältnis zwischen dem kontinuierlichen Attraktor $\mathcal{A}$ und den FE-Attraktoren $\mathcal{A}_h$

$$\lim_{h\to 0} \mathcal{A}_h \;\subset\; \mathcal{A}$$

d.h. unter der FE-Diskretisierung können Teile des kontinuierlichen Attraktors verloren gehen.

Konvergenzordnung der Oberhalbstetigkeit: Der Beweis zur Oberhalbstetigkeit des globalen Attraktors liefert uns keine Aussagen über die Konvergenzgeschwindigkeit der FE-Attraktoren $\mathcal{A}_h$, sondern lediglich, dass sie konvergieren. Dieses Defizit ist darauf zurückzuführen, dass wir keine Forderungen an die Attraktionsraten gestellt haben. Genauer haben wir keine Informationen über das exakte Wachstum der Funktionen f und g aus (5.41) und (5.38) im Beweis von Satz 5.16 vorausgesetzt. Dennoch lässt sich festhalten, dass die Konvergenzordnung (in der H^1-Norm gemessen) aufgrund des Korollars 3.17 bei linearen finiten Elementen nicht besser sein kann als 1. Man bedenke, dass die Konvergenzordnung der Oberhalbstetigkeit auch von der Wahl der finiten Elemente abhängt, aus denen der FE-Raum konstruiert wird.

Stetigkeit des Attraktors: Die Unterhalbstetigkeit - und damit die Stetigkeit - der FE-Attraktoren $\mathcal{A}_h$ lässt sich ebenso aufgrund der mangelnden Kenntnisse über das exakte Wachstum der Funktionen f und g aus (5.41) und (5.38) in Satz 5.16 im Allgemeinen nicht zeigen. Besitzen wir hingegen die Information, dass die FE-Attraktoren $\mathcal{A}_h$ mit exponentieller Attraktionsrate konvergieren, so garantiert uns Satz 5.17 die Stetigkeit des globalen Attraktors unter FE-Diskretisierung, d.h.

$$\lim_{h\to 0} \mathcal{A}_h \;=\; \mathcal{A}$$

und liefert uns zudem eine konkrete Konvergenzordnung für das Finite-Elemente-Verfahren. In diesem Fall bleibt der kontinuierliche Attraktor unter der FE-Diskretisierung vollständig erhalten.

Struktur des globalen Attraktors: Nach dem Struktursatz 5.14 besitzen die Attraktoren $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_h$ für $0 < h \leqslant h_0$ die Darstellungen

$$\mathcal{A} \;=\; W^u(\mathbb{G}) \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_h \;=\; W^u(\mathbb{G}_h)$$

Damit lassen sich die Aussagen zur Oberhalbstetigkeit und zur Stetigkeit des globalen Attraktors unter FE-Diskretisierung auch über die instabilen Mannigfaltigkeiten der Gleichgewichtspunkte formulieren. Mit anderen Worten gilt wegen Korollar 5.14 und Satz 5.16

$$\mathrm{d}_{\mathrm{NH}}(W^u(\mathbb{G}_h), W^u(\mathbb{G})) \longrightarrow 0 \quad (\text{für } h \longrightarrow 0)$$

sowie wegen Korollar 5.14 und Satz 5.17

$$\mathrm{d}_{\mathrm{SH}}(W^u(\mathbb{G}_h), W^u(\mathbb{G})) \longrightarrow 0 \quad (\text{für } h \longrightarrow 0)$$

Falls $\mathbb{G}$ und $\mathbb{G}_h$ beide zusätzlich diskret sind, so liefern uns Korollar 5.14 und Satz 5.16

$$\mathrm{d}_{\mathrm{NH}}(\bigcup_{\overline{x}_h \in \mathbb{G}_h} W^u(\overline{x}_h), \bigcup_{\overline{x} \in \mathbb{G}} W^u(\overline{x})) \longrightarrow 0 \quad (\text{für } h \longrightarrow 0)$$

sowie Korollar 5.14 und Satz 5.17

$$\mathrm{d}_{\mathrm{SH}}(\bigcup_{\overline{x}_h \in \mathbb{G}_h} W^u(\overline{x}_h), \bigcup_{\overline{x} \in \mathbb{G}} W^u(\overline{x})) \longrightarrow 0 \quad (\text{für } h \longrightarrow 0)$$

Zeitliche Diskretisierung: Es sei insbesondere erwähnt, dass die dargelegten Resultate der Oberhalbstetigkeit unter zeitlicher Diskretisierung erhalten bleiben. Dies sollte die praktischen numerischen Untersuchungen einiger Beispiele motivieren.

Absorbierende Mengen: Trotz der konstruktiven Beweise in diesem Kapitel, sind die Schranken speziell für die gleichmäßig (uniform in h) absorbierenden Mengen aus Korollar 5.10 sehr grob. Dennoch bieten sie uns die Möglichkeit, die gleichmäßig (uniform in h) absorbierenden Mengen beispielsweise für unsere Standardbeipiele (1.3)-(1.5) exakt zu bestimmen. Speziell für das Gebiet $\Omega = (]-1,1[)^d$ mit $d = 1,2,3$ lassen sich mithilfe des im Anhang A.3.d berechneten kleinsten Eigenwerts der Helmholtz-Gleichung die gleichmäßig (uniform in h) absorbierenden Mengen bestimmen. Man achte jedoch darauf, dass die absorbierenden Mengen ebenso vom Bifurkationsparameter λ abhängig sind, was im Beispiel der Chafee-Infante-Gleichung (1.4) in Abschnitt 5.1 bereits gezeigt wurde. Diese Tatsache ist darauf zurückzuführen, dass sich in einigen Fällen durch Änderung dieses Parameters die Lage und die Anzahl der stationären Lösungen verändert und daher auch die Form des Attraktors variiert. Da die gleichmäßig (uniform in h) absorbierende Menge den Attraktor jedoch umfasst, ändert sich diese Menge ebenso. Nichts desto trotz lassen sich für festes $\lambda > 0$ konkrete absorbierende Mengen bestimmen.

Darstellung von C_1: Es lässt sich für die Funktion C_1 aus Lemma 5.6(1) zeigen, dass sie von der Form

$$C_1 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{mit} \quad C_1(t) \;=\; e^{lt}(\lambda_1^{-1}+1)^{\frac{1}{2}}$$

ist, wobei l aus der Generalvoraussetzung 5.1 und $\lambda_1 > 0$ der kleinste Eigenwert von $A = -\triangle$ ist. Genauer erhalten wir aus dem differentiellen Gronwall-Lemma A.46

$$\begin{aligned} \|S(t)u_0 - S(t)v_0\|_{L^2} &\leqslant e^{lt}\|u_0 - v_0\|_{L^2} \quad \forall\, t \in [0,\infty[\\ |S(t)u_0 - S(t)v_0|_{H^1} &\leqslant e^{lt}|u_0 - v_0|_{H^1} \quad \forall\, t \in [0,\infty[\end{aligned}$$

und mithilfe der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung A.12 lässt sich daraus

$$\|S(t)u_0 - S(t)v_0\|_{H^1} \;\leqslant\; e^{lt}(\lambda_1^{-1}+1)^{\frac{1}{2}}\|u_0 - v_0\|_{H^1} \quad \forall\, t \in [0,\infty[$$

schließen. Die Funktion C_1 ist hierbei positiv, nach unten beschränkt sowie streng monoton wachsend und liefert uns eine mögliche Darstellung für die Funktion g aus (5.37), die wiederum in Satz 5.17

erforderlich ist. Damit ist insbesondere klar, dass die Funktion g in Satz 5.17 stets die dort aufgeführte Gestalt besitzt.

Differenzierbarkeit von S: In seiner Vorlesung zum Thema *Infinite-Dimensional Dynamical Systems* schreibt James C. Robinson „We will assume that $S(t)$ is uniformly differentiable on the attractor (this is awkward to prove) “, wobei dort das System $S(t) : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ betrachtet wird. Auch in unserem Fall lässt sich eine ähnliche Aussage treffen: Da nach Satz 2.2 für den Nemytskii-Operator $F \in C^1(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ gilt, folgt $S(\bullet)\bullet \in C^1(\mathbb{R}_+ \times H_0^1(\Omega), H_0^1(\Omega))$ direkt aus Theorem 3.4.4 und Corollary 3.4.5 in [14]. Mithilfe von Satz 2.2 ist ebenso auch ein direkter Nachweis dieser Eigenschaft möglich ([20] Lemma 2.2). Für den direkten Beweis, den wir an dieser Stelle nicht durchführen werden, wird zusätzlich zu den Halbgruppeneigenschaften von E und der stetigen Abhängigkeit der Anfangsdaten von S insbesonderen Satz 2.2(1) und (2) benötigt. Führen wir den direkten Beweis in [20] ausschließlich unter der Generalvoraussetzung 2.1 durch, so erhalten wir eine zeitlich lokale stetige Differenzierbarkeit von S, d.h. $S(\bullet)\bullet \in C^1([0, T(R)] \times B_R, H_0^1(\Omega))$ für jedes $R > 0$. Alternativ zu [20] findet sich ein weiteren Beweis speziell für den Phasenraum $L^2(\Omega)$ in Proposition 3.18 in [27].

Dimension des Bildraums: Die in Kapitel 5 behandelten Themen zur Analyse des Langzeitverhaltens basieren allesamt auf der zusätzlich zu 2.1 geforderten Generalvoraussetzung 5.1. Diese lässt sich auch verallgemeinern, indem wir die skalare Funktion f durch ein Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ ersetzen. Anstelle von und fordern wir in diesem Fall die Bedingungen

$$\begin{aligned} &(1)\colon\ -\kappa - \alpha_1 \cdot |u|^\gamma \leqslant (f(u), u) = f(u)^T u \leqslant \kappa - \alpha_2 \cdot |u|^\gamma && \forall\, u \in \mathbb{R}^n \\ &(2)\colon\ f'(u) \leqslant lI && \forall\, u \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

mit Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \gamma, \kappa, l \in \mathbb{R}$ und $\gamma \geqslant 2$. In diesem Zusammenhang bezeichnet I die Einheitsmatrix, $|.|$ die euklidische Norm und $(.,.)$ das euklidische Skalarprodukt jeweils auf dem $\mathbb{R}^n$. Unter Verwendung der Gröbner-Halbordnung ist die Aussage (2) gleichbedeutend mit

$$x^T f'(u) x \leqslant l x^T x \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n \qquad \left(\text{bzw. } x^T \frac{1}{2}\left(f'(u), f'(u)^T\right) x \leqslant l x^T x \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n\right)$$

6. Diskretisierung mit Finiter Elemente Methode (FEM) im Eindimensionalen

In diesem Kapitel untersuchen wir ein praktisches Anwendungsbeispiel hinsichtlich unserer theoretisch erzielten Ergebnisse für semilineare parabolische Anfangs-Randwertprobleme. Für diesen Zweck betrachten wir fortan die Chafee-Infante-Gleichung (1.4) auf dem eindimensionalen Gebiet $\Omega =]-1,1[$. In Abschnitt 6.1 leiten wir zunächst unter dem Einsatz der FE-Methode für die räumliche Diskretisierung und unter Anwendung des expliziten Euler-Verfahrens für die zeitliche Diskretisierung das Gleichungssystem her, das wir nachher für die Berechnung des FE-Attraktors benötigen. In Abschnitt 6.2 findet die Bifurkationsanalyse der Chafee-Infante-Gleichung (1.4) statt. Die Bifurkationsanalyse der Chafee-Infante-Gleichung wird dabei für das kontinuierliche und für das FE-diskretisierte System durchgeführt. In Abschnitt 6.3 stellen wir das MATLAB-Paket MATCONT zur Berechnung der diskreten FE-Bifurkationspunkte speziell für die eindimensionale Chafee-Infante-Gleichung vor, präsentieren die notwendige MATCONT Systemdatei und liefern anschließend die praktischen Ergebnisse der FE-Bifurkationsanalyse. In Abschnitt 6.4 stellen wir das MATLAB-Paket GAIO zur Berechnung des FE-Attraktors speziell für die eindimensionale Chafee-Infante-Gleichung vor, präsentieren die notwendige GAIO Modelldatei und leiten anschließend die praktischen Resultate der FE-Attraktorenanalyse her. In Bezug auf unser Hauptresultat, der Oberhalbstetigkeit der Attraktoren unter FE-Diskretisierung, sei erwähnt, dass wir sowohl rechner- als auch speichertechnisch rasch an die Grenzen stoßen werden (6.4.h).

6.1. Herleitung des Gleichungssystems

In diesem Abschnitt entwickeln wir das am Rechner zu lösende Gleichungssystem für die Chafee-Infante-Gleichung (1.4) auf dem eindimensionalen Gebiet $\Omega =]-1,1[$. Wir konstruieren als Erstes eine uniforme Familie regulärer Triangulierungen von Ω (6.1.a). Nach der gleichmäßigen Zerlegung des Gebiets stellen wir für jede dieser regulären Triangulierungen die Basisfunktionen und den zugehörigen FE-Raum auf (6.1.b). Mithilfe der Basisfunktionen lässt sich bekanntlich jede Funktion des FE-Raums eindeutig als Linearkombination der Basisfunktionen darstellen. Diese Tatsache verwenden wir dazu, um aus dem Galerkin-Verfahren für die Chafee-Infante-Gleichung (1.4) ein Gleichungssystem in Matrizenschreibweise herzuleiten, deren Dimension mit der des zugrunde liegenden FE-Raums übereinstimmt (6.1.c). Hierzu werden die Massenmatrix und die Steifigkeitsmatrix eingeführt und gezeigt, dass die Massenmatrix symmetrisch, tridiagonal, strikt diagonaldominant und damit invertierbar ist (6.1.d), und dass die Steifigkeitsmatrix symmetrisch und tridiagonal ist (6.1.e). Nach der Behandlung der Nichtlinearität (6.1.f), sind wir in der Lage die gewöhnliche Differentialgleichung in Matrizenschreibweise aufzustellen (6.1.g) und eine exakte Iterationsvorschrift für das explizite Euler-Verfahren anzugeben (6.1.h).

6.1.a. Konstruktion der Triangulierung

Zunächst zerlegen wir das Gebiet $\Omega =]-1,1[$ in M_h offene, äquidistante und disjunkte 1-Simplex-Elemente (Intervalle) $T_h^{(1)}, \dots, T_h^{(M_h)}$ der Länge h mit $0 < h < 1$ und $\bigcup_{j=1}^{M_h} \overline{T_h^{(j)}} = \overline{\Omega}$. Folglich ist jedes dieser Intervalle durch $T_h^{(j)} =](j-1)\frac{2}{M_h} - 1, j\frac{2}{M_h} - 1[$ für $j = 1, \ldots, M_h$ gegeben (Abb. 6.1).

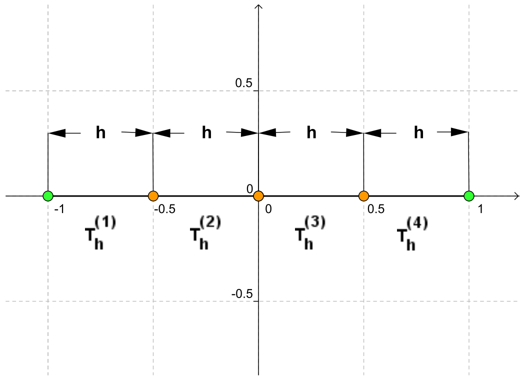


Abbildung 6.1.: Äquidistante Triangulierung von $\Omega =]-1, 1[$ in $M_h = 4$ Intervalle mit drei inneren Knoten (orange) und zwei äußeren Knoten (grün)

Desweiteren ergibt sich demnach eine offensichtliche Beziehung zwischen h und M_h

$$h = \frac{|\Omega|}{M_h} = \frac{2}{M_h}$$

Es ist nun leicht einzusehen, dass die Menge $\mathcal{T}_h = \{T_h^{(1)}, \ldots, T_h^{(M_h)}\}$ der Konstruktion zufolge eine reguläre Triangulierung von Ω bildet. Um daraus eine Familie regulärer Triangulierungen zu erzeugen, werden wir so vorgehen, dass wir bei der ersten Verfeinerung dieses bereits unterteilten Gebiets jedes dieser Intervalle $T_h^{(j)}$ für $j = 1, \ldots, M_h$ in jeweils zwei offene Intervalle halbieren und die bei der Halbierung entstehenden Berührpunkte zu der inneren Knotenmenge hinzufügen. Somit erhalten wir eine weitere feinere reguläre Triangulierung, bei der die Intervalle nur noch die halbe Länge besitzen. Durch induktives Fortsetzen gelangen wir auf diese Weise zu einer Familie regulärer Triangulierungen. Es sei lediglich am Rande vermerkt, dass wir, wenn vor der Halbierung der Intervalle i innere Knoten vorliegen, nach der Halbierung $2i+1$ innere Knoten und somit $i+1$ neue innere Knoten gewinnen. Man möge sich leicht überlegen, dass diese Vorgehensweise eine uniforme Familie regulärer Triangulierungen nach Definition A.56 hervorruft. Wir werden diese Eigenschaft kurz beweisen:

Mit $\delta > 2$ und $\rho_{T_h^{(j)}} := \frac{h}{\delta} < \frac{h}{2}$ ist die Uniformitätseigenschaft erfüllt: Eine Translation von $K_{\rho_{T_h^{(j)}}}(0) = [-\frac{h}{\delta}, \frac{h}{\delta}] \subset \mathbb{R}$ ist wegen $\operatorname{diam} T_h^{(j)} = h$ und $\operatorname{diam} K_{\rho_{T_h^{(j)}}}(0) < h$ hier in $T_h^{(j)}$ enthalten.

6.1.b. Aufstellen der Basisfunktionen

Gemäß Abschnitt 3.2 bezeichnen wir mit $P_h^{(1)}, \ldots, P_h^{(N_h)}$, $N_h = M_h - 1$, die Menge der inneren Knoten der Triangulierung $\mathcal{T}_h$ von $\Omega =]-1, 1[$. Daher gilt $P_h^{(j)} = -1 + jh$ für $j = 0, \ldots, N_h + 1$ (Abb. 6.2). Die Hutfunktionen Λ_j nehmen für jedes $j = 1, \ldots, N_h$ die Form

$$\Lambda_j : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \Lambda_j(x) := \begin{cases} \frac{1}{h}(x - P_h^{(j-1)}) & \text{, falls } x \in [P_h^{(j-1)}, P_h^{(j)}] \\ \frac{1}{h}(P_h^{(j+1)} - x) & \text{, falls } x \in [P_h^{(j)}, P_h^{(j+1)}] \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

an (Abb. 6.2). $\mathcal{V}_h$ bezeichne wieder den Ansatzraum $\mathcal{V}_h = \operatorname{span}\{\Lambda_j \mid j = 1, \ldots, N_h\}$. Beachte, dass wegen Lemma 3.1 $\dim \mathcal{V}_h = \mathbb{N}_h$ gilt.

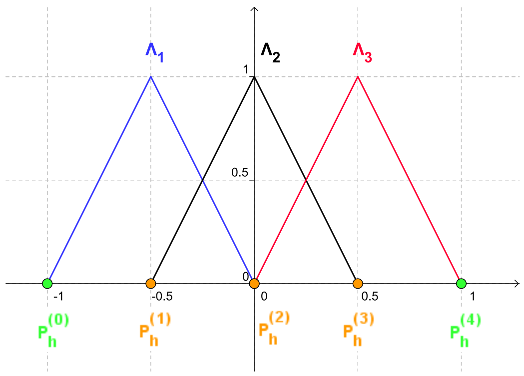


Abbildung 6.2.: Drei Hutfunktionen $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ und innere (orange) sowie äußere (grün) Knoten der Triangulierung von $\Omega =]-1, 1[$ mit $M_h = 4$, $\dim(\mathcal{V}_h) = N_h = 3$

6.1.c. Herleitung der Massenmatrix und der Steifigkeitsmatrix

Sei $u_h : [0, \infty[\longrightarrow \mathcal{V}_h$ eine Lösung des Galerkin-Verfahrens (3.7) speziell für die Chafee-Infante-Gleichung (1.4), d.h. $u_h(t)$ erfüllt die Gleichung

$$\begin{aligned}(\frac{d}{dt}u_h(t), \chi)_{L^2} + a(u_h(t), \chi) &= (\lambda(u_h(t) - u_h(t)^3), \chi)_{L^2} \quad \forall\, \chi \in \mathcal{V}_h & , t \in]0, \infty[\\ u_h(0) &= u_{h0} & , t = 0\end{aligned}$$

wobei $u_{h0} \in \mathcal{V}_h$ eine geeignete Approximation der Anfangswertfunktion darstellt. Diese Formulierung ist wegen der Darstellung aus Lemma 3.1 äquivalent zu

$$(\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N_h}\alpha_i(t)\Lambda_i, \Lambda_j)_{L^2} + a(\sum_{i=1}^{N_h}\alpha_i(t)\Lambda_i, \Lambda_j) = (\lambda(\sum_{i=1}^{N_h}\alpha_i(t)\Lambda_i - (\sum_{i=1}^{N_h}\alpha_i(t)\Lambda_i)^3), \Lambda_j)_{L^2} \quad \forall\, j = 1, \ldots, N_h$$

Mit den Umformungen

$$\begin{aligned}(\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N_h}\alpha_i(t)\Lambda_i, \Lambda_j)_{L^2} &= \sum_{i=1}^{N_h}\frac{d}{dt}\alpha_i(t)\cdot(\Lambda_i, \Lambda_j)_{L^2} \quad \forall\, j = 1, \ldots, N_h \\ a(\sum_{i=1}^{N_h}\alpha_i(t)\Lambda_i, \Lambda_j) &= \sum_{i=1}^{N_h}\alpha_i(t)\cdot a(\Lambda_i, \Lambda_j) \quad \forall\, j = 1, \ldots, N_h\end{aligned}$$

erhalten wir in Matrizenschreibweise das folgende N_h dimensionale Gleichungssystem

$$B_h \cdot \alpha' + A_h \cdot \alpha = \lambda \cdot G_h(\alpha) \tag{6.1}$$

wobei die einzelnen Matrizen und Vektoren durch

$$B_h = \begin{pmatrix} (\Lambda_1, \Lambda_1)_{L^2} & \cdots & (\Lambda_{N_h}, \Lambda_1)_{L^2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\Lambda_1, \Lambda_{N_h})_{L^2} & \cdots & (\Lambda_{N_h}, \Lambda_{N_h})_{L^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_h \times N_h}$$

$$A_h = \begin{pmatrix} a(\Lambda_1, \Lambda_1) & \cdots & a(\Lambda_{N_h}, \Lambda_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a(\Lambda_1, \Lambda_{N_h}) & \cdots & a(\Lambda_{N_h}, \Lambda_{N_h}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_h \times N_h}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{N_h}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_h}, \quad \alpha' = \begin{pmatrix} \alpha_1'(t) \\ \vdots \\ \alpha_{N_h}'(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_h}$$

$$G_h(\alpha) = \begin{pmatrix} (\sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i(t)\Lambda_i - (\sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i(t)\Lambda_i)^3, \Lambda_1)_{L^2} \\ \vdots \\ (\sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i(t)\Lambda_i - (\sum_{i=1}^{N_h} \alpha_i(t)\Lambda_i)^3, \Lambda_{N_h})_{L^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_h}$$

gegeben sind. In diesem Zusammenhang bezeichnet man B_h als **Massenmatrix** und A_h als **Steifigkeitsmatrix**.

6.1.d. Berechnung der Massenmatrix

Zunächst stellen wir fest, dass B_h (wegen $(\Lambda_i, \Lambda_j)_{L^2} = (\Lambda_j, \Lambda_i)_{L^2}$ für $i, j = 1, \ldots, N_h$) die Symmetriebedingung erfüllt. Daher genügt es für die Berechnung der Massenmatrix die Elemente auf der Hauptdiagonalen und des rechten oberen Dreiecks zu betrachten. Nach der Konstruktion der Basisfunktionen sind alle Elemente 0 bis auf diejenigen, die sich auf der Hauptdiagonalen und auf der ersten Nebendiagonalen befinden (siehe Abb.6.2), d.h.

$$(\Lambda_i, \Lambda_j)_{L^2} = 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, N_h \;\forall\, 1 \leqslant j \leqslant i-2 \text{ und } \forall\, i+2 \leqslant j \leqslant N_h$$

B_h ist folglich eine dünnbesetzte, genauer eine tridiagonale Matrix. Unsere Berechnungen schränken sich daher auf die Elemente der Hauptdiagonalen und (wegen der Symmetrie) einer Nebendiagonalen ein. Betrachten wir die Hauptdiagonale, so stellen wir fest, dass es streng genommen genügt eines der Diagonalelemente zu berechnen, da die Basisfunktionen nach Konstruktion bis auf Translation übereinstimmen. Allgemein erhalten wir

$$\begin{aligned}
(\Lambda_i, \Lambda_i)_{L^2} &= \int_\Omega \Lambda_i(x) \cdot \Lambda_i(x) dx \\
&= \int_{P_h^{(i-1)}}^{P_h^{(i)}} \left(\frac{1}{h}(x - P_h^{(i-1)})\right)^2 dx + \int_{P_h^{(i)}}^{P_h^{(i+1)}} \left(\frac{1}{h}(P_h^{(i+1)} - x)\right)^2 dx \\
&= \frac{1}{h^2}\left(\int_{P_h^{(i-1)}}^{P_h^{(i)}} x^2 - 2P_h^{(i-1)}x + (P_h^{(i-1)})^2 dx + \int_{P_h^{(i)}}^{P_h^{(i+1)}} x^2 - 2P_h^{(i+1)}x + (P_h^{(i+1)})^2 dx\right) \\
&= \frac{1}{h^2}\left(\left[\frac{1}{3}x^3 - P_h^{(i-1)}x^2 + (P_h^{(i-1)})^2 x\right]_{P_h^{(i-1)}}^{P_h^{(i)}} + \left[\frac{1}{3}x^3 - P_h^{(i+1)}x^2 + (P_h^{(i+1)})^2 x\right]_{P_h^{(i)}}^{P_h^{(i+1)}}\right) \\
&= \frac{1}{h^2}\left(\left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (P_h^{(i-1)} - P_h^{(i)})^3 + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (P_h^{(i)} - P_h^{(i+1)})^3\right) \\
&= \frac{1}{3h^2}\left((P_h^{(i)} - P_h^{(i-1)})^3 + (P_h^{(i+1)} - P_h^{(i)})^3\right) = \frac{1}{3h^2}(h^3 + h^3) = \frac{2}{3}h \quad \forall\, i = 1, \ldots, N_h
\end{aligned}$$

Dieses Translationsargument lässt sich ebenso bei der Berechnung der Nebendiagonalen anwenden, weswegen es auch hier hinreichend ist, lediglich eines der Elemente der Nebendiagonalen zu bestimmen. Auch hier erhalten wir in verallgemeinerter Form

$$\begin{aligned}
(\Lambda_i, \Lambda_{i+1})_{L^2} &= \int_\Omega \Lambda_i(x) \cdot \Lambda_{i+1}(x) dx \\
&= \int_{P_h^{(i)}}^{P_h^{(i+1)}} \frac{1}{h^2}(P_h^{(i+1)} - x)(x - P_h^{(i)}) dx \\
&= \frac{1}{h^2}\int_{P_h^{(i)}}^{P_h^{(i+1)}} -x^2 + (P_h^{(i+1)} + P_h^{(i)})x - P_h^{(i)}P_h^{(i+1)} dx \\
&= \frac{1}{h^2}\left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(P_h^{(i+1)} + P_h^{(i)})x^2 - P_h^{(i)}P_h^{(i+1)}x\right]_{P_h^{(i)}}^{P_h^{(i+1)}} \\
&= \frac{1}{h^2}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot (P_h^{(i+1)} - P_h^{(i)})^3\right) = \frac{h^3}{6h^2} = \frac{1}{6}h \quad \forall\, i = 1, \ldots, N_h - 1
\end{aligned}$$

Damit ist die Massenmatrix gegeben durch

$$B_h = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}h & \frac{1}{6}h & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{6}h & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{6}h \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{6}h & \frac{2}{3}h \end{pmatrix} = \frac{h}{6} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_h \times N_h}$$

Weiter ist die Massenmatrix B_h für jede Dimension N_h **strikt diagonaldominante Matrix**, d.h. sie erfüllt die Eigenschaft

$$|b_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_h} |b_{ij}| \quad \forall\, i = 1, \dots, N_h$$

Da strikt diagonaldominante Matrizen invertierbar sind ([13] Satz 4.6), folgt, dass auch B_h für jedes N_h invertierbar ist.

6.1.e. Berechnung der Steifigkeitsmatrix

Zunächst stellen wir auch hier fest, dass A_h (wegen $a(\Lambda_i, \Lambda_j) = a(\Lambda_j, \Lambda_i)$ für $i, j = 1, \dots, N_h$) die Symmetriebedingung erfüllt. Daher genügt es auch hier für die Berechnung der Steifigkeitsmatrix die Elemente auf der Hauptdiagonalen und des rechten oberen Dreiecks zu betrachten. Nach der Konstruktion der Basisfunktionen sind auch hier alle Elemente 0, bis auf diejenigen, die sich auf der Hauptdiagonalen und auf der ersten Nebendiagonalen befinden, d.h.

$$\begin{aligned} &a(\Lambda_i, \Lambda_j) = (\nabla\Lambda_i, \nabla\Lambda_j)_{L^2} = \int_\Omega \underbrace{\nabla\Lambda_i(x) \cdot \nabla\Lambda_j(x)}_{\equiv 0} dx = 0 \\ &\forall\, i = 1, \dots, N_h\,, \quad \forall\, 1 \leqslant j \leqslant i-2 \quad \text{und} \quad \forall\, i+2 \leqslant j \leqslant N_h \end{aligned}$$

Aufgrund der hohen Anzahl an 0 Einträgen ist A_h folglich dünnbesetzt und außerdem tridiagonal. Unsere Berechnungen schränken sich daher auch hier auf die Elemente der Hauptdiagonalen und (wegen der Symmetrie) einer Nebendiagonalen ein. Betrachten wir die Hauptdiagonale, so stellen wir fest, dass es genügt eines der Diagonalelemente zu berechnen, da die Basisfunktionen (und damit auch ihre Ableitungen) bis auf Translation übereinstimmen. Allgemein erhalten wir

$$\begin{aligned} &a(\Lambda_i, \Lambda_i) = (\nabla\Lambda_i, \nabla\Lambda_i)_{L^2} = \int_\Omega \nabla\Lambda_i(x) \cdot \nabla\Lambda_i(x) dx \\ &= \int_{P_h^{(i-1)}}^{P_h^{(i)}} \left(\nabla(\frac{1}{h}(x - P_h^{(i-1)}))\right)^2 dx + \int_{P_h^{(i)}}^{P_h^{(i+1)}} \left(\nabla(\frac{1}{h}(P_h^{(i+1)} - x))\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{h^2}\left(\int_{P_h^{(i-1)}}^{P_h^{(i)}} 1^2 dx + \int_{P_h^{(i)}}^{P_h^{(i+1)}} (-1)^2 dx\right) = \frac{1}{h^2}\left([x]_{P_h^{(i-1)}}^{P_h^{(i)}} + [x]_{P_h^{(i)}}^{P_h^{(i+1)}}\right) \\ &= \frac{1}{h^2}((P_h^{(i)} - P_h^{(i-1)}) + (P_h^{(i+1)} - P_h^{(i)})) = \frac{1}{h^2}(h+h) = \frac{2}{h} \quad \forall\, i = 1, \dots, N_h \end{aligned}$$

Dieses Translationsargument lässt sich ebenso bei der Berechnung der Nebendiagonalen anwenden, weswegen es auch hier hinreichend ist, lediglich eines der Elemente der Nebendiagonalen zu bestimmen. Auch hier erhalten wir in verallgemeinerter Form

$$\begin{aligned} &a(\Lambda_i, \Lambda_{i+1}) = (\nabla\Lambda_i, \nabla\Lambda_{i+1})_{L^2} = \int_\Omega \nabla\Lambda_i(x) \cdot \nabla\Lambda_{i+1}(x) dx \\ &= \int_{P_h^{(i)}}^{P_h^{(i+1)}} \nabla(\frac{1}{h}(P_h^{(i+1)} - x)) \cdot \nabla(\frac{1}{h}(x - P_h^{(i)})) dx = \frac{1}{h^2}\int_{P_h^{(i)}}^{P_h^{(i+1)}} (-1) \cdot 1 dx = \frac{1}{h^2}\,[-x]_{P_h^{(i)}}^{P_h^{(i+1)}} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{h^2}(P_h^{(i+1)} - P_h^{(i)}) = -\frac{h}{h^2} = -\frac{1}{h} \quad \forall\, i = 1, \ldots, N_h - 1$$

Damit ist die Steifigkeitsmatrix A_h gegeben durch

$$A_h = \begin{pmatrix} \frac{2}{h} & -\frac{1}{h} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{1}{h} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{h} & \frac{2}{h} \end{pmatrix} = \frac{1}{h} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_h \times N_h}$$

6.1.f. Aufstellen der rechten Seite

Da die Basisfunktionen nach Konstruktion die Eigenschaft

$$\Lambda_i \cdot \Lambda_j \equiv 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, N_h \;\forall\, 1 \leqslant j \leqslant i-2 \text{ und } \forall\, i+2 \leqslant j \leqslant N_h$$

erfüllen, genügt es für die Berechnung der i-ten Komponente $G_{h,i}(\alpha)$ von $G_h(\alpha)$ anstelle des Terms $\sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j(t)\Lambda_j$ lediglich $\alpha_{i-1}\Lambda_{i-1} + \alpha_i\Lambda_i + \alpha_{i+1}\Lambda_{i+1}$ zu betrachten ($i = 1, \ldots, N_h$), wobei wir zum Zwecke der Übersichtlichkeit $\alpha_0 := 0$ und $\alpha_{N_h+1} := 0$ setzen. Desweiteren ist es ausreichend, wenn wir uns diesen Term lediglich für $x \in [P_h^{(i-1)}, P_h^{(i+1)}]$ genauer ansehen, da die i-te Komponente wegen der Multiplikation mit Λ_i außerhalb dieses Intervalls den Wert 0 annimmt, d.h.

$$D_i := \alpha_{i-1}\Lambda_{i-1} + \alpha_i\Lambda_i + \alpha_{i+1}\Lambda_{i+1} = \begin{cases} \alpha_{i-1}\frac{1}{h}(P_h^{(i)} - x) + \alpha_i\frac{1}{h}(x - P_h^{(i-1)}) & , x \in [P_h^{(i-1)}, P_h^{(i)}] \\ \alpha_i\frac{1}{h}(P_h^{(i+1)} - x) + \alpha_{i+1}\frac{1}{h}(x - P_h^{(i)}) & , x \in [P_h^{(i)}, P_h^{(i+1)}] \end{cases}$$

Damit erhalten wir für die i-te Komponente $G_{h,i}(\alpha)$ der rechte Seite $G_h(\alpha)$ den folgenden Term

$$\begin{aligned}
G_{h,i}(\alpha) &= (\sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j(t)\Lambda_j - (\sum_{j=1}^{N_h} \alpha_j(t)\Lambda_j)^3, \Lambda_i)_{L^2} \\
&= (D_i - D_i^3, \Lambda_i)_{L^2} = \int_\Omega (D_i(x) - D_i(x)^3) \cdot \Lambda_i(x)dx \\
&= \int_{P_h^{(i-1)}}^{P_h^{(i)}} [\alpha_{i-1}\frac{1}{h}(P_h^{(i)} - x) + \alpha_i\frac{1}{h}(x - P_h^{(i-1)}) \\
&\qquad - (\alpha_{i-1}\frac{1}{h}(P_h^{(i)} - x) + \alpha_i\frac{1}{h}(x - P_h^{(i-1)}))^3]\frac{1}{h}(x - P_h^{(i-1)})dx \\
&+ \int_{P_h^{(i)}}^{P_h^{(i+1)}} [\alpha_i\frac{1}{h}(P_h^{(i+1)} - x) + \alpha_{i+1}\frac{1}{h}(x - P_h^{(i)}) \\
&\qquad - (\alpha_i\frac{1}{h}(P_h^{(i+1)} - x) + \alpha_{i+1}\frac{1}{h}(x - P_h^{(i)}))^3]\frac{1}{h}(P_h^{(i+1)} - x)dx \\
&= \int_0^h [\alpha_{i-1}\frac{(h-x)}{h} + \alpha_i\frac{x}{h} - \frac{1}{h^3}(\alpha_{i-1}(h-x) + \alpha_i x)^3]\frac{x}{h}dx \\
&+ \int_0^h [\alpha_i\frac{(h-x)}{h} + \alpha_{i+1}\frac{x}{h} - \frac{1}{h^3}(\alpha_i(h-x) + \alpha_{i+1}x)^3]\frac{(h-x)}{h}dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^h [\alpha_{i-1}\frac{(h-x)}{h} + \alpha_i \frac{x}{h} - \alpha_{i-1}^3 \frac{(h-x)^3}{h^3} - 3\alpha_{i-1}^2\alpha_i \frac{(h-x)^2 x}{h^3} \\
&\qquad - 3\alpha_{i-1}\alpha_i^2 \frac{(h-x)x^2}{h^3} - \alpha_i^3 \frac{x^3}{h^3}] \frac{x}{h} dx \\
&+ \int_0^h [\alpha_i \frac{(h-x)}{h} + \alpha_{i+1}\frac{x}{h} - \alpha_i^3 \frac{(h-x)^3}{h^3} - 3\alpha_i^2\alpha_{i+1}\frac{(h-x)^2 x}{h^3} \\
&\qquad - 3\alpha_i\alpha_{i+1}^2 \frac{(h-x)x^2}{h^3} - \alpha_{i+1}^3 \frac{x^3}{h^3}] \frac{(h-x)}{h} dx \\
&= \frac{h}{6}\alpha_{i-1} + \frac{2h}{3}\alpha_i + \frac{h}{6}\alpha_{i+1} - \frac{h}{20}\alpha_{i-1}^3 - \frac{2h}{5}\alpha_i^3 - \frac{h}{20}\alpha_{i+1}^3 \\
&\qquad - \frac{h}{10}\alpha_{i-1}^2\alpha_i - \frac{3h}{20}\alpha_{i-1}\alpha_i^2 - \frac{3h}{20}\alpha_i^2\alpha_{i+1} - \frac{h}{10}\alpha_i\alpha_{i+1}^2 \quad \forall\, i = 1, \dots, N_h
\end{aligned}$$

6.1.g. Aufstellen der gewöhnlichen Differentialgleichung (ODE)

Zunächst subtrahieren wir auf beiden Seiten der Gleichung (6.1) den Ausdruck $A_h \cdot \alpha$ und erhalten

$$B_h \cdot \alpha' = \lambda \cdot G_h(\alpha) - A_h \cdot \alpha$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit für das spätere Verfahren definieren wir die Matrix B durch die in Abschnitt 6.1.d aufgestellte Massenmatrix B_h, indem wir B mit $B_h = \frac{h}{6}B$ wählen. Analog definieren wir die Matrix A durch die in Abschnitt 6.1.e bestimmte Steifigkeitsmatrix A_h, indem wir A mit $A_h = \frac{1}{h}A$ wählen, und den Vektor $G(\alpha)$ durch die in Abschnitt 6.1.f bestimmte rechte Seite $G_h(\alpha)$, indem wir $G(\alpha)$ mit $G_h(\alpha) = hG(\alpha)$ wählen. Diese Notationen liefern uns

$$\frac{h}{6}B \cdot \alpha' = \lambda \cdot hG(\alpha) - \frac{1}{h}A \cdot \alpha$$

Da B_h für jedes N_h invertierbar ist, lässt sich auch die Matrix B mit Inversmatrix B^{-1} invertieren. Wir erhalten die gewöhnliche Differentialgleichung durch Linksmultiplikation mit $\frac{6}{h}$ und B^{-1}, d.h. unsere gewöhnliche Differentialgleichung ist gegeben durch

$$\alpha' = B^{-1}\frac{6}{h}(\lambda \cdot hG(\alpha) - \frac{1}{h}A \cdot \alpha) = B^{-1}6(\lambda \cdot G(\alpha) - \frac{1}{h^2}A \cdot \alpha) \tag{6.2}$$

6.1.h. Iterationsvorschrift des expliziten Euler-Verfahrens

Um diese gewöhnliche Differentialgleichung zu lösen, werden wir das explizite Euler-Verfahren anwenden. Dazu bezeichne $k > 0$ die zeitliche Diskretisierungsschrittweite und $t_n = nk$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ die diskreten Zeitpunkte. Dann ist die Iterationsvorschrift für das explizite Euler-Verfahren für die Chafee-Infante-Gleichung gegeben durch

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + k[B^{-1}6(\lambda \cdot G(\alpha_n) - \frac{1}{h^2}A \cdot \alpha_n)] \tag{6.3}$$

wobei $\alpha_n = \alpha(t_n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichnet.

6.2. Kontinuierliche und diskrete Bifurkationsanalyse

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, inwiefern die Änderung des positiven reellen Kontrollparameters λ, der bekanntlich die relative Balance zwischen dem Diffusionsterm

$\triangle u$ und dem nichtlinearen Reaktionsterm $u - u^3$ reguliert, das Lösungsverhalten der Chafee-Infante-Gleichung (1.4) beeinflusst. Dabei interessieren wir uns im Folgenden insbesondere für die Anzahl und das Aussehen der stabilen und instabilen stationären Lösungen der Chafee-Infante-Gleichung (1.4) in kontinuierlicher Form ([14], [23], [27]) und unter der FE-Diskretisierung. Wir werden dabei in beiden Fällen feststellen, dass *Pitchfork-Bifurkationen*, oder auch *Heugabel-Verzweigungen* genannt, auftreten. Im Falle der FE-diskretisierten Chafee-Infante-Gleichung (6.2) stimmt die Anzahl an diskreten Bifurkationspunkten mit der Dimension des zugrunde liegenden FE-Raums überein. Insgesamt erhalten wir aus den Informationen dieses Kapitels bereits eine einfache Vorstellung darüber, wie die Attraktoren aussehen.

6.2.a. Bifurkation der kontinuierlichen Gleichung

In diesem Abschnitt werden wir eine Bifurkationsanalyse für die kontinuierliche Chafee-Infante-Gleichung (1.4) auf dem eindimensionalen Gebiet $\Omega =]-1,1[$ durchführen ([14], [23] Kap.5, [27] 11.5). Dabei suchen wir quantitative Aussagen zu den von λ abhängigen stabilen und instabilen stationären Lösungen der Chafee-Infante-Gleichung mit homogener Dirichlet-Randbedingung.

$$\begin{aligned} u_t - \triangle u &= \lambda(u - u^3) \\ u(-1) &= u(1) = 0 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Wie wir in Kürze sehen werden, ist die Diffusion für kleine λ dominant, genauer für $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{\pi^2}{4} = \lambda_1$, wobei λ_1 den kleinsten Eigenwert der Helmholtz-Gleichung bezeichnet, und das Langzeitverhalten daher sehr einfach. Um dies einzusehen, multiplizieren wir zunächst (6.4) mit u und integrieren über Ω

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 + |u|_{H^1}^2 = \lambda \int_\Omega |u|^2 - |u|^4 \, dx$$

Durch Weglassen des Negativterms auf der rechten Seite und der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung A.12 auf der linken Seite erhalten wir

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 + \frac{\pi^2}{4}\|u\|_{L^2}^2 \leqslant \lambda \int_\Omega |u|^2 - |u|^4 \, dx \leqslant \lambda \|u\|_{L^2}^2$$

und daraus nach Multiplikation mit 2

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 \leqslant 2(\lambda - \frac{\pi^2}{4})\|u(t)\|_{L^2}^2 \quad \forall\, t > 0$$

Man beachte hierbei, dass die Konstante der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung A.12 dem kleinsten Eigenwert $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4}$ der Helmholtz-Gleichung entspricht. Dies erfolgt unmittelbar aus der Bemerkung nach der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung A.12 und aus dem Beispiel (2) im Anhang A.3.d. Aus der Anwendung des differentiellen Gronwall-Lemmas A.46 und wegen $(\lambda - \frac{\pi^2}{4}) < 0$ erhalten wir aus der letzten Ungleichung

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 \leqslant \|u(0)\|_{L^2}^2 \cdot e^{2(\lambda - \frac{\pi^2}{4})t} \longrightarrow 0 \text{ für } t \to \infty \quad \forall\, 0 \leqslant \lambda < \frac{\pi^2}{4}$$

Somit gibt es für $0 \leqslant \lambda < \frac{\pi^2}{4}$ genau einen stationäre Lösung. Diese ist gerade $u \equiv 0$ und zudem stabil, falls $\lambda = 0$, sowie asymptotisch stabil, falls $0 < \lambda < \frac{\pi^2}{4}$. Für größere λ, genauer $\lambda \geqslant \frac{\pi^2}{4}$, können wir ein derartiges Verhalten nicht erwarten. Wir werden die stationären Lösungen aus diesem Grund für allgemeine $\lambda > 0$ analysieren. Es sei bereits an dieser Stelle vermerkt, dass die Aussagen über die stationären Lösungen rein qualitativ sind und wir leider keine geschlossene Darstellung für sie erhalten werden.

Wir betrachten erneut (6.4). Die stationären Lösungen dieser Gleichung sind gerade die Lösungen der semilinearen Poisson-Gleichung mit homogener Dirichlet-Randbedingung

$$\begin{aligned} \triangle u &= -\lambda(u-u^3) = -\lambda f(u) \qquad , x \in \Omega =]-1,1[\\ u(-1) &= u(1) = 0 \qquad , x \in \overline{\Omega} = \{-1,1\} \end{aligned} \tag{6.5}$$

Man beachte, dass, insofern u eine Lösung von (6.5) ist, auch $-u$ wegen der Symmetrie der rechten Seite das RWP (6.5) löst. Um dieses Randwertproblem zu lösen, verwenden wir die sogenannte *Energiemethode*. Sei u eine Lösung von (6.5) mit $f(u) = u - u^3$. Dann folgt nach Multiplikation mit $-2u_x$

$$\frac{d}{dx}(u_x)^2 = 2u_x u_{xx} \overset{(6.5)}{=} -2\lambda(u-u^3)u_x = -2\lambda f(u)u_x = -2\lambda \frac{d}{dx}F(u)$$

wobei $F(u) = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{4}u^4$, und nach anschließender Integration über Ω und Multiplikation mit $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}(u_x)^2 = -\lambda F(u) + C \quad , C \in \mathbb{R}$$

Ein Umdefinieren der Konstanten C zu λE mit Konstanter E führt zu

$$\frac{1}{2}(u_x)^2 = -\lambda F(u) + \lambda E \qquad (\textbf{Energiegleichung}) \tag{6.6}$$

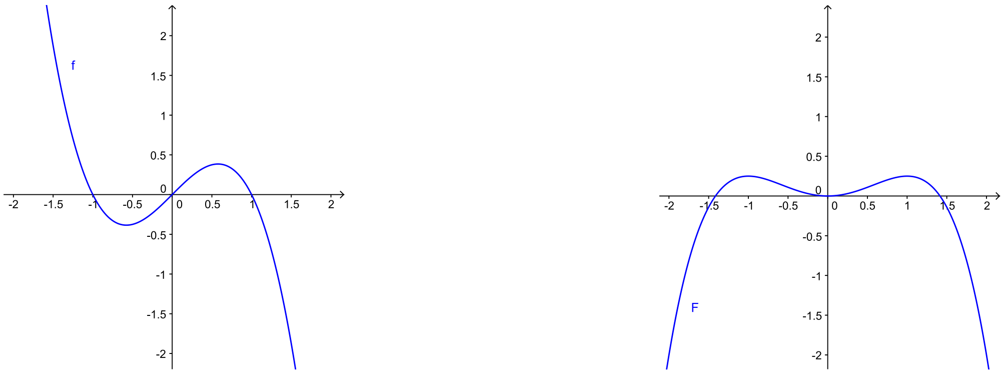


Abbildung 6.3.: Nichtlinearer Reaktionsterm der Chafee-Infante-Gleichung und seine Ableitung

Das maximale Intervall mit $\operatorname{sgn} f(u) = \operatorname{sgn} u$ ist durch $[-1,1]$ gegeben (Abb. 6.3). Insbesondere gilt $f(-1) = f(1) = 0$. Daher ist F streng monoton wachsend auf $[0,1]$ und streng monoton fallend auf $[-1,0]$ (Abb. 6.3). Insgesamt folgt daraus wegen $F(-1) = F(1) = \frac{1}{4}$ die Existenz von Umkehrfunktionen U_+ bzw. U_- auf $[0,1[$ bzw. $]-1,0]$ mit $U_+ : [0,\frac{1}{4}[\longrightarrow [0,1[$ bzw. $U_- : [0,\frac{1}{4}[\longrightarrow]-1,0]$ bezeichnen. Aus der Eigenschaft der Umkehrabbildung folgt

$$F(U_\pm(E)) = E \iff \frac{1}{2}U_\pm(E)^2 - \frac{1}{4}U_\pm(E)^4 = E \quad \forall -1 < U_-(E) \leqslant 0 \leqslant U_+(E) < 1$$

erhalten wir durch Auflösung nach $U_\pm(E)$ die Umkehrabbildungen

$$U_+(E) = \sqrt{1-\sqrt{1-4E}} = -U_-(E) \quad \forall 0 < E < \frac{1}{4}$$

Aufgrund der Symmetrieeigenschaften $F(u) = F(-u)$ erfüllen die Umkehrabbildungen

$$\tau(E) := \int_0^{U_+(E)} \frac{1}{\sqrt{E-F(u)}}\,du = \int_{U_-(E)}^0 \frac{1}{\sqrt{E-F(u)}}\,du \quad \forall 0 < E < \frac{1}{4}$$

wobei $\tau :]0, \frac{1}{4}[\longrightarrow [0, +\infty[$. Wir betrachten wieder die Energiegleichung (6.6) und erhalten nach Multiplikation mit 2 und anschließendem Wurzelziehen

$$u_x = \sqrt{2\lambda} \cdot \sqrt{E - F(u)} = \sqrt{2\lambda} \cdot \sqrt{E - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{4}u^4}$$

Durch Trennung der Variablen erhalten wir daraus ein elliptisches Integral

$$x = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^{u(x)} \frac{1}{\sqrt{E - F(u)}}\, du$$

Setzen wir

$$x(E) := \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \tau(E) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^{U_+(E)} \frac{1}{\sqrt{E - F(u)}}\, du = \int_{U_-(E)}^0 \frac{1}{\sqrt{E - F(u)}}\, du \quad \forall\, 0 < E < \frac{1}{4} \tag{6.7}$$

so beschreibt $x(E)$ die Zeit, die eine Trajektorie von (6.5) benötigt, um einen $\frac{1}{4}$-Kreis zu durchlaufen, genauer um von $(0, \sqrt{2\lambda E})$ nach $(U_+(E), 0)$ bzw. von $(U_-(E), 0)$ nach $(0, \sqrt{2\lambda E})$ zu gelangen (Abb. 6.4). Aus Symmetriegründen ist dies auch die Zeit für die anderen zwei $\frac{1}{4}$-Kreise.

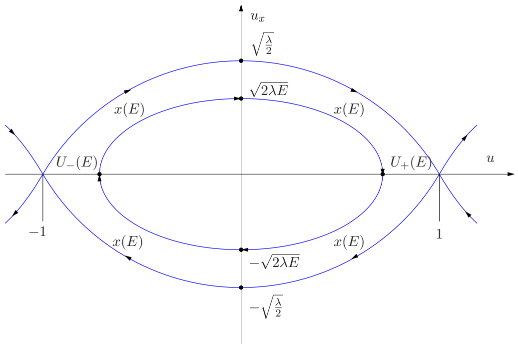


Abbildung 6.4.: Phasenportrait der Chafee-Infante-Gleichung

Die Abbildung $x(E) :]0, \frac{1}{4}[\longrightarrow [0, +\infty[$ erfüllt die folgenden Eigenschaften:

6.1 Satz (INTEGRALEIGENSCHAFTEN). *Es gilt:*

(1): $x(E)$ *ist stetig auf* $]0, \frac{1}{4}[$

(2): $\lim\limits_{\substack{E \to 0 \\ E > 0}} x(E) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$

(3): $x(E)$ *ist differenzierbar in* $]0, \frac{1}{4}[$ *mit*

$$\frac{dx(E)}{dE} > 0 \quad \forall\, E \in]0, \frac{1}{4}[$$

Daher ist $x(E)$ *streng monoton wachsend in* $]0, \frac{1}{4}[$

(4): $\lim\limits_{E \to \frac{1}{4}} x(E) = +\infty$

Insbesondere folgt damit

$$\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} < x(E) < \infty \quad \forall\, 0 < E < \frac{1}{4} \tag{6.8}$$

Beweis. *zu (1) und (2):* siehe [23] Theorem 5.1
zu (3): siehe [23] Theorem 5.2
zu (4): siehe [23] Theorem 5.3 $\square$

Um eine Lösung der Randwertaufgabe (6.5) zu bekommen, benötigen wir eine Trajektorie, die im Zeitraum $[-1, 1]$ $2m$ $\frac{1}{4}$-Kreise, also m $\frac{1}{2}$-Kreise, durchläuft, d.h. es gilt

$$2mx(E) = 2 \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{N} \tag{6.9}$$

Diese Bedingung wird auch als **Bifurkationsgleichung** von (6.5) bezeichnet. Wir umkreisen dabei im Phasendiagramm m mal einen halben Orbit und enden wieder auf der u_x-Achse. Die Bedingung (6.9) erhalten wir auch unter Verwendung von (6.7) aus (5.9.k.$^{\pm}$) und (5.10.k) in [23], die wegen der Symmetrie zusammengefasst besagen, dass

$$m\tau(E) = \sqrt{2\lambda} \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{N}$$

gilt. Um für ein festes λ die Anzahl der stationären Lösungen zu bestimmen, müssen wir die Anzahl der Werte von E bestimmen, so dass die Bedingung (6.9) erfüllt ist.

6.2 Satz (BIFURKATIONSPUNKTE DER CHAFEE-INFANTE-GLEICHUNG). *Sei* $\Omega =]-1, 1[$ *und* $\left(\frac{n}{2}\right)^2 \pi^2 < \lambda \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \pi^2$ *mit* $n \in \mathbb{N}_0$. *Dann gilt:*

> *Die Chafee-Infante-Gleichung (1.4) besitzt genau* $2n+1$ *stationäre Lösungen* $\Phi_0, \Phi_1^{\pm}, \Phi_2^{\pm}, \ldots, \Phi_n^{\pm}$. *Falls* $n = 0$ *ist, so gibt es genau eine stabile stationäre Lösung* $\Phi_0 \equiv 0$. *Falls* $n > 0$ *ist, so gibt es genau 2 stabile stationäre Lösungen* $\Phi_1^{\pm}$ *und* $2(n-1)+1$ *instabile stationäre Lösungen* $\Phi_0, \Phi_2^{\pm}, \Phi_3^{\pm}, \ldots, \Phi_n^{\pm}$.

Weiterhin gilt

> *Die Funktion* $\Phi_j^{\pm}$ $(j \geqslant 1)$ *besitzt in* $\Omega =]-1, 1[$ *genau* $j-1$ *Nullstellen. Diese sind gegeben durch* $-1 + \frac{2}{j}, -1 + 2 \cdot \frac{2}{j}, \ldots, -1 + (j-1) \cdot \frac{2}{j}$.

Insbesondere sind die Bifurkationspunkte gegeben durch

$$BP := \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\left(\frac{n}{2}\right)^2 \pi^2 \mid n \in \mathbb{N}\} = \{\frac{\pi^2}{4}, \pi^2, \frac{9\pi^2}{4}, 4\pi^2, \frac{25\pi^2}{4}, \ldots\}$$

Beweis.

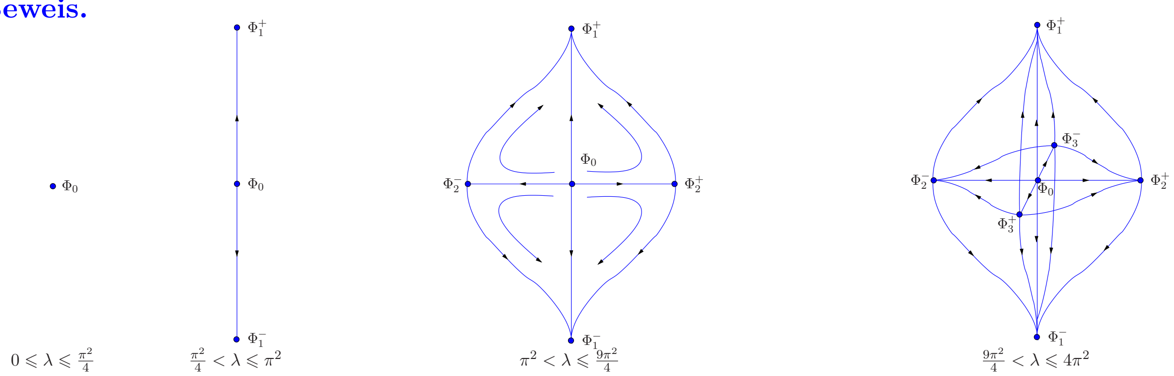


Abbildung 6.5.: Attraktoren der Chafee-Infante-Gleichung

1.Fall: $0 < \lambda \leqslant \frac{\pi^2}{4}$. Es gilt wegen (6.8), (6.9) und $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \geqslant \frac{2}{\pi}$

$$\begin{aligned}
& x(E) \overset{(6.8)}{>} \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} \geqslant 1 \\
\Longrightarrow\ & 2 \overset{(6.9)}{=} 2mx(E) > 2m \\
\Longrightarrow\ & (6.9) \text{ ist für } m \in \mathbb{N} \text{ nicht erfüllt}
\end{aligned}$$

Damit besitzt (6.5) keine nichttrivialen Lösungen, d.h. der einzige Fixpunkt ist durch $u \equiv 0$ gegeben und befindet sich im Ursprung des Phasenportraits (Abb. 6.4). Wir kennzeichnen diesen ersten Fixpunkt mit Φ_0. Der Attraktor hat folglich die Hausdorff-Dimension 0 (Abb. 6.5).

2.Fall: $\frac{\pi^2}{4} < \lambda \leqslant \pi^2$. Es gilt wegen (6.8), (6.9) und $\frac{2}{\pi} > \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \geqslant \frac{1}{\pi}$

$$\begin{aligned}
& x(E) \overset{(6.8)}{>} \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} \geqslant \frac{1}{2} \\
\Longrightarrow\ & 2 \overset{(6.9)}{=} 2mx(E) > m \\
\Longrightarrow\ & (6.9) \text{ ist für } m = 1 \text{ erfüllt, d.h. } \exists\, E_1 \in]0, \frac{1}{4}[\colon\ x(E_1) = 1
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir zusätzlich zu Φ_0 zwei weitere Fixpunkte, die wir mit $\Phi_1^{\pm}$ kennzeichnen. Einen Fixpunkt Φ_1^{+} erhalten wir aus der positiven Lösung. Einen zweiten Fixpunkt Φ_1^{-} erhalten wir aus Symmetriegründen aus der negativen Lösung. Diese Fixpunkte entsprechen wegen der Spiegelsymmetrie für die positive Lösung dem rechten halben Orbit und für die negative Lösung dem linken halben Orbit im Phasendiagramm (Abb. 6.4). Der Attraktor hat folglich die Hausdorff-Dimension 1 (Abb. 6.5).

3.Fall: $\pi^2 < \lambda \leqslant \frac{4\pi^2}{9}$. Es gilt wegen (6.8), (6.9) und $\frac{1}{\pi} > \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \geqslant \frac{2}{3\pi}$

$$\begin{aligned}
& x(E) \overset{(6.8)}{>} \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} \geqslant \frac{1}{3} \\
\Longrightarrow\ & 2 \overset{(6.9)}{=} 2mx(E) > \frac{2}{3}m \\
\Longrightarrow\ & (6.9) \text{ ist für } m = 1,2 \text{ erfüllt, d.h. } \forall\, m = 1,2\ \exists\, E_m \in]0, \frac{1}{4}[\colon\ x(E_m) = \frac{1}{m}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir zusätzlich zu $\Phi_0, \Phi_1^{\pm}$ erneut zwei weitere Fixpunkte, die wir mit $\Phi_2^{\pm}$ kennzeichnen. Auch hier erhält man einen Fixpunkt Φ_2^{+} aus der positiven und den anderen Φ_2^{-} aus der negativen Lösung. Diese Fixpunkte umlaufen einmal den Ursprung des Phasenportraits und besitzen daher genau eine Nullstelle (Abb. 6.4). Der Attraktor hat folglich die Hausdorff-Dimension 2 (Abb. 6.5).

4.Fall: $\frac{9\pi^2}{16} < \lambda \leqslant 4\pi^2$. Es gilt wegen (6.8), (6.9) und $\frac{2}{3\pi} > \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \geqslant \frac{1}{2\pi}$

$$\begin{aligned}
& x(E) \overset{(6.8)}{>} \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} \geqslant \frac{1}{4} \\
\Longrightarrow\ & 2 \overset{(6.9)}{=} 2mx(E) > \frac{1}{2}m \\
\Longrightarrow\ & (6.9) \text{ ist für } m = 1,2,3 \text{ erfüllt, d.h. } \forall\, m = 1,2,3\ \exists\, E_m \in]0, \frac{1}{4}[\colon\ x(E_m) = \frac{1}{m}
\end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir auch hier zusätzlich zu $\Phi_0, \Phi_1^{\pm}, \Phi_2^{\pm}$ zwei neue Fixpunkte, die wir mit $\Phi_3^{\pm}$ kennzeichnen. Man erhält wieder einen Fixpunkte Φ_3^{+} aus der positiven und den anderen Φ_3^{-} aus der negativen Lösung. Die Fixpunkte umlaufen nun $\frac{3}{2}$ mal den Ursprung des Phasenportraits und besitzen daher genau zwei Nullstellen (Abb. 6.4). Der Attraktor hat folglich die Hausdorff-Dimension 3 (Abb. 6.5).

Dieses Verfahren lässt sich beliebig fortführen, so dass wir für $\left(\frac{n}{2}\right)^2\pi^2 < \lambda \leqslant \left(\frac{(n+1)}{2}\right)^2\pi^2$ wegen (6.8), (6.9) und $\frac{2}{\pi n} > \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \geqslant \frac{2}{\pi(n+1)}$

$$\begin{aligned} & x(E) \overset{(6.8)}{>} \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} \geqslant \frac{1}{n+1} \\ \Longrightarrow\ & 2 \overset{(6.9)}{=} 2mx(E) > \frac{2}{n+1}m \\ \Longrightarrow\ & (6.9) \text{ ist für } m = 1,\dots,n \text{ erfüllt, d.h. } \forall\, m = 1,\dots,n\ \exists\, E_m \in]0,\frac{1}{4}[:\ x(E_m) = \frac{1}{m} \end{aligned}$$

und somit eine Menge von $2n+1$ Fixpunkten $\Phi_0, \Phi_1^\pm, \Phi_2^\pm, \dots, \Phi_n^\pm$ erhalten. Die Stabilitätseigenschaften erhält man durch Linearisierung und durch Lösen des daraus resultierenden Eigenwertproblems ([27]). □

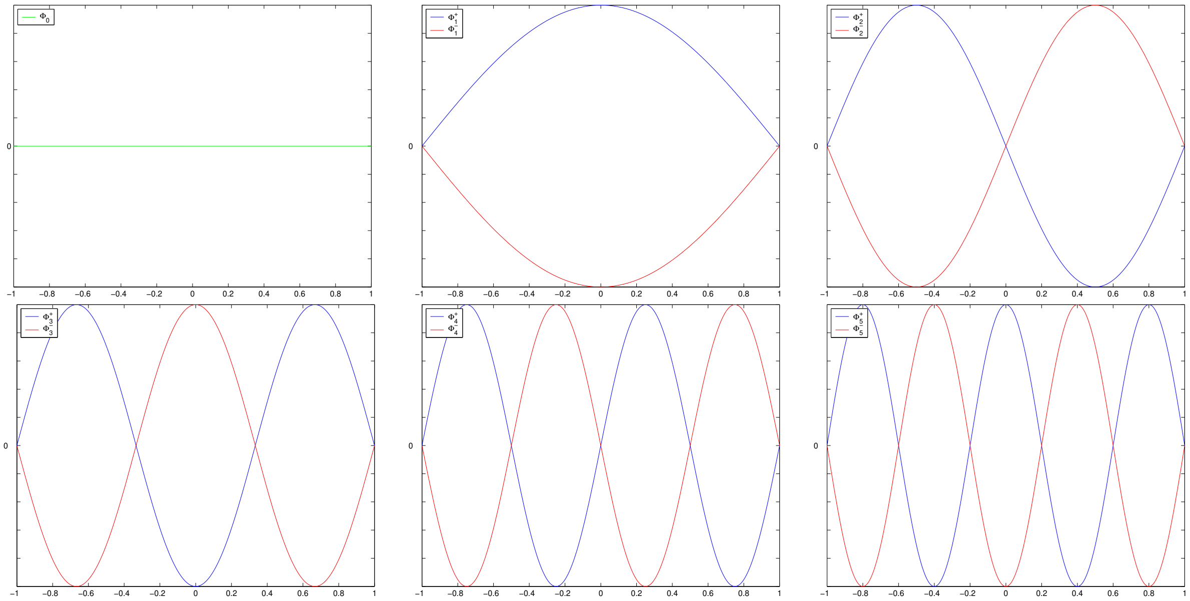


Abbildung 6.6.: Darstellung der stationären Lösungen $\Phi_0, \Phi_1^\pm, \Phi_2^\pm, \Phi_3^\pm, \Phi_4^\pm, \Phi_5^\pm$ (von links nach rechts und von oben nach unten) für die kontinuierliche Chafee-Infante-Gleichung

6.3 Bemerkung. *i) Die Chafee-Infante-Gleichung* (1.4) *erfüllt bekanntlich unsere Generalvoraussetzungen* 2.1 *und* 5.1*, besitzt nach Satz* 5.3 *das Lyapunov-Funktional*

$$\mathcal{L} : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}(u) := \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u(x)|^2 - \frac{1}{2}u(x)^2 + \frac{1}{4}u(x)^4\,dx$$

und die Menge der Gleichgewichtspunkte $\mathbb{G}_\lambda$ ist für jedes feste λ nach Satz 6.2 *diskret. Genauer ist $\mathbb{G}_\lambda$ für $\left(\frac{n}{2}\right)^2\pi^2 < \lambda \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^2\pi^2$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ durch $\mathbb{G}_\lambda = \{\Phi_0, \Phi_1^\pm, \dots, \Phi_n^\pm\}$ gegeben. Daher liefert uns Korollar* 5.14 *die folgende Darstellung für den Attraktor der Chafee-Infante-Gleichung*

$$\mathcal{A} = \bigcup_{\Phi \in \mathbb{G}_\lambda} W^u(\Phi)$$

Man beachte hierbei, dass eine Veränderung des Bifurkationsparameters λ eine Veränderung der Menge aller Gleichgewichte $\mathbb{G}_\lambda$ uns somit eine Veränderung des Attraktors $\mathcal{A}$ mit sich zieht.
ii) Für ein allgemeines eindimensionales Gebiet $\Omega =]a,b[\subset \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ lässt sich die Bifurkationstheorie der Chafee-Infante-Gleichung (1.4) *und somit insbesondere Satz* 6.2 *leicht verallgemeinern. Anstelle von* (6.9) *gilt in diesem Fall die Bifurkationsgleichung*

$$2mx(E) = (b-a) \quad \text{mit} \quad m \in \mathbb{N}$$

Die Menge der Bifurkationspunkte der Chafee-Infante-Gleichung (1.4) ist daher gegeben durch

$$BP := \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{n^2 \frac{\pi^2}{(b-a)^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

wobei $\lambda_n = n^2 \frac{\pi^2}{(b-a)^2}$ *die Eigenwerte der Helmholtz-Gleichung bezeichnet (Bsp. in Abs. A.3.d). Die Menge der Gleichgewichtspunkte* $\mathbb{G}_\lambda$ *ist hierbei für jedes feste* λ *diskret und somit erhalten wir auch in allgemeinen eindimensionalen Gebieten die Darstellung des Attraktors aus Korollar 5.14.*

6.2.b. Bifurkation mit Finiter-Elemente-Methode

Um die diskreten FE-Verzweigungspunkte zu bestimmen, betrachten wir das Gleichungssystem (6.1) in der Form

$$B_h \cdot \alpha' = \lambda \cdot G(\alpha) - A_h \cdot \alpha$$

Die diskreten Verzweigungspunkte sind dann genau die Eigenwerte des Eigenwertproblems

$$B_h v_h = \left[\frac{d}{d\alpha}(\lambda \cdot G(\alpha) - A_h \cdot \alpha)\right](0) \cdot v_h = (\lambda \cdot G'(0) - A_h) \cdot v_h \tag{6.10}$$

Dazu bestimmen wir zunächst die reelle $N_h \times N_h$ Matrix $G'(\alpha)$.

6.4 Lemma.

$$G'(\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{dG_1}{d\alpha_1}(\alpha) & \frac{dG_2}{d\alpha_1}(\alpha) & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{dG_1}{d\alpha_2}(\alpha) & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{dG_{N_h}}{d\alpha_{N_h-1}}(\alpha) \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{dG_{N_h-1}}{d\alpha_{N_h}}(\alpha) & \frac{dG_{N_h}}{d\alpha_{N_h}}(\alpha) \end{pmatrix}$$

wobei

$$\begin{aligned} \frac{dG_i}{d\alpha_i}(\alpha) &= \frac{2h}{3} - \frac{6h}{5}\alpha_i^2 - \frac{h}{10}\alpha_{i-1}^2 - \frac{3h}{10}\alpha_{i-1}\alpha_i - \frac{3h}{10}\alpha_i\alpha_{i+1} - \frac{h}{10}\alpha_{i+1}^2 \quad \forall\, i = 1, \ldots, N_h \\ \frac{dG_i}{d\alpha_{i+1}}(\alpha) &= \frac{h}{6} - \frac{3h}{20}\alpha_{i+1}^2 - \frac{3h}{20}\alpha_i^2 - \frac{h}{5}\alpha_i\alpha_{i+1} \quad \forall\, i = 1, \ldots, N_h - 1 \\ \frac{dG_i}{d\alpha_{i-1}}(\alpha) &= \frac{h}{6} - \frac{3h}{20}\alpha_{i-1}^2 - \frac{3h}{20}\alpha_i^2 - \frac{h}{5}\alpha_{i-1}\alpha_i \quad \forall\, i = 2, \ldots, N_h \end{aligned}$$

Insbesondere: $G'(0) = B_h$.

Beweis. Da $G_i(\alpha)$ nur Terme mit $\alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}$ enthält, folgt, dass $\frac{dG_i}{d\alpha_j}(\alpha) = 0$ für $j = 1, \ldots, N_h$ und $j \notin \{i-1, i, i+1\}$. Daher genügt es die Fälle $j = i$, $j = i+1$ und $j = i-1$ zu untersuchen. Die Ableitungen folgen direkt. Weiter folgt $\frac{dG_i}{d\alpha_i}(0) = \frac{2h}{3}$, $\frac{dG_i}{d\alpha_{i+1}}(0) = \frac{h}{6}$, $\frac{dG_i}{d\alpha_{i_1}}(0) = \frac{h}{6}$ und damit $G'(0) = B_h$. □

Wegen $G'(0) = B_h$ sind die Lösungen des Eigenwertproblems (6.10) äquivalent zu

$$B_h^{-1}(\lambda G'(0) - A_h)v_h = (\lambda B_h^{-1} B_h - B_h^{-1} A_h)v_h = (\lambda I - B_h^{-1} A_h)v_h = 0$$

Um die gesuchten Eigenwerte zu ermitteln, benötigen wir noch das folgende Lemma.

6.5 Lemma. *Das Eigenwertproblem*

$$\begin{aligned} Lv_{hj} &= \mu_{hj} v_{hj} \quad j = 1, \dots, N_h \\ v_{hj} &= 0 \qquad j = 0, N_h + 1 \end{aligned}$$

mit

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_h \times N_h}$$

besitzt die Eigenwerte

$$\mu_{hj} = 2\cos\left(\frac{j\pi}{N_h+1}\right) = 2\cos\left(\frac{jh\pi}{2}\right) \quad \forall\, j = 1, \dots, N_h$$

und die Eigenfunktionen

$$[v_{hj}]_k = \sin\left(\frac{kj\pi}{N_h+1}\right) = \sin\left(\frac{kjh\pi}{2}\right) \quad \forall\, k, j = 1, \dots, N_h$$

Beweis. Mithilfe des **Additionstheorems**

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

erhalten wir unmittelbar die Behauptung

$$\begin{aligned} L\,[v_{hj}]_{k=1,\dots,N_h} &= \left[\sin\left(\frac{(k+1)j\pi}{N_h+1}\right) + \sin\left(\frac{(k-1)j\pi}{N_h+1}\right)\right]_{k=1,\dots,N_h} \\ = 2\cos\left(\frac{j\pi}{N_h+1}\right)\left[\sin\left(\frac{kj\pi}{N_h+1}\right)\right]_{k=1,\dots,N_h} &= \mu_{hj}\,[v_{hj}]_{k=1,\dots,N_h} \quad \forall\, j = 1, \dots, N_h \end{aligned}$$

□

Man beachte, dass die Größe der Matrix L zwar von h abhängig ist, L jedoch keine von h abhängigen Einträge besitzt, was die Rechtfertigung dafür ist. Deshalb verwenden wir die Notation L anstelle von L_h.

6.6 Satz (Bifurkationspunkte des FE-Verfahrens für die Chafee-Infante-Gleichung). *Sei* $\Omega =]-1, 1[$. *Dann sind die FE-diskretisierten Bifurkationspunkte* λ_j *der Chafee-Infante-Gleichung gegeben durch*

$$\lambda_{hj} = \frac{6}{h(4+\mu_{hj})} \cdot \frac{2-\mu_{hj}}{h} = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{12-6\mu_{hj}}{4+\mu_{hj}} \quad \forall\, j = 1, \dots, N_h$$

mit μ_{hj} *aus Lemma 6.5.*

Beweis. Da sich die Matrix $A_h \in \mathbb{R}^{N_h \times N_h}$ auch mittels

$$A_h = \frac{2}{h} I - \frac{1}{h} L$$

darstellen lässt, besitzt A_h die Eigenwerte

$$\frac{2}{h} - \frac{1}{h}\mu_{hj} = \frac{2-\mu_{hj}}{h} \quad \forall\, j = 1, \dots, N_h$$

Analog besitzt die Matrix $B_h \in \mathbb{R}^{N_h \times N_h}$ wegen der Darstellung

$$B_h = \frac{2h}{3} I + \frac{h}{6} L$$

die Eigenwerte

$$\frac{2h}{3} + \frac{h}{6}\mu_{hj} = \frac{h(4+\mu_{hj})}{6} \quad \forall\, j = 1, \ldots, N_h$$

und da B_h invertierbar ist und die Eigenwerte ungleich 0 sind, besitzt die Inverse B_h^{-1} die Eigenwerte

$$\left(\frac{2h}{3} + \frac{h}{6}\mu_{hj}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{2h}{3} + \frac{h}{6}\mu_{hj}} = \frac{6}{h(4+\mu_{hj})} \quad \forall\, j = 1, \ldots, N_h$$

Die diskreten Verzweigungspunkte sind genau die Eigenwerte des Matrizenproduktes $B_h^{-1} A_h$ und somit gegeben durch

$$\lambda_{hj} = \frac{6}{h(4+\mu_{hj})} \cdot \frac{2-\mu_{hj}}{h} = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{12 - 6\mu_{hj}}{4+\mu_{hj}} \quad \forall\, j = 1, \ldots, N_h$$

□

Man beachte, dass die Anzahl der diskreten Verzweigungspunkte im Falle der Chafee-Infante-Gleichung mit der Dimension des betrachteten FE-Raums übereinstimmt. Im allgemeinen kann die Anzahl der diskreten Verzweigungspunkte nicht höher als die Dimension des zugrunde liegenden FE-Raums sein. Sie müssen aber ebenso nicht mir der Dimension des FE-Raums übereinstimmen. Desweiteren sei erwähnt, dass die diskreten Verzweigungspunkte - ähnlich wie bei den kontinuierlichen - vom Gebiet Ω abhängen. Für die späteren Berechnungen führen wir einige von ihnen auf.

6.7 Bemerkung. *Tabelle 6.1 enthält sowohl die kontinuierlichen als auch die diskreten Verzweigungspunkte λ_j bzw. λ_{hj} der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung auf dem Gebiet $\Omega =]-1, 1[$.*

	$\lambda_1, \lambda_{h,1}$	$\lambda_2, \lambda_{h,2}$	$\lambda_3, \lambda_{h,3}$	$\lambda_4, \lambda_{h,4}$	$\lambda_5, \lambda_{h,5}$	$\lambda_6, \lambda_{h,6}$	$\lambda_7, \lambda_{h,7}$	$\cdots$
$dim \mathcal{V}_{\frac{1}{2}} = 3$	2.5967	12	31.6891					
$dim \mathcal{V}_{\frac{1}{4}} = 7$	2.4993	10.3866	24.8721	48	82.0727	126.7562	171.6280	
$dim \mathcal{V}_{\frac{1}{8}} = 15$	2.4753	9.9971	22.8559	41.5466	66.7800	99.4885	140.8076	$\ldots$
kontinuierlich	2.4674	9.8696	22.2066	39.4784	61.6850	88.8264	120.9027	$\cdots$

Tabelle 6.1.: Bifurkationspunkte der Chafee-Infante-Gleichung in kontinuierlicher Form und unter FE-Diskretisierung

Man beachte, dass die FE-Verzweigungspunkte mit zunehmender Verfeinerung von oben gegen die kontinuierlichen Verzweigungspunkte aus Satz 6.2 konvergieren, d.h. unabhängig von der Existenz der FE-Verzweigungspunkte gilt

$$\lambda_{hj} = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{12 - 6 \cdot 2\cos\left(\frac{jh\pi}{2}\right)}{4 + 2\cos\left(\frac{jh\pi}{2}\right)} \longrightarrow \left(\frac{j}{2}\right)^2 \pi^2 = \lambda_j \quad \textit{für} \quad h \longrightarrow 0 \quad \forall\, j \in \mathbb{N}$$

6.8 Bemerkung. *i) Für ein allgemeines eindimensionales Gebiet $\Omega =]a, b[\subset \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$ sind die FE-diskretisierten Bifurkationspunkte durch*

$$BP_{FE} := \{\lambda_{hj} := \frac{1}{h^2} \cdot \frac{12 - 12 \cdot \cos\left(\frac{jh\pi}{b-a}\right)}{4 + 2 \cdot \cos\left(\frac{jh\pi}{b-a}\right)} \mid j = 1, \ldots, N_h\}$$

gegeben. Diese FE-Birfurkationspunkte der Chafee-Infante-Gleichung konvergieren auch für ein allgemeines eindimensionales Gebiet mit zunehmender Verfeinerung von oben gegen die kontinuierlichen Bifurkationspunkte, d.h. unabhängig von der Existenz der FE-Verzweigungspunkte gilt

$$\lambda_{hj} = \frac{1}{h^2} \cdot \frac{12 - 12 \cdot \cos\left(\frac{jh\pi}{b-a}\right)}{4 + 2 \cdot \cos\left(\frac{jh\pi}{b-a}\right)} \longrightarrow \left(\frac{j}{b-a}\right)^2 \pi^2 = \lambda_j \quad \textit{für} \quad h \longrightarrow 0 \quad \forall\, j \in \mathbb{N}$$

6.3. FE-Bifurkationsanalyse der Chafee-Infante-Gleichung

Das Hauptanliegen dieses Abschnitts ist die FE-Bifurkationsanalyse der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung in dem Gebiet $\Omega =]-1, 1[$ für den 3-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$. Für die praktischen Berechnungen werden wir einen Computer mit 2.4Ghz und 2GB RAM, das Betriebssystem LINUX UBUNTU, das Programm MATLAB (Version R2007b) sowie das MATLAB-Programmpaket MATCONT (Version 2.4) verwenden. Dazu beginnen wir zunächst mit einigen Informationen und Einsatzgebieten des MATLAB-Pakets MATCONT (Abs. 6.3.a), anschließend führen wir die MATCONT-Systemdatei auf (Abs. 6.3.b) und analysieren die praktischen Ergebnisse (Abs. 6.3.c).

6.3.a. Das MATLAB-Paket MATCONT zur Bifurkationsanalyse

MATCONT (MATLAB numerical continuation toolboxes) ist ein MATLAB-Paket, dass speziell zur Bifurkationsanalyse dynamischer Systeme konzeptioniert wurde. Die Software-Entwicklung dieses Pakets begann im Jahr 2000 und die erste Veröffentlichung erschien im Jahr 2003. Eine ausführliche Einführung für diese Toolbox findet sich in [1].
Wir werden MATCONT zur Berechnung der Bifurkationspunkte und Bifurkationsdiagramme für das FE-diskretisierte System (6.2) der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung verwenden. Man beachte, dass wir hierzu keine zeitliche Diskretisierung der Gleichung benötigen. Die FE-Bifurkationspunkte ermöglichen uns daraufhin eine gezielte Analyse des FE-Attraktors.

6.3.b. Chafee-Infante-Gleichung mit dem Programmpaket MATCONT

Es folgt die Systemdatei der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung im 3-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$. Die Herleitung dieses Systems ergibt sich unmittelbar aus (6.2) in Abschnitt 6.1 speziell für $N_h = 3$. In Hinblick auf (6.2) entspricht im Folgenden ui dem Wert α_i und ui' dem Wert α_i' für $i = 1, 2, 3$.

```
/* Copyright (c) 2009 Denny Otten */
/* Bifurcation-Analysis: the One-Dimensional Chafee-Infante-Equation with linear Finite-Element-Method */

u1' = -(18/7)*u3-(102/7)*u1+(72/7)*u2-(87/140)*lambda*u1*u1*u1+lambda*u1+(3/35)*lambda*u2*u2*u2
      -(3/140)*lambda*u3*u3*u3-(111/560)*lambda*u1*u1*u2-(27/280)*lambda*u1*u2*u2
      +(3/56)*lambda*u2*u2*u3+(3/112)*lambda*u2*u3*u3;
u2' =  (72/7)*u3+(72/7)*u1-(120/7)*u2+(3/35)*lambda*u1*u1*u1-(9/14)*lambda*u2*u2*u2+lambda*u2
      +(3/35)*lambda*u3*u3*u3-(3/28)*lambda*u1*u1*u2-(3/14)*lambda*u1*u2*u2-(3/14)*lambda*u2*u2*u3
      -(3/28)*lambda*u2*u3*u3;
u3' = -(102/7)*u3-(18/7)*u1+(72/7)*u2-(3/140)*lambda*u1*u1*u1+(3/35)*lambda*u2*u2*u2
      -(87/140)*lambda*u3*u3*u3+lambda*u3+(3/112)*lambda*u1*u1*u2+(3/56)*lambda*u1*u2*u2
      -(27/280)*lambda*u2*u2*u3-(111/560)*lambda*u2*u3*u3;
```

Zur Ergänzung befindet sich im Anhang A.8.a eine entsprechende Systemdatei für den 7-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{4}}$.

6.3.c. Bifurkationsanalyse

Es folgen die FE-Bifurkationsdiagramme der Chafee-Infante-Gleichung auf dem eindimensionalen Gebiet $\Omega =]-1,1[$ und im 3-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ mit stückweise linearen finiten Elementen (Abb. 6.7).

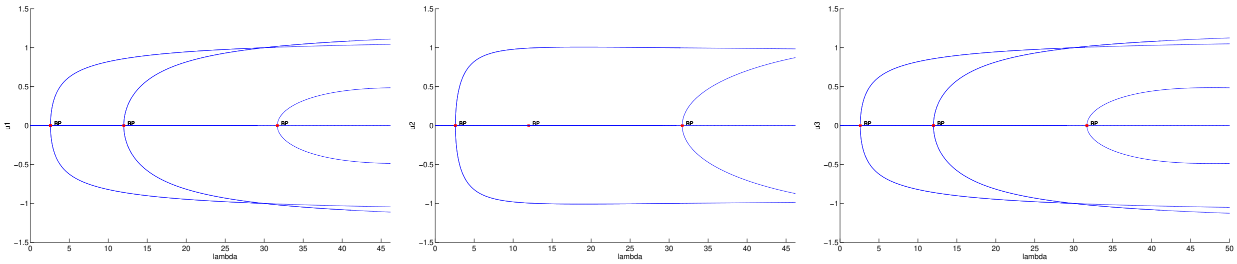


Abbildung 6.7.: FE-Bifurkationsdiagramme der Chafee-Infante-Gleichung im 3-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$

Die FE-Bifurkationsdiagramme der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung (Abb. 6.7) enthalten auf der y-Achse den Koeffizienten der 1., 2. bzw. 3. Basisfunktion von $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ (von links nach rechts) und auf der x-Achse den Bifurkationsparameter λ. Dabei deckt sich die Anzahl der FE-Bifurkationsdiagramme mit der Dimension des FE-Raums $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$. Die FE-Bifurkationspunkte sind wie zu erwarten bei $\lambda = 2.5967 = \lambda_{\frac{1}{2},1}$, $\lambda = 12 = \lambda_{\frac{1}{2},2}$ und $\lambda = 31.6891 = \lambda_{\frac{1}{2},3}$ und entsprechen den roten Markierungen auf den λ-Achsen in den Abbildungen 6.7. Diese Ergebnisse stimmen mit unseren theoretischen Berechnungen in Abschnitt 6.2.b überein (Tab. 6.1). In Hinblick darauf beachte man, dass die Anzahl der FE-Bifurkationspunkte speziell für die eindimensionale Chafee-Infante-Gleichung gleich der Dimension des zugrunde liegenden FE-Raums $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ ist und in allgemeinen Anwendungsbeispielen maximal so groß wie die Dimension des FE-Raums sein kann. Die verschiedenen Zweige in Abbildung 6.7 beschreiben die Lageveränderungen der Fixpunkte der FE-diskretisierten Chafee-Infante-Gleichung in Abhängigkeit vom Wert des Bifurkationsparameters λ. Betrachten wir beispielsweise die erste Verzweigung im linken Diagramm in Abbildung 6.7, so stellt dieser Zweig den Koeffizienten der 1. Basisfunktion des ersten Fixpunktes dar und beschreibt die Bewegung dieses Koeffizienten bei fortlaufendem Bifurkationsparameter λ. Bei den übrigen Verzweigungen ist dies entsprechend. Aufgrund der Symmetrie der Chafee-Infante-Gleichung sind auch die Bifurkationsdiagramme an der λ-Achse spiegelsymmetrisch. Insbesondere stellen wir fest, dass alle Fixpunkte bei $u_i = 0$ $(i = 1,2,3)$ entspringen und wir daher eine Pitchfork-Bifurkation - auch Heugabel-Verzweigung genannt- vorliegen haben. In Bezug auf die Abbildung 6.6, die die kontinuierlichen stationären Lösungen skizziert, bedeutet diese Feststellung, dass die FE-Approximationen $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},1}, \Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},2}, \Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},3}$ der drei stationären Lösungen $\Phi^{\pm}_1, \Phi^{\pm}_2, \Phi^{\pm}_3$ im FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ für wachsendes λ alle aus der konstanten Lösung $\Phi_{\frac{1}{2},0}$, also aus $u_{\frac{1}{2}} \equiv 0$, hervorgehen. Diese Beobachtung lässt sich auch im kontinuierlichen Fall zeigen. Genauer entwickeln sich die kontinuierlichen stationären Lösungen $\Phi^{\pm}_1, \Phi^{\pm}_2, \ldots$ in Abbildung 6.6 für wachsendes λ alle aus der konstanten Lösung Φ_0, also aus $u \equiv 0$. Um den FE-Attraktor im kommenden Abschnitt gezielter analysieren zu können, werden wir im verbleibenden Teil dieses Abschnitts einige Fixpunkte zu speziellen Bifurkationsparameterwerten λ aufführen (Tab. 6.2). Dabei betrachten wir λ genau an den FE-Bifurkationspunkten und an den dazwischen liegenden Stellen. Um für ein festen Wert λ die Fixpunkte zu ermitteln, benötigen wir die Kenntnis über die Richtungen, in die die einzelnen Verzweigungen in Abbildung 6.7 verlaufen. Diese Richtungen erhalten wir unmittelbar aus Abbildung 6.6. Denn betrachten wir beispielsweise Φ^{+}_3 in Abbildung 6.6, so stellen wir bei einer Approximation dieser Funktion in $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ mittels unserer drei Hutfunktionen fest, dass der 1. und 3. Koeffizient der Basisfunktionen positiv und der 2. negativ ist. Folglich verläuft die 3. Verzweigung im ersten und dritten Diagramm in Abbildung 6.7 von unten nach oben und die 3. Verzweigung im zweiten Diagramm in Abbildung 6.7 von oben nach unten. Für die übrigen Verzweigungen lassen sich die Richtungen analog festlegen, so dass wir nun umgehend die einzelnen Koordinatenwerte der Fixpunkte aus der Abbildung 6.7 ablesen können (Tab. 6.2).

$\lambda\backslash\Phi_{\frac{1}{2},i}$	$\Phi_{\frac{1}{2},0}$	$\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},1}$	$\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},2}$	$\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},3}$
1	$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$			
2.5967$=\lambda_{\frac{1}{2},1}$	$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$			
7	$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$	$\pm\begin{pmatrix}0.7321\\0.9237\\0.7321\end{pmatrix}$		
12$=\lambda_{\frac{1}{2},2}$	$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$	$\pm\begin{pmatrix}0.8586\\0.9948\\0.8586\end{pmatrix}$		
22	$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$	$\pm\begin{pmatrix}0.9603\\1.0067\\0.9603\end{pmatrix}$	$\pm\begin{pmatrix}-0.8704\\0.0\\0.8704\end{pmatrix}$	
31.6891$=\lambda_{\frac{1}{2},3}$	$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$	$\pm\begin{pmatrix}1.0062\\0.9984\\1.0062\end{pmatrix}$	$\pm\begin{pmatrix}-1.0176\\0.0\\1.0176\end{pmatrix}$	
45	$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$	$\pm\begin{pmatrix}1.0411\\0.9863\\1.0411\end{pmatrix}$	$\pm\begin{pmatrix}-1.1055\\0.0\\1.1055\end{pmatrix}$	$\pm\begin{pmatrix}0.4828\\-0.8466\\0.4828\end{pmatrix}$

Tabelle 6.2.: Spezielle Fixpunkte für Chafee-Infante-Gleichung bei einem 3-dimensionalen FE-Raum in Abhängigkeit des Bifurkationsparameters

6.4. FE-Attraktoranalyse der Chafee-Infante-Gleichung

Das Hauptanliegen dieses Abschnitts ist die praktische Analyse der FE-Attraktoren der Chafee-Infante-Gleichung in dem eindimensionalen Gebiet $\Omega =]-1,1[$. Insbesondere leiten wir uns hinsichtlich unseres Hauptresultats zur Oberhalbstetigkeit des Attraktors unter finiter Elemente Diskretisierung Praxis bezogene Resultate her. Für die praktischen Berechnungen werden wir erneut einen Computer mit 2.4Ghz und 2GB RAM, das Betriebssystem LINUX UBUNTU, das Programm MATLAB (Version R2007b) sowie das MATLAB-Programmpaket GAIO (Version 2.2.5) verwenden. Für das Speichern transparenter Bilder ist eine Open-GL Unterstützung der Graphikkarte unter MATLAB erforderlich. Wir beginnen zunächst mit einigen Informationen und Einsatzgebieten des MATLAB-Pakets GAIO (Abs. 6.4.a), anschließend führen wir die GAIO-Programmdateien auf (Abs. 6.4.b) und analysieren die praktischen Ergebnisse (Abs. 6.4.c-6.4.j). Dabei überprüfen wir, wie der Algorithmus unseren FE-Attraktor berechnet (Abs. 6.4.c), wie sich eine Veränderung des Bifurkationsparameters λ auf die Gestalt des FE-Attraktors auswirkt (Abs. 6.4.d), wie die stationären Lösungen (Abs. 6.4.e) und heteroklinen Orbits (Abs. 6.4.f) aussehen, wie fehlende Teile im Inneren des FE-Attraktors entstehen und was sie bedeuten (Abs. 6.4.g), wie die Oberhalbstetigkeit in der Praxis nachweisbar ist (Abs. 6.4.h), wie groß der Aufwand für die Berechnungen ist (Abs. 6.4.i) und wie die Konvergenz einer konkreten Anfangswertfunktion vonstatten geht (Abs. 6.4.j).

6.4.a. Das MATLAB-Paket GAIO

GAIO (Global Analysis of Invariant Objects) wurde von Michael Dellnitz und Oliver Junge an der Universität Paderborn (1995-1999) speziell für die numerische Analyse dynamischer Systeme konzeptioniert und ermöglicht die Approximation invarianter Maße und relativer globaler Attraktoren. Wir beschränken uns auf die Approximation des relativen globalen Attraktors. Eine ausführliche und beispielbehaftete Einführung findet sich in [22].
Um in kurzer Form einen Einblick in die Arbeitsweise von GAIO und deren für die Berechnung invarianter Mengen verwendeten Unterteilungsalgorithmus (Subdivisionsalgorithmus, rga-Algorithmus) zu erhalten, mögen wir uns das nichtlineare Gleichungssystem (6.3) der Finite-Elemente- und explizite-Euler-diskretisierten eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung aus Abschnitt 6.1.h vorstellen. Der Algorithmus zur Approximation des FE-Attraktors lautet wie folgt:

Eingabe : Modell,
Dimension des FE-Raums N_h,
Bifurkationsparameter λ,
zeitliche Diskretisierungsschrittweite $\triangle t$,
Integrationszeit,
Startbox mit Mittelpunkt c und Radius r,
Anzahl und Art der Testpunkte,
durchzuführende Iterationen $iter$

Berechnung : Unterteilungsalgorithmus (Subdivisionsalgorithmus, rga-Algorithmus)

```
for i = 1 to iter do
    Bisektion aller Boxen im Baum der Tiefe i − 1 in eine Koordinatenrichtung;
    Speichere diese erzeugte Boxenkollektion von m Boxen im Baum der Tiefe i;
    for j = 1 to m do
        n Testpunkte in j-ter Box festlegen;
        for k = 1 to n do
            Werte k-ten Testpunkt durch Lösen eines nichtlinearen Gleichungssystems aus;
            Markiere Box im Baum der Tiefe i, die die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems enthält;
        end
    end
    Lösche Boxen im Baum der Tiefe i, die keinen Bildpunkt enthalten haben;
end
```

Ausgabe : Boxenkollektion des Baumes der Tiefe $iter$

Algorithmus 1 : Unterteilungsalgorithmus (Subdivisionsalgorithmus, rga-Algorithmus)

- **Eingabe:** Der Algorithmus benötigt zur Berechnung des FE-Attraktors vorab einige Parameterwerte. Als erstes müssen wir das Modell festlegen, dessen Attraktor wir berechnen wollen. In unserem Fall ist dieses Modell durch das nichtlineare Gleichungssystem (6.3) der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung gegeben. Ebenso müssen wir die Dimension N_h des FE-Raums $\mathcal{V}_h$ sowie einen beliebigen, aber festen Wert für den Bifurkationsparamter λ angegeben. Zum Lösen der vollständig diskretisierten nichtlineare Gleichung (6.3) wird zudem eine zeitliche Diskretisierungsschrittweite $\triangle t$ benötigt. Als nächstes müssen wir noch die Integrationszeit sowie die Startbox festsetzen. Die Startbox wird dabei durch einen N_h-dimensionalen Mittelpunkt c und einen N_h-dimensionalen Vektor r definiert, der die Radien in die einzelnen Koordinatenrichtungen enthält. Diese Startbox wird als Wurzel eines Binärbaums gespeichert. Man beachte, dass die Startbox hinreichend groß gewählt werden sollte, so dass der gesamte FE-Attraktor in ihr enthalten ist. Als nächstes werden für die Berechnungen die Anzahl sowie die Art von Testpunkten benötigt. Hinsichtlich der Testpunkte sei vermerkt, dass wir ausschließlich Testpunkte auf den Kanten (Edges) verwenden. Zuletzt sollten wir noch die Anzahl an Iterationen angeben, die der Algorithmus durchführen soll.

- **Berechnung:** Beim ersten Durchlauf des Unterteilungsalgorithmus wird unsere N_h-dimensionale Startbox im ersten Schritt zunächst bezüglich der ersten Koordinatenrichtung in zwei gleichgroße Boxen zerlegt (Bisektion), die anschließend im zweiten Schritt als Kindknoten der unterteilten Box im Binärbaum gespeichert werden. Im dritten Schritt wählt GAIO für jede dieser Boxen die aus der Eingabe resultierende Anzahl und Art von Testpunkten. Jeder dieser N_h-dimensionalen Testpunkte wird im vierten Schritt an das Modell übergeben, dass daraufhin das N_h-dimensionale nichtlineare Gleichungssystem (6.3) löst. GAIO markiert anschließend im fünften Schritt diejenige Box, die den N_h-dimensionalen Lösungsvektor enthält. Dieses Verfahren führt GAIO für jeden Testpunkt und für jede Box durch. Danach entfernt GAIO im sechsten Schritt alle Boxen des Binärbaumes der Tiefe 1, die nicht markiert wurden und somit keinen Lösungsvektor beinhalten. Damit endet der erste Iterationsschritt. Der zweite Iterationsschritt beginnt daraufhin mit der Boxenkollektion, die wir aus dem ersten Iterationsschritt erhalten haben. Hinsichtlich der Unterteilungen sei zu erwähnen, dass GAIO der Reihe nach bezüglich jeder Koordinatenrichtung unterteilt und in der $N_h + 1$-ten Iteration erneut mit der Unterteilung bezüglich der ersten Koordinatenrichtung beginnt.

- **Ausgabe:** Die aus dem Unterteilungsalgorithmus resultierende Boxenkollektion bildet unseren N_h-dimensionalen finite Elemente Attraktor nach *iter* Iterationen.

Es sei vermerkt, dass wir den Begriff Verfeinerung im folgenden in zwei unterschiedlichen Zusammenhängen verwenden werden. Zum einen werden wir über Verfeinerungen von FE-Räumen sprechen, wie wir es bereits in Abschnitt 6.1 getan haben, und zum anderen werden wir über FE-Attraktoren nach einer gewissen Anzahl an Verfeinerungen sprechen. Dabei ist mit einem FE-Attraktor nach der n-ten Verfeinerung derjenige FE-Attraktor gemeint, den wir aus GAIO erhalten, wenn insgesamt $n \cdot N_h$ Iterationen durchgeführt wurden.
Damit schließen wir die Erklärung zur Arbeitsweise von GAIO und wenden uns den Programmdateien zu. Näheres zur Arbeitsweise des Subdivisionsalgorithmus lässt sich in [22] nachlesen.

6.4.b. Chafee-Infante-Gleichung mit dem Programmpaket GAIO

Wir werden zunächst die in $C\backslash C{+}{+}$ programmierte Modelldatei `chafee-infante-1D-FEM-EEM-MAP.c` aufführen, die die vollständige Diskretisierung nach Abschnitt 6.1 realisiert. Für tiefergehendere Kenntnisse zum Aufbau der Datei sei auf die Quelle [22] und speziell für die $C\backslash C++$-Programmierung auf die Quelle [8] verwiesen.

```c
/* Copyright (c) 2009 Denny Otten */
/* One-Dimensional Chafee-Infante-Equation with Finite-Element-Method and Explicit-Euler-Method */

#include <math.h>

char *typ = "map";
char *name = "The 1D-Chafee-Infante MAP";
int    paramDim = 3;
char *paramNames[] = { "lambda", "dim", "deltat" };
int dim = 3;
double lambda = 7.0, deltat = 0.01;
double c[3] = {0,0,0};
double r[3] = {2,2,2};
double tFinal = 1.0;

void rhs(double *x, double *u, double *y) {
    double deltax = 2.0 / ((double) dim+1);
    int i,j;

    double B[dim][dim];
    for (i=0; i<dim; i++)
    {
        for (j=0; j<dim; j++)
            B[i][j] = 0.0;
    }
    for (i=0; i<dim; i++)
    {
        B[i][i] = 4.0;
        if (i+1<dim)
            B[i][i+1] = 1.0;
        if (i-1>=0)
            B[i][i-1] = 1.0;
    }

    double A[dim][dim];
    for (i=0; i<dim; i++)
    {
        for (j=0; j<dim; j++)
            A[i][j] = 0.0;
    }
    for (i=0; i<dim; i++)
    {
        A[i][i] = 2.0;
        if (i+1<dim)
            A[i][i+1] = -1.0;
        if (i-1>=0)
```

```
            A[i][i-1] = -1.0;
    }

    double xtemp[dim+2];
    xtemp[0] = 0.0;
    xtemp[dim+1] = 0.0;
    for (i=1; i<dim+1; i++)
    {
        xtemp[i] = x[i-1];
    }
    double G[dim];
    for (i=1; i<dim+1; i++)
    {
        G[i-1] = xtemp[i-1]/6.0 + xtemp[i]*2.0/3.0 + xtemp[i+1]/6.0
                - xtemp[i-1]*xtemp[i-1]*xtemp[i-1]/20.0 - xtemp[i]*xtemp[i]*xtemp[i]*2.0/5.0
                - xtemp[i+1]*xtemp[i+1]*xtemp[i+1]/20.0 - xtemp[i-1]*xtemp[i-1]*xtemp[i]/10.0
                - xtemp[i-1]*xtemp[i]*xtemp[i]*3.0/20.0 - xtemp[i]*xtemp[i]*xtemp[i+1]*3.0/20.0
                - xtemp[i]*xtemp[i+1]*xtemp[i+1]/10.0;
    }

    double temp[dim];
    for (i=0; i<dim; i++)
    {
        temp[i] = 0.0;
        for (j=0; j<dim; j++)
        {
            temp[i] = temp[i] + A[i][j]*x[j];
        }
    }

    double b[dim];
    for (i=0; i<dim; i++)
    {
        b[i] = 6.0*(lambda*G[i] - temp[i]/(deltax*deltax));
    }

    for (i=1; i<dim; i++)
    {
        B[i][i-1] = B[i][i-1]/B[i-1][i-1];
        B[i][i]   = B[i][i] - B[i][i-1]*B[i-1][i];
        b[i]      = b[i] - B[i][i-1]*b[i-1];
    }

    y[dim-1] = b[dim-1]/B[dim-1][dim-1];
    for (i=dim-2; i>=0; i--)
    {
        y[i] = (b[i] - B[i][i+1]*y[i+1])/B[i][i];
    }

    for (i=0; i<dim; i++)
    {
        y[i] = x[i] + deltat*y[i];
    }
}
```

Für das Kompilieren dieser Modelldatei verweisen wir auf die Quelle [22]. Um dieses Modell nach dem Kompilierungsvorgang unter GAIO auszuführen, starten wir zunächst MATLAB. Die Ausführung dieser Datei erfordert einige Vorbereitungen. Dazu erstellen wir der Einfachheit halber ein neues m-File unter MATLAB, dem wir den Namen `chafee1DFEMEEM.m` geben und im GAIO Hauptverzeichnis speichern. Auch an dieser Stelle wird für tiefergehendere Kenntnisse auf die Quelle [22] verwiesen.

```
% GAIO example
% computes the relative global attractor for the one-dimensional chafee-infante map

chafee = Model('chafee-infante-1D-FEM-EEM-MAP');
chafee.dim = 3;
chafee.lambda = 7.0;
chafee.deltat = 0.01;
map = Integrator('Map');
map.model = chafee;
map.tFinal = 1.0;

tree = Tree(chafee.dim,zeros(1,chafee.dim),1.5*ones(1,chafee.dim));
tree.integrator = map;
tree.domain_points = Points('Edges', chafee.dim, 50);
tree.image_points = Points('Center', chafee.dim, 1);

rga(tree,3);
plotb(tree,'r',[1 2 3]);
```

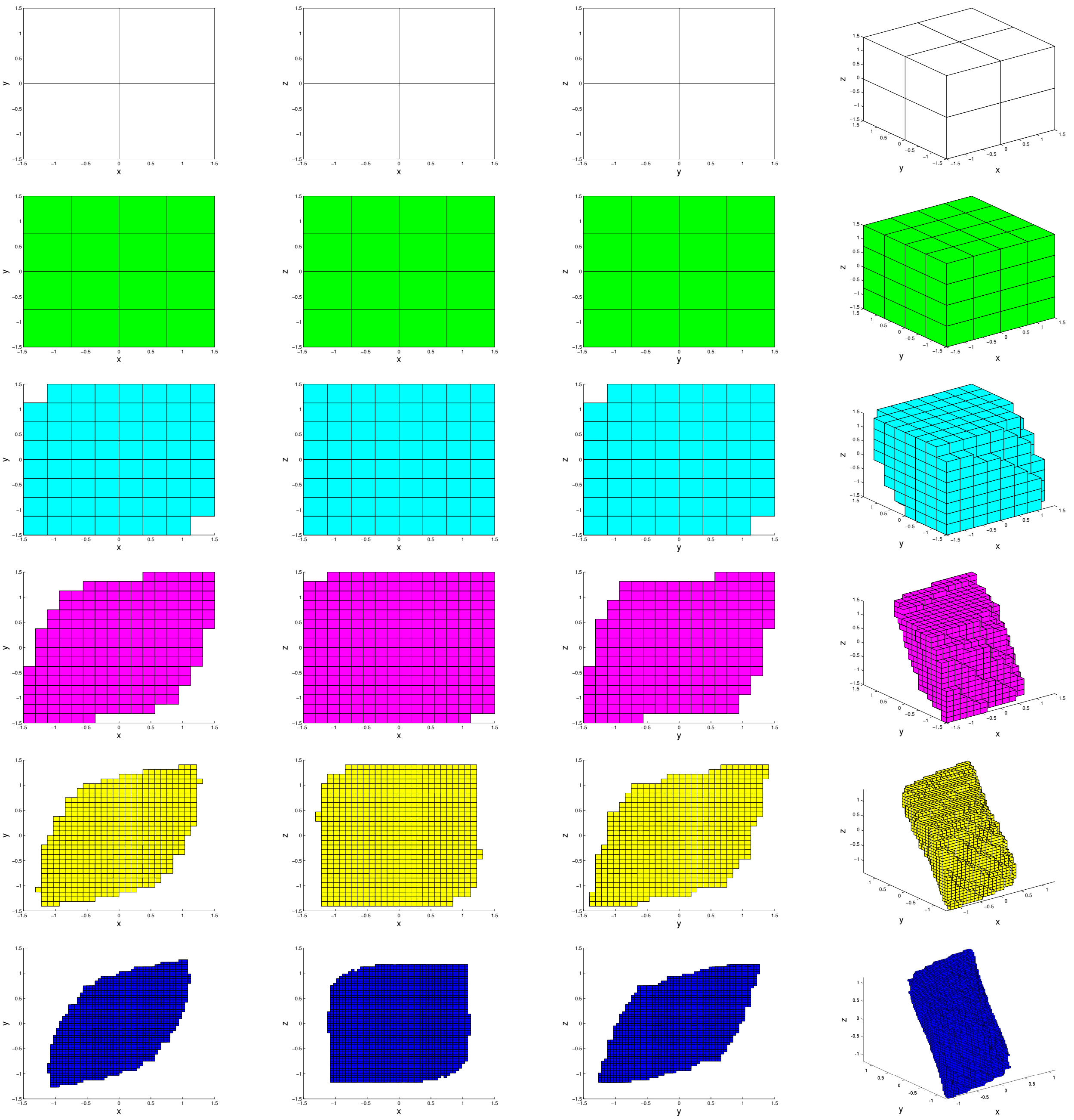
6.4.c. Iterationen vom rga-Algorithmus

In diesem ersten Abschnitt wollen wir zunächst den Verlauf eines Verfeinerungsschrittes des rga-Algorithmus am Beispiel des $N_h = 3$-dimensionalen Systems (6.3) der eindimensionalen Chafee-

Infante-Gleichung zu den Parametern $\lambda = 7$ und $k = \triangle t = 0.01$ illustrieren. Dazu sehen wir uns exemplarisch den FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ des 3-dimensionalen FE-Raums $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ nach den ersten 9 Verfeinerungen an, wobei rückblickend eine Verfeinerung exakt 3 Iterationen des rga-Algorithmus entspricht. Weiter werden wir die resultierenden FE-Attraktoren im folgenden in unterschiedlichen Farben darstellen. Konkret ändern wir dazu die Datei `chafee1DFEMEEM.m` in den Zeilen 17 und 18 wie folgt

```
rga(tree,3);               % rga(tree,6);, rga(tree,9);, rga(tree,12);, rga(tree,15);,
                           % rga(tree,18);, rga(tree,21);, rga(tree,24);, rga(tree,27);,
plotb(tree,'b',[1 2 3]);   % plotb(tree,'b',[1 2]);, plotb(tree,'b',[1 3]);, plotb(tree,'b',[2 3]);
                           % Farben: b=blau, w=weiß, g=grün, c=cyan, m=magenta, y=gelb, r=rot, k=schwarz
```

Hierbei enthält die erste Zeile die zur Untersuchung anstehenden Iterationen, die wir der Reihe nach ausführen werden, und die dritte Zeile, in der der Plot erzeugt wird, die graphischen Darstellungsoptionen des FE-Attraktors, die wir für jede Verfeinerung allesamt ausführen werden. Es folgen die FE-Attraktoren des 3-dimensionalen Finite-Elemente-Raums $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ nach den ersten 9 Verfeinerungen. In Bezug auf (6.3) entspricht $\alpha_1 = x$ der ersten, $\alpha_2 = y$ der zweiten und $\alpha_3 = z$ der dritten Koordinate.



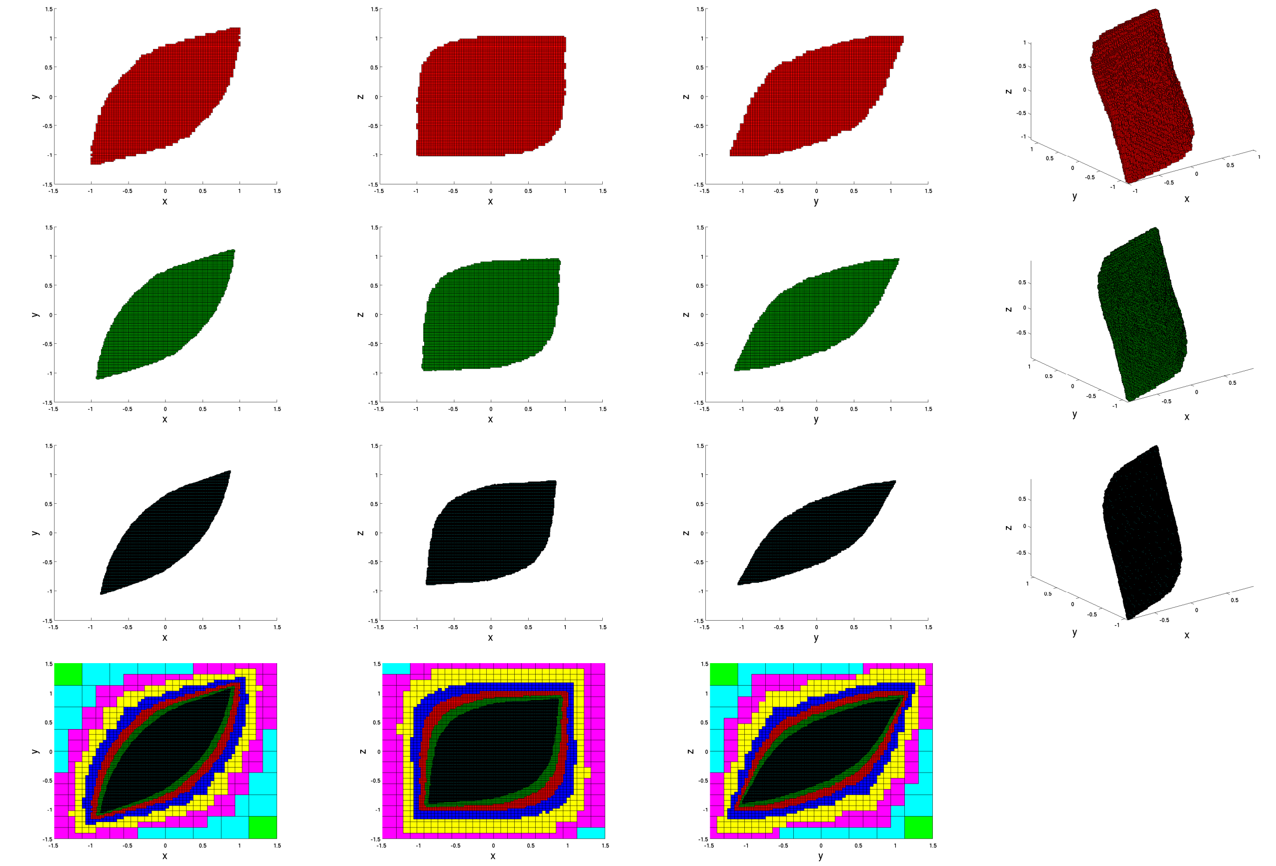


Abbildung 6.8.: Verfeinerungen des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ für die Chafee-Infante-Gleichung

Abbildung 6.8 enthält die xy-, xz-, yz- und xyz-Perspektiven (von links nach rechts) des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung im 3-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ für den Bifurkationsparameter $\lambda = 7$ und die zeitliche Schrittweite $k = \triangle t = 0.01$. Von oben nach unten betrachtet sind die FE-Attraktoren $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ nach 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 und 27 Iterationen des Unterteilungsalgorithmus aufgeführt. An den Bildern wird ersichtlich, wie der FE-Attraktor mit fortlaufenden Iterationen seine Gestalt annimmt. Der Abbildung 6.8 sind bereits die zwei stabilen Fixpunkte $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},1}$ in den Spitzen zu entnehmen (Tab. 6.2 für $\lambda = 7$). Der instabile Fixpunkt $\Phi_{\frac{1}{2},0}$ liegt im Inneren dieses FE-Attraktors. Zudem ist deutlich erkennbar, dass wir mit unserer 3-dimensionalen Startbox mit Radius 2 um den Ursprung herum, tatsächlich den gesamten FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ einfangen. Diese Startbox ist erfahrungsgemäß speziell für dieses Beispiel ausreichend. Wir hätten an dieser Stelle auch einen wesentlich größeren Radius der Startbox verwenden können, und zwar denjenigen, den uns die absorbierende Menge in Korollar 5.10 für die Chafee-Infante-Gleichung mit den Werten aus dem Beispiel in Abschnitt 5.1 speziell für $\lambda = 7$ liefert. Die letzten drei Illustrationen in Abbildung 6.8 enthalten die übereinander geplotteten 2-dimensionalen Perspektiven der FE-Attraktoren. Sie verdeutlichen noch einmal, welcher Bereich bei welchem Iterationsschritt an Größe verliert und damit schnell konvergiert. Nachdem wir jetzt wissen, wie der Unterteilungsalgorithmus arbeitet, wollen wir als nächstes den FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ in Abhängigkeit vom Bifurkationsparameter λ analysieren.

6.4.d. Bifurkationsparameter

Die in Abschnitt 6.3 durchgeführte Bifurkationsanalyse der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung für den 3-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ ermöglicht uns in diesem Abschnitt eine gezielte Untersuchung des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ bei einer Änderung des Bifurkationsparameters λ. Dazu verwenden wir für den Bifurkationsparameter λ die in Tabelle 6.2 aufgeführten Werte und ändern die Datei `chafee1DFEMEEM.m` daher in den Zeilen 6, 17 und 18 dementsprechend durch

```
chafee.lambda = 1.0         % 2.5967, 7.0, 12.0, 22.0, 31.6891, 45.0
(...)
rga(tree,21);               % rga(tree,6);, rga(tree,9);, rga(tree,12);, rga(tree,15);,
                            % rga(tree,18);, rga(tree,21);, rga(tree,24);, rga(tree,27);,
plotb(tree,'b',[1 2 3]);   % plotb(tree,'b',[1 2]);, plotb(tree,'b',[1 3]);, plotb(tree,'b',[2 3]);
                            % Farben: b=blau, w=weiß, g=grün, c=cyan, m=magenta, y=gelb, r=rot, k=schwarz
```

Es folgen die FE-Attraktoren $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ zu den unterschiedlichen Werten des Bifurkationsparamters λ.

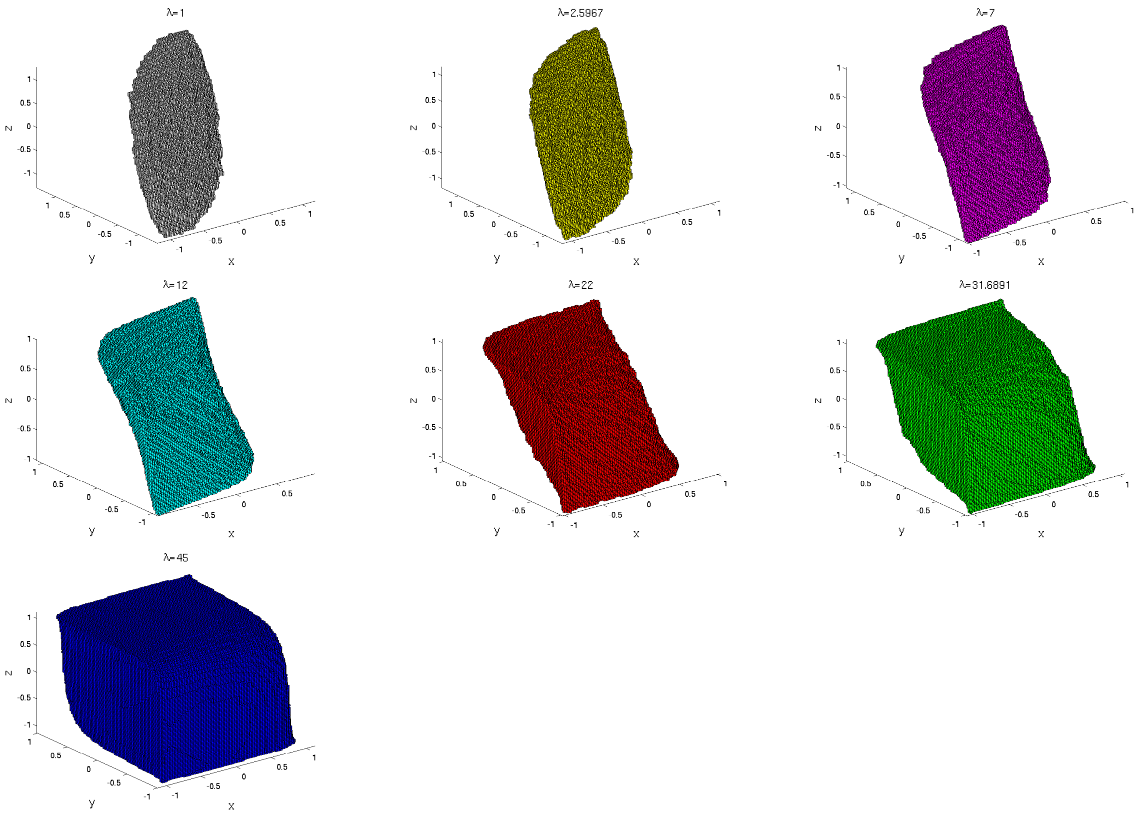


Abbildung 6.9.: FE-Attraktoren $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ in Abhängigkeit des Bifurkationsparameters λ

Die Abbildung 6.9 enthält die FE-Attraktoren $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung bei 3-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ für die Bifurkationsparameter $\lambda = 1$, 2.5967, 7, 12, 22, 31.6891 und 45 nach der 7. Verfeinerung des Attraktors. Die x-, y- bzw. z-Koordinate bezeichnet auch an dieser Stelle den Koeffizienten der 1., 2. bzw. 3. Basisfunktionen in $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$. Wir haben bereits in Abbildung 6.5 gesehen, dass die Dimension des kontinuierlichen Attraktors vom Bifurkationsparameter λ abhängt. Genauer besitzt der Attraktor $\mathcal{A}$ die Hausdorff-Dimension n, falls $\left(\frac{n}{2}\right)^2\pi^2 < \lambda \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^2\pi^2$ für $n \in \mathbb{N}_0$ (Abb. 6.5). Dieses Dimensionswachstum spiegelt sich bei der FE-Diskretisierung in der Anzahl der Boxen (Tab. 6.3) und damit im Volumen der FE-Attraktoren $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ in Abbildung 6.9 wider, insofern wir λ entsprechend der Werte in Tabelle 6.1 wählen. Für $\lambda = 1$ und $\lambda = 2.5967$ besitzt der FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ die Dimension 0, da wir in diesen Fällen nur den Fixpunkt $\Phi_{\frac{1}{2},0} = (0,0,0)$ vorliegen haben (Tab. 6.2). Für $\lambda = 7$ und $\lambda = 12$ kommen zwei neue Fixpunkte $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},1}$ zum Vorschein (Tab. 6.2), so dass sich die Dimension des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ auf 1 erhöht. Speziell für $\lambda = 7$ verdeutlichen dies die weiteren Iterationen in Abbildung 6.8. Für $\lambda = 22$ und $\lambda = 31.6891$ erhalten wir erneut zwei neue Fixpunkte $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},2}$ (Tab. 6.2), so dass der FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ in diesen Abbildungen die Dimension

2 besitzt. Für $\lambda = 45$ entfalten sich die zwei weitere Fixpunkte $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},3}$ (Tab. 6.2) und die Dimension des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ wächst auf 3 an. Es ist an den Formen zu erahnen, dass die augenscheinlich 3-dimensional wirkenden FE-Attraktoren in Abbildung 6.9, die in Tabelle 6.2 aufgeführten Dimensionen besitzen. Um diesen Aspekt einzusehen, werden wir in Abschnitt 6.4.f die heteroklinen Orbits des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ genauer untersuchen. In Abbildung 6.10 ist nochmals der Zusammenhang zwischen dem Kontrollparameter $\lambda > 0$ und dem Wachstum des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ im 3-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ graphisch veranschaulicht.

λ	**1**	**2.5967**	**7**	**12**	**22**	**31.6891**	**45**
Boxen	96530	92478	102710	139556	272602	438316	615006
Farbe	weiß	gelb	magenta	cyan	rot	grün	blau

Tabelle 6.3.: Anzahl der Boxen des 3-dimensionalen FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ in Abhängigkeit des Bifurkationsparameters λ nach 21 Iterationen des rga-Algorithmus

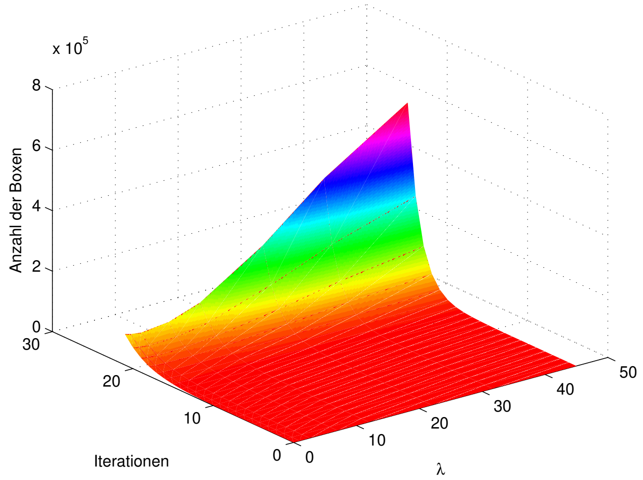


Abbildung 6.10.: Anzahl der Boxen des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ in Abhängigkeit des Bifurkationsparameters λ und der Iterationen des rga-Algorithmus

Da sich die Lage und Anzahl der Fixpunkte $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},i}$ gemeinsam mit dem Bifurkationsparameter λ verändern und dies Auswirkungen auf die Gestalt des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ mit sich bringt, betrachten wir in Abbildung 6.11 die zugehörigen zweidimensionalen Bewegungsverläufe der Fixpunkte $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},i}$ für wachsenden Bifurkationsparameter λ, d.h. die xy-, xz- und yz-Perspektive der FE-Attraktoren $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ aus Abbildung 6.9.

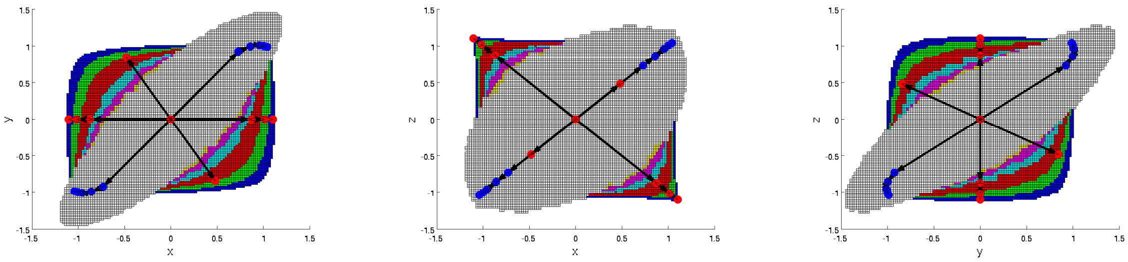


Abbildung 6.11.: Zweidimensionaler Bewegungsverlauf der Fixpunkte des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ im FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$

In Abbildung 6.11 wurden die FE-Attroktoren $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ des 3-dimensionalen FE-Raums $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ nach der 7. Verfeinerung aus Abbildung 6.9 in den drei oben genannten Perspektiven übereinander geplottet. Anschließend wurden die Fixpunkte $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},i}$ aus der Tabelle 6.2 eingezeichnet. Hierbei kennzeichnen die blauen Punkte die stabilen und die roten Punkte die instabilen Fixpunkte der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung mit 3-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$. Die schwarzen Pfeile stellen den Bewegungsverlauf der verschiedenen Fixpunkte $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},i}$ für wachsenden Bifurkationsparameter λ dar. Dabei entspricht der mittlere rote Punkt in der Abbildung 6.11 dem Fixpunkt $\Phi_{\frac{1}{2},0}$. Aus diesem speziellen Fixpunkt, der für wachsenden Bifurkationsparameter seine Position stets beibehält, entstehen nach Abbildung 6.7 alle weiteren Fixpunkte (Heugabel-Verzweigung, Pitchfork-Birfurkation). Die blauen Punkte in Abbildung 6.11 stellen die einzigen stabilen Fixpunkte $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},1}$ dar, die zudem asymptotisch stabil sind. Bei ihrem Auftreten wechselt der Stabilitätszustand des Fixpunktes $\Phi_{\frac{1}{2},0}$ von einem asymptotisch stabilen in einen instabilen Zustand. Die Fixpunkte $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},2}$, die im ersten Diagramm parallel zur x-Achse, im zweiten Diagramm diagonal und im dritten Diagramm parallel zur y-Achse liegen, treten nach den stabilen Fixpunkten $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},1}$ aus dem instabilen Fixpunkt $\Phi_{\frac{1}{2},0}$ empor. Sie sind gemeinsam mit allen folgenden Fixpunkten instabil. Zuletzt treten im 3-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ die instabilen Fixpunkte $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},3}$ aus dem instabilen Ursprung $\Phi_{\frac{1}{2},0}$ heraus. Sie liegen im ersten Diagramm diagonal, im zweiten Diagramm etwa auf der Laufbahn der stabilen Fixpunkte und im dritten Diagramm diagonal.

6.4.e. Fixpunkte und stationäre Lösungen

Als nächstes wollen wir untersuchen, welche stationären Lösungen uns die Fixpunkte $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},i} \in \mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ im 3-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ liefern. Dazu benötigen wir erstmals die Hutfunktionen Λ_j aus Abschnitt 6.1.b. Eine entsprechende Datei für die Hutfunktionen `hut.m` ist im Anhang A.8.b beigefügt und sollte für den folgenden Teil im GAIO-Hauptverzeichnis gespeichert werden. Die Darstellung der stationären Lösungen für die in Tabelle 6.2 aufgeführten Werte des Bifurkationsparameters λ erfordert speziell für $\lambda = 45$ die folgende Eingabe

```
>> y = [0 0 0; 1.0411 0.9863 1.0411; -1.0411 -0.9863 -1.0411; 1.1055 0.0 -1.1055; -1.1055 0.0 1.1055;
        0.4828 -0.8466 0.4828; -0.4828 0.8466 -0.4828];
   for i=1:7
       f = @(x) y(i,1)*hut(x,3,1)+y(i,2)*hut(x,3,2)+y(i,3)*hut(x,3,3);
       if (i==1)
           fplot(f,[-1 1],'r');
       end
       if (i==2)
           fplot(f,[-1 1],'b');
       end
       if (i==3)
           fplot(f,[-1 1],'--b');
       end
       if (i==4)
           fplot(f,[-1 1],'g');
       end
       if (i==5)
           fplot(f,[-1 1],'--g');
       end
       if (i==6)
           fplot(f,[-1 1],'m');
       end
       if (i==7)
           fplot(f,[-1 1],'--m');
       end
       hold on;
   end
   hold off;
   xlabel('x');
   ylabel('u_h(x)');
   legend('\Phi_{1/2,0}','\Phi_{1/2,1}^+','\Phi_{1/2,1}^-','\Phi_{1/2,2}^+','\Phi_{1/2,2}^-',
          '\Phi_{1/2,3}^+','\Phi_{1/2,3}^-',-1);
   title('\lambda=45');
```

im MATLAB `Command Window`. Für die übrigen Werte des Bifurkationsparameters λ aus Tabelle 6.2 erfolgt die Darstellung analog. Es folgen die stationären Lösungen $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},i}$ der FE-diskretisierten Chafee-Infante-Gleichung im Gebiet $\Omega =]-1,1[$ und im FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$.

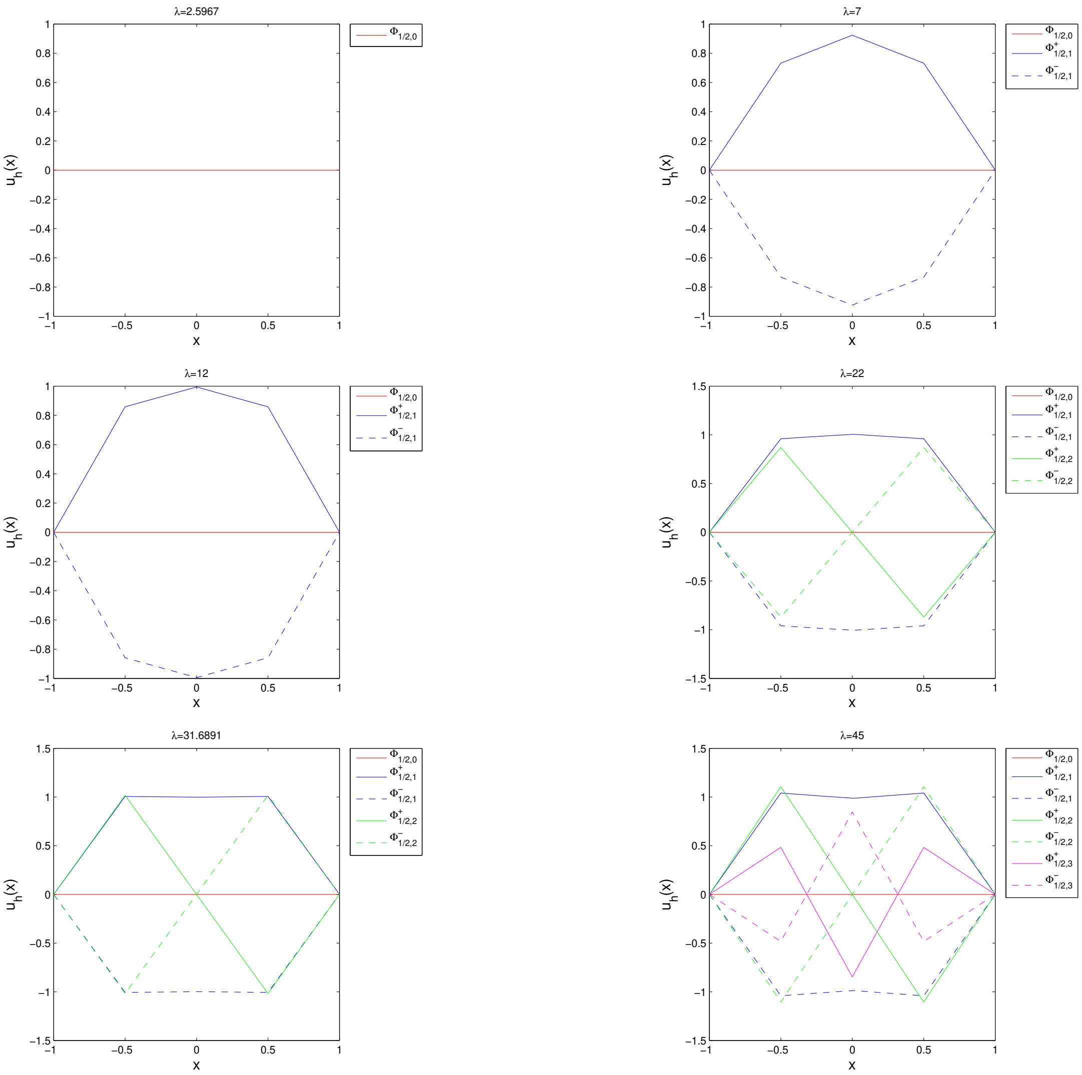


Abbildung 6.12.: Stationäre Lösungen der FE-diskretisierten Chafee-Infante-Gleichung im 3-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$

Die Diagramme in Abbildung 6.12 enthalten die stationären Lösungen $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},i}$ der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung im 3-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ für die in Tabelle 6.2 aufgeführten Werte des Bifurkationsparameters λ. Diese stationären Lösungen $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},i}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ stellen eine Approximation der stationären Lösungen $\Phi^{\pm}_{i}$ $(i \in \mathbb{N}_0)$ des kontinuierlichen Problems für $i = 0, 1, 2, 3$ dar (Abb. 6.6). Bezüglich der Abbildung 6.12 wissen wir aufgrund der Bifurkationsanalyse (Abb. 6.7), dass alle stationären Lösungen $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},i}$ $(i = 1, 2, 3)$ aus der konstanten Nulllösung $\Phi_{\frac{1}{2},0}$ hervorgehen (Heugabel-Verzweigung, Pitchfork-Bifurkation).

6.4.f. Struktur des FE-Attraktors

In diesem Abschnitt wollen wir die Struktur des FE-Attraktors genauer analysieren. Dabei wollen wir zusätzlich zu den bisherigen Berechnungen des FE-Attraktors eine Approximation der Fixpunkte ermitteln. Erfreulicherweise werden uns die folgenden Berechnungen zudem Bereiche liefern, in dessen Nähe sich ein Großteil der Trajektorien aufhält, und Aussagen zu der Geschwindigkeit einzelner Trajektorien zukommen lassen. Anlass zu dieser Untersuchung liefern uns die Strukturen des kontinuierlichen und des FE-Attraktors der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung. Denn nach Satz 6.2 (bzw. Satz

6.6) ist die Menge der Gleichgewichtspunkte $\mathbb{G} = \{\Phi_0, \Phi_1^{\pm}, \ldots, \Phi_n^{\pm}\}$ (bzw. $\mathbb{G}_h = \{\Phi_{h,0}, \Phi_{h,1}^{\pm}, \ldots, \Phi_{h,n}^{\pm}\}$) für einen festen Bifurkationsparamter $\left(\frac{n}{2}\right)^2 \pi^2 < \lambda \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \pi^2$ ($n \in \mathbb{N}_0$) (bzw. $\lambda_{h,n} < \lambda \leqslant \lambda_{h,n+1}$ ($n = 0, 1, \ldots, N_h$), wobei $\lambda_{h,0} := 0$ und $\lambda_{h,N_h+1} := \infty$) endlich und diskret. Damit lassen sich die Attraktoren nach Korollar 5.14 durch die instabile Mannigfaltigkeit ihrer Gleichgewichtspunkte darstellen, d.h.

$$\mathcal{A} = \bigcup_{\Phi \in \mathbb{G}} W^u(\Phi) \quad \text{und} \quad \mathcal{A}_h = \bigcup_{\Phi_h \in \mathbb{G}_h} W^u(\Phi_h) \quad \forall\, 0 < h \leqslant h_0$$

und erfassen daher ausschließlich alle heteroklinen Orbits des jeweiligen Systems. Aus diesem Grunde werden wir in diesem Abschnitt sowohl die heteroklinen Orbits der FE-diskretisierten Chafee-Infante-Gleichung im 3-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ als auch die Fixpunkte des zugehörigen FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ nachhaltig untersuchen. Man beachte, dass die exakten Fixpunkte $\Phi_{\frac{1}{2},i}^{\pm}$ ($i = 1, 2, 3$) der FE-diskretisierten Gleichung bisweilen nur aus der FE-Bifurkationsanalyse mittels MATCONT aus Abschnitt 6.3.c hervorgehen. In diesem Abschnitt werden wir zumindest die stabilen Fixpunkte $\Phi_{\frac{1}{2},1}^{\pm}$ auch mittels GAIO bestimmen. Um die Idee zu den Berechnungen der heteroklinen Orbits sowie der Fixpunkte des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ etwas zu motivieren, wird jede Box zunächst mit einem Zähler versehen. Wenn bei einem Iterationsschritt des rga-Algorithmus ein Testpunkt auf eine dieser Boxen abgebildet wird, so erhöht sich der Zähler derjenigen Box um eins. Damit sollten wir eine Darstellung der heteroklinen Orbits sowie eine etwaige Lage der Fixpunkte von $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ erhalten. Dieser Ansatz wurde in der MATLAB-Datei `HeteroclinicOrbits.m`, die im Anhang A.8.c bereitgestellt wurde, umgesetzt. Auf den Aufbau dieser Datei werden wir nicht weiter eingehen. Ein Ausführen der Datei liefert uns speziell für $N_h = 3$ eine Visualisierung des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$.

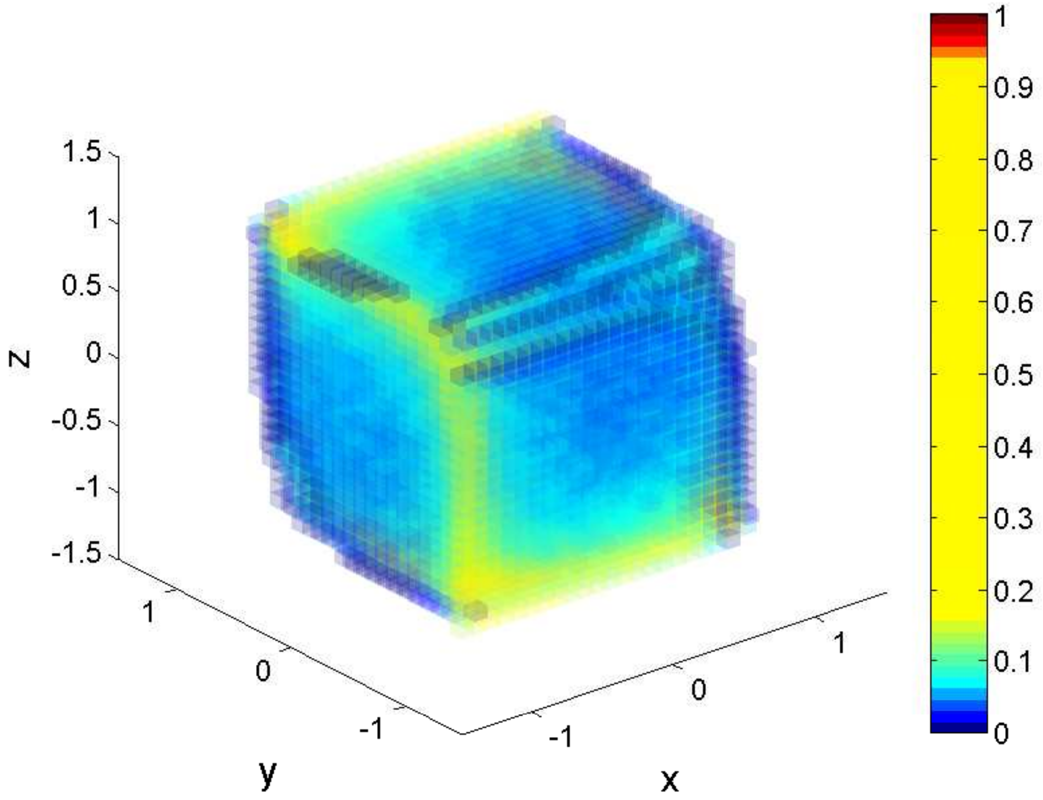


Abbildung 6.13.: Heterokline Orbits des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ im FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ für $\lambda = 45$ (Bild 1)

Abbildung 6.13 enthält den FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung im 3-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ für den Bifurkationsparameter $\lambda = 45$. Dabei tragen die selten getroffenen Boxen einen blauen, die häufig getroffenen Boxen einen roten und alle übrigen Boxen einen gelben Farbton. Die gelben Verbindungen in Abbildung 6.13 stellen heterokline Orbits im Inneren des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ dar, also Verbindungsstrecken zwischen zwei Fixpunkten. Dabei verrät uns der gelbe Farbton in Abbildung 6.13, dass sich dort zum einen viele Trajektorien (heterokline Orbits) aufhalten und zum anderen, dass sich die Trajektorien dort relativ langsam bewegen. Der blaue Bereich in Abbildung 6.13 lässt hingegen darauf schließen, dass sich dort relativ wenig Trajektorien befinden und diese sich dort recht schnell fortbewegen. Bei einer genaueren Betrachtung der Abbildung 6.13 wird ersichtlich, dass die Boxen in der oberen und unteren mittleren Ecke, also bei $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},1}$ aus Tabelle 6.2, einen roten Farbton aufweisen. Dies ist ein Anzeichen dafür, dass sich dort wahrscheinlich Fixpunkte befinden, da GAIO nahezu alle Testpunkte dieser Boxen wieder auf die jeweilige Box abbildet. Tatsächlich stellen diese Boxen die stabilen Fixpunkte $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},1}$ dar. Ein Phänomen findet sich allerdings in der linken oberen und rechten unteren Ecke. Dort treten zwar jeweils zwei rote Boxen auf, dennoch befindet sich dort kein Fixpunkt. Betrachten wir den vollständig sichtbaren gelben Zweig in Abbildung 6.13, der $\Phi^{+}_{\frac{1}{2},1}$ mit $\Phi^{-}_{\frac{1}{2},1}$ verbindet, so befindet sich der instabile Fixpunkt $\Phi^{+}_{\frac{1}{2},2}$ im dunkel gefärbten Bereich, der oben links direkt neben dem gelben Zweig liegt, und $\Phi^{-}_{\frac{1}{2},2}$ (wegen der Symmetrie) auf der Rückseite (vgl. Abb. 6.5). Die angesprochene sichtbare gelbe Verbindung lässt sich als eine Approximation der instabilen Mannigfaltigkeit $W^u(\Phi^{+}_{\frac{1}{2},2})$ interpretieren. Die Position der instabilen Fixpunkte $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},3}$ kristallisiert sich aus Abbildung 6.13 leider nicht heraus. Der instabile Fixpunkt $\Phi_{\frac{1}{2},0} = 0$ liegt im Inneren des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ und ist in Abbildung 6.13 somit nicht weiter sichtbar.

Die gelben heteroklinen Orbits des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ in Abbildung 6.13 lassen sich auch anderweitig darstellen. Denn insofern wir in der Datei `chafee1DFEMEEM.m` den Wert `map.tFinal` groß genug wählen, gehen große Teile des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ verloren. Dabei reguliert `map.tFinal` die Integrationszeit bei der Berechnung des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$. Zur Realisierung dieses Vorhabens ändern wir die Datei `chafee1DFEMEEM.m` in den Zeilen 6, 10 und 17 wie folgt:

```
chafee.lambda = 45.0;
(...)
map.tFinal = 7;
(...)
rga(tree,30);
```

Dies liefert uns den folgenden FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$.

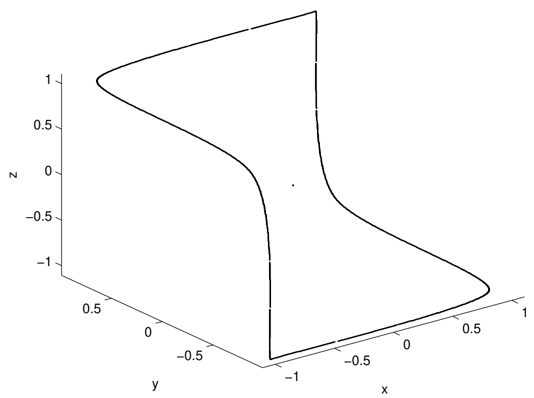


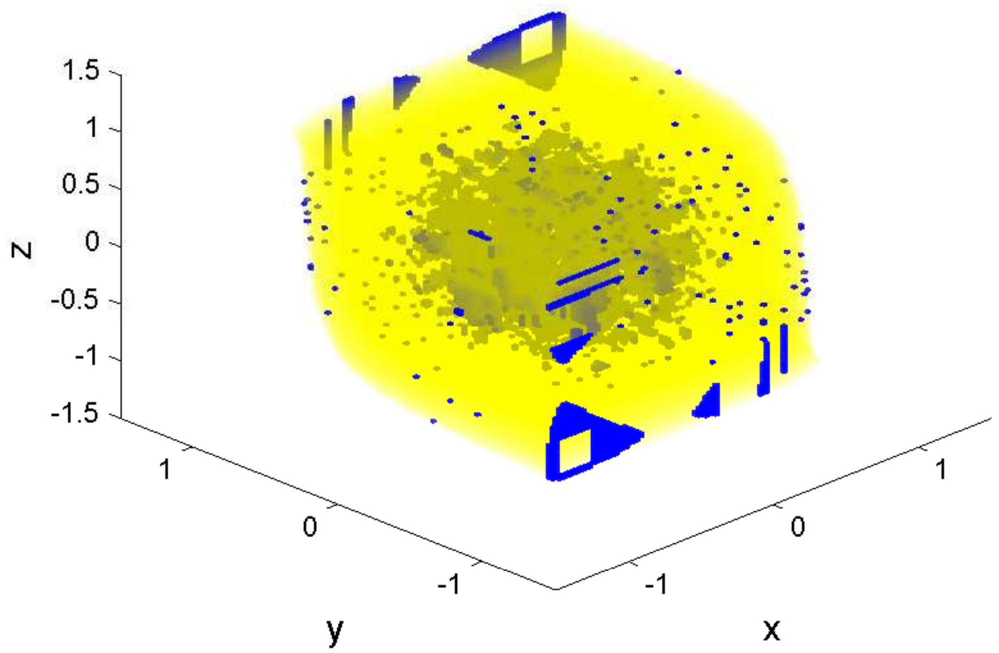
Abbildung 6.14.: Heterokline Orbits des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ im FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ für $\lambda = 45$ (Bild 2)

Abbildung 6.14 enthält den FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung im

3-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ für den Bifurkationsparameter $\lambda = 45$ nach 30 Iterationen. Der Zweig in Abbildung 6.14 beschreibt diejenigen heteroklinen Orbits des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$, die wir zuvor in Abbildung 6.13 durch den gelben Bereich hervorgehoben haben. Abbildung 6.14 liefert uns erneut vier heterokline Orbits, die von den instabilen Fixpunkten $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},2}$ jeweils zu den stabilen Fixpunkten $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},1}$ führen. Dabei sind die stabilen Fixpunkte $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},1}$ wegen der höheren Anzahl an Iterationen wesentlich deutlicher ausgeprägt als in Abbildung 6.13 und daran zu erkennen, dass die Verbindungsstrecken an diesen Punkten relativ spitz hineinlaufen. In der Nähe der instabilen Fixpunkte $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},2}$ sind die Verbindungen kurz vorher und kurz nachher verhältnismäßig abgerundet. Ein weiterer und diesmal erkennbarer instabiler Fixpunkt befindet sich im Ursprung in Abbildung 6.14. Dabei handelt es sich um den Fixpunkt $\Phi_{\frac{1}{2},0}$. Die instabilen Fixpunkte $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},3}$ lassen sich leider auch mit dieser Vorgehensweise nicht sichtbar approximieren. Desweiteren zeigt ein Vergleich zwischen den Abbildungen 6.13 und 6.14, dass in Abbildung 6.14 große Teile des Attraktors vollständig verloren gegangen sind. Insgesamt wird in Hinblick auf Abbildung 6.5 deutlich, dass einige Fixpunkte und Verbindungen schlichtweg schwierig darzustellen sind.

6.4.g. Fehlende Boxen im Inneren des Finite-Elemente-Attraktors

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, wie schnell sich die einzelnen Lösungen in Richtung eines stabilen Fixpunktes bewegen. Dazu untersuchen wir den FE-Attraktor auf Konvexität und überprüfen somit, ob er Löcher in seinem Inneren aufweist. Dabei interessieren wir uns insbesondere dafür an welchen Stellen die Boxen und wie viele der Boxen insbesondere im Inneren des FE-Attraktors fehlen. Dies sollte die folgenden Untersuchungen motivieren, deren Ansatz wir in der MATLAB-Datei `MissingBoxes.m`, die im Anhang A.8.d bereitgestellt wurde, umgesetzt haben. Diese Datei liefert uns die folgenden Ergebnisse.



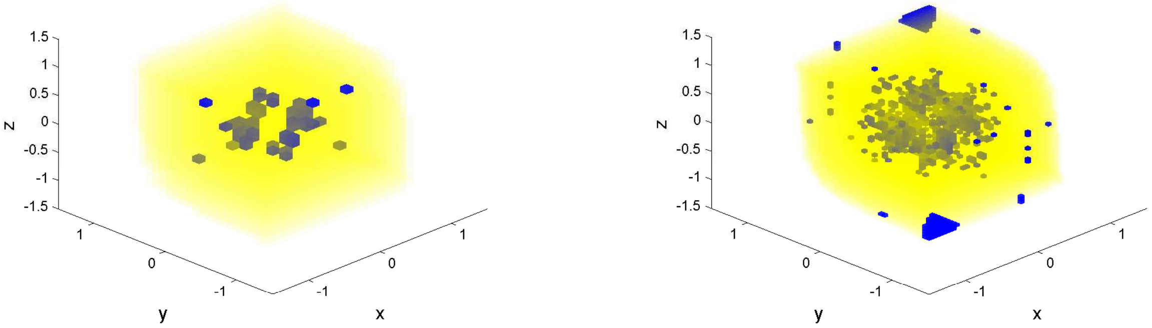


Abbildung 6.15.: Löcher im FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ nach 15 (unten links), 18 (unten rechts) und 21 Iterationen (oben)

Abbildung 6.15 enthält die FE-Attraktoren $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ in einer transparenten Darstellung. Dabei handelt es sich genauer um die FE-Attraktoren $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung im 3-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ nach der 15. Iteration (unten links), nach der 18. Iteration (unten rechts) bzw. nach der 21. Iteration (oben) für den Bifurkationsparameter $\lambda = 45$. Die gelben Boxen stellen den FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ und die blauen Boxen stellen die fehlenden Boxen dieses FE-Attraktors nach der jeweiligen Iteration dar. In der linken unteren Illustration in Abbildung 6.15 fehlen lediglich 156 Boxen, von denen der größte Teil in der Nähe des Ursprungs liegt. In der rechten unteren Darstellung in Abbildung 6.15 fehlen dem FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ bereits 3126 Boxen, von denen sich die meisten um den Ursprung herum im Inneren des FE-Attraktors versammlt haben. In der oberen Graphik in Abbildung 6.15 sind erheblich mehr fehlende Boxen zu erkennen, insgesamt fehlen dort 54208 Boxen. Zum einen fehlen einige äußere Boxen in der Umgebung der stabilen Fixpunkte, die daraufhin deuten, dass sich der FE-Attraktor mit zusätzlichen Iterationen weiterhin verkleinern wird. Zum anderen fehlen enorm viele Boxen im Inneren des FE-Attraktors um den Ursprung herum. Diese Masse an fehlenden Boxen deutet offensichtlich daraufhin, dass die Trajektorien dort eine hohe Geschwindigkeit aufweisen und sich somit sehr zügig in Richtung der stabilen Fixpunkte bewegen. Man beachte, dass die Anzahl der fehlenden Boxen von mehreren Faktoren abhängt. Ein Faktor ist beispielsweise die Wahl der Testpunkte. Würden wir beispielsweise anstelle der Testpunkte auf den Kanten jeder Box (Edges) zufällige Testpunkte (MonteCarlo) wählen, so würde dies die Resultate erheblich verbessern und es blieben zahlreiche fehlende Boxen aus. Damit hängen die Löcher im Inneren des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ stark von der Lage der betrachteten Testpunkte ab. Eine Erhöhung der Testpunktanzahl hat hierbei keinen weiteren Einfluss auf das Ausmaß der fehlenden Boxen. In Tabelle 6.4 stellen wir noch einmal einen Zusammenhang der fehlenden Boxen in Abhängigkeit vom Bifurkationsparameter λ und der Verfeinerungen des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ dar, wobei diese Daten nach wie vor auf Edges-Testpunkten basieren.

Verfeinerung\\λ	**1**	**2.5967**	**7**	**12**	**22**	**31.6891**	**45**
1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	2	0
5	0	0	2	2	2	0	156
6	2	6	0	4	6	82	3126
7	16	2	2	8	10	960	54208

Tabelle 6.4.: Fehlende Boxen im Finite-Elemente-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ mit Testpunkten auf dem Rand (Edges)

Der Tabelle 6.4 ist zu entnehmen, dass die fehlenden Boxen des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ mit wachsender Verfeinerung und wachsendem Bifurkationsparameter λ zunehmen. Dies deutet gemeinsam mit Abbildung 6.15 daraufhin, dass die Konvergenzgeschwindigkeit einzelner Trajektorien, die sich in der Nähe des Ursprungs befinden, bei wachsendem Bifurkationsparameter erheblich zunimmt.

6.4.h. Oberhalbstetigkeit des Attraktors: 1. räumlicher Verfeinerungsschritt

In diesem Abschnitt kehren wir zu unserem Hauptresultat zurück und untersuchen die Auswirkungen auf den FE-Attraktor der Chafee-Infante-Gleichung, die durch eine Verfeinerung des FE-Raums hervorgerufen werden. Aufgrund der Oberhalbstetigkeit des Attraktors unter FE-Diskretisierung (Satz 5.16) ist zu erwarten, dass der FE-Attraktor des feineren FE-Raums den kontinuierlichen Attraktor besser approximiert, als es der FE-Attraktor des gröberen FE-Raums vermag. Ebenso dafür spricht die bereits durchgeführte Bifurkationsanalyse. Demzufolge lassen sich mit einem N_h-dimensionalen FE-Raum lediglich die ersten N_h Bifurkationspunkte der abzählbar unendlich vielen Bifurkationspunkte durch die FE-Methode approximieren (Tab. 6.1). Insbesondere lassen sich damit in einem N_h-dimensionalen FE-Raum maximal die ersten $2N_h + 1$ stationären Lösungen annähern (Abb. 6.6 und Abb. 6.12 für $N_h = 3$). Um für zwei voneinander verschieden dimensionale FE-Attraktoren einen sinnvollen Vergleich anzustellen, ist es notwendig, dass die innere Knotenmenge des feineren FE-Raums die inneren Knoten des gröberen FE-Raums enthält (Abb. 6.16). Auf diese Weise lassen sich die Koeffizienten der Basisfunktionen an den gemeinsamen inneren Knoten miteinander vergleichen. Dazu betrachten wir exemplarisch zusätzlich zu dem 3-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ den 7-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{4}}$, die einen 3- bzw. einen 7-dimensionalen FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ bzw. $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}$ aufweisen. In diesem speziellen Fall beurteilen wir vergleichsweise die Koeffizienten der 1., 2. bzw. 3. Basisfunktion des 3-dimensionalen FE-Raums $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ mit den Koeffizienten der 2., 4. bzw. 6. Basisfunktion des 7-dimensionalen FE-Raums $\mathcal{V}_{\frac{1}{4}}$ (Abb. 6.16) und bezeichnen diese Vergleichskoordinaten in die folgenden Abbildungen wie gewohnt mit x, y bzw. z.

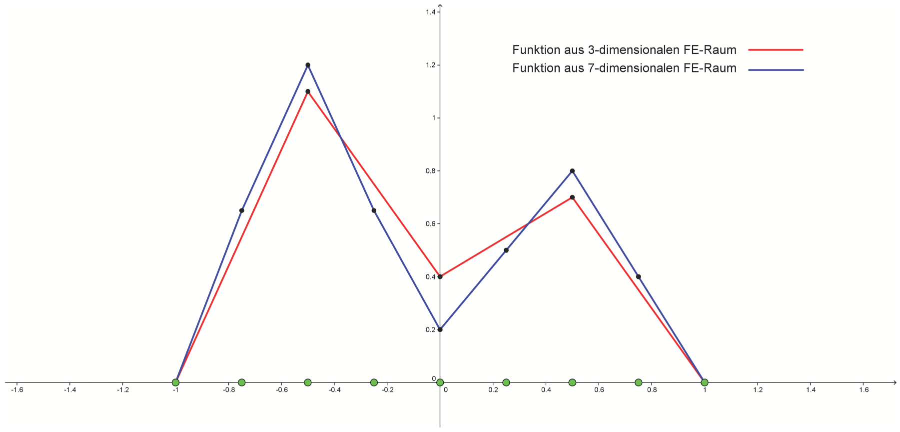


Abbildung 6.16.: Beispielfunktionen im 3 und 7 dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ und $\mathcal{V}_{\frac{1}{4}}$

Für den Vergleich der beiden Attraktoren $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ und $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}$ müssen wir die Datei `chafee1DFEMEEM.m` in den Zeilen 5, 17 und 18 zunächst modifizieren. Dazu ersetzen wir für den FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ des 3-dimensionalen FE-Raums $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ die genannten Zeilen durch

```
chafee.dim = 3;
(...)
rga(tree,15);
plotb(tree,'r',[1 2 3]); % plotb(tree,'r',[1 2]);, plotb(tree,'r',[1 3]);, plotb(tree,'r',[2 3]);
```

und für den FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}$ des 7-dimensionalen FE-Raums $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}$ durch

```
chafee.dim = 7;
(...)
rga(tree,35);
plotb(tree,'b',[2 4 6]); % plotb(tree,'b',[2 4]);, plotb(tree,'b',[2 6]);, plotb(tree,'b',[4 6]);
```

Es folgen die FE-Attraktoren $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ (rot) des 3-dimensionalen FE-Raums $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ und $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}$ (blau) des 7-dimensionalen FE-Raums $\mathcal{V}_{\frac{1}{4}}$.

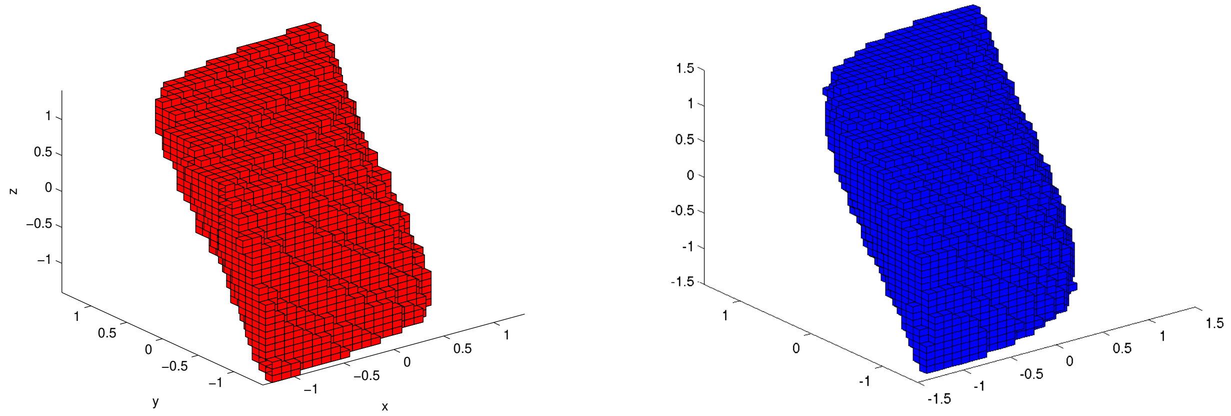


Abbildung 6.17.: FE-Attraktoren $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ bzw. $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}$ der Chafee-Infante-Gleichung für 3- bzw. 7-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ bzw. $\mathcal{V}_{\frac{1}{4}}$

Abbildung 6.17 enthält die FE-Attraktoren $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ (rot) bzw. $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}$ (blau) des 3-dimensionalen bzw. des 7-dimensionalen FE-Raums $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ bzw. $\mathcal{V}_{\frac{1}{4}}$ nach der 5. Verfeinerung mit Bifurkationsparamterwert $\lambda = 7$ und zeitlicher Schrittweite $k = \triangle t = 0.01$. Nach der 5. Verfeinerung dieser zwei FE-Attraktoren sind leichte Veränderungen speziell in den Ecken zu erkennen. Die Ecken, in denen sich die stabilen Fixpunkte befinden, sind im 7-dimensionalen FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}$ stärker ausgeprägt, da sie dort eine spitzere Form besitzen. Im Gegensatz dazu erscheinen die Ecken, in deren Nähe sich die instabilen Fixpunkte befinden, etwas abgerundeter, als dies zuvor beim FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ im 3-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ der Fall war. Man beachte, dass speziell für den Bifurkationsparamter $\lambda = 7$ beide FE-Attraktoren nach Tabelle 6.1 drei Fixpunkte besitzen, von denen zwei asymptotisch stabil und einer instabil ist. Ansonsten weisen sie augenscheinlich keine weiteren gravierenden Unterschiede auf. Um die Größe dieser zwei FE-Attraktoren miteinander zu vergleichen, betrachten wir ihre jeweiligen xy-, $xz-$ und yz-Perspektiven, indem wir den FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ des 3-dimensionalen FE-Raums $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ über den FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}$ des 7-dimensionalen FE-Raums $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}$ plotten.

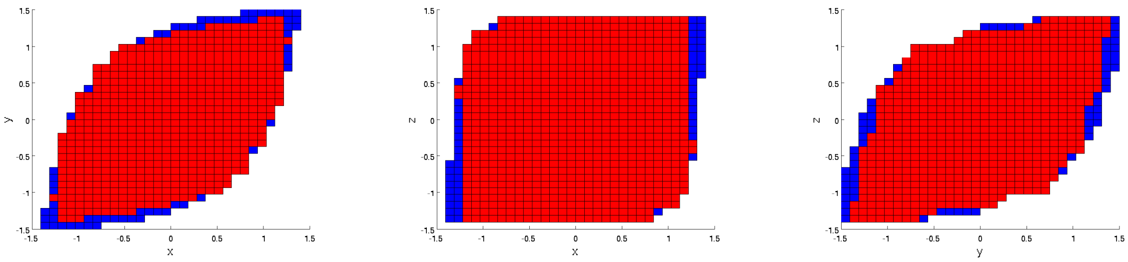


Abbildung 6.18.: Größenvergleich der FE-Attraktoren $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ und $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}$ des 3- und 7-dimensionalen FE-Raums $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ und $\mathcal{V}_{\frac{1}{4}}$ für die Chafee-Infante-Gleichung

Abbildung 6.18 enthält die FE-Attraktoren $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ und $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}$ des 3-dimensionalen und 7-dimensionalen

FE-Raums $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ und $\mathcal{V}_{\frac{1}{4}}$ aus Abbildung 6.17 nach der 5. Verfeinerung in der xy-, xz- und yz-Perspektive (von links nach rechts). Es ist deutlich zu erkennen, dass der FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}$ des 7-dimensionalen FE-Raums $\mathcal{V}_{\frac{1}{4}}$ volumentechnisch größer als der FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ des 3-dimensionalen FE-Raums $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ ist. Um eine Entscheidung treffen zu können, ob dies auf eine geringere Attraktionsgeschwindigkeit oder auf die Lange der Fixpunkte zurückzuführen ist, müssen wir uns die zugehörigen stabilen Fixpunkte $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},1}$ bzw. $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{4},1}$ ansehen. Die stabilen Fixpunkte $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},1}$ für den FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ des 3-dimensionalen FE-Raums $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ erhalten wir aus Tabelle 6.2. Die anderen erhalten wir durch eine dem Abschnitt 6.3 entsprechende FE-Bifurkationsanalyse für $N_h = 7$. Insgesamt haben wir die stabilen Fixpunkte

$$\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},1} = \pm \begin{pmatrix} 0.7321 \\ 0.9237 \\ 0.7321 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}_{\frac{1}{2}} \qquad \Phi^{\pm}_{\frac{1}{4},1} = \pm \begin{pmatrix} 0.4296 \\ 0.7219 \\ 0.8647 \\ 0.9047 \\ 0.8647 \\ 0.7219 \\ 0.4296 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}_{\frac{1}{4}}$$

Bei dem Vergleich der 2., 4. und 6. Koordinate von $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{4},1}$ mit der 1., 2. und 3. Koordinate von $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{2},1}$ stellen wir fest, dass die Fixpunkte des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}$ im 7-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{4}}$ innerhalb des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ des 3-dimensionalen FE-Raums $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ liegen. Daher ist zu erwarten, dass die Attraktionsgeschwindigkeit des 7-dimensionalen FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}$ geringer als beim 3-dimensionalen FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ ist. Man mag an dieser Stelle den Wunsch äußern, eine weitere Verfeinerung beider FE-Attraktoren berechnen zu lassen. Allerdings ist eine weitere Verfeinerung dieser FE-Attraktoren speziell im 7-dimensionalen Fall aufgrund der zu hohen Boxenanzahl und des zu geringen Speicherplatzes nicht möglich und würde zudem sehr viel Zeit in Anspruch nehmen. Würden wir andernfalls den gesamten Prozess nochmals durchführen und die Dimension des 7-dimensionalen FE-Raums ein weiteres Mal verfeinern, so erhielten wir zusätzlich zu dem 3- und 7-dimensionalen den 15-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{8}}$. Auch hier könnten wir theoretisch ähnlich wie zuvor einen Koeffizientenvergleich der Basisfunktionen der verschiedenen FE-Räume an den gemeinsamen inneren Knoten durchführen. Bei den Berechnungen des 15-dimensionalen FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{8}}$ stellt man jedoch schnell fest, dass das explizite Euler-Verfahren instabil ist, was mit der Wahl der zeitlichen Schrittweite zusammenhängt, die wir gegenwärtig $k = \triangle t = 0.01$ gewählt haben. Ein Herabsetzen der Konstante `chafee.deltat` in der Datei `chafee1DFEMEEM.m` in Zeile 7 führt zwar einerseits zur gewünschten Stabilität des expliziten Euler-Verfahrens, andererseits ist der 15-dimensionale FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{8}}$ damit in akzeptabler Zeit nicht berechenbar und der Rechner weist auch hier sehr schnell mangelnden Speicherplatz für die zu hohe Anzahl an Boxen auf. Es sei erwähnt, dass wir mit dem impliziten Eulerverfahren diesem Stabilitätsproblem nicht begegnet wären. Allerdings lässt sich auch bei diesem zeitlichen Diskretisierungsverfahren ein Overflow der Boxen keineswegs vermeiden. Da wir bei unseren Berechnungen entsprechend schnell an die Grenzen stoßen, untersuchen wir im folgenden Abschnitt den Aufwand für die Berechnung des FE-Attraktors und werden Überlegungen zu Optimierungsversuchen präsentieren.

6.4.i. Aufwand und Optimierungsversuche

Berechnungs- und Zeitaufwand:

In den vorangegangenen Abschnitten hat sich bereits die Frage aufgedrängt, welchen Aufwand dieses Verfahren zur Berechnung des FE-Attraktors benötigt. Der Beschreibung des rga-Algorithmus nach zufolge ist zu erwarten, dass sich die Anzahl der Boxen nahezu verdoppelt, falls wir den FE-Attraktor annähernd exakt approximiert haben. Dieses exponentielle Wachstum an Boxen trägt einen exponentiell wachsenden Zeitaufwand als Konsequenz. Zudem vergrößert eine höhere Dimension des

FE-Raums die Dimension der auszuwertenden Gleichungssysteme und sorgt somit zusätzlich für einen höheren Zeitaufwand. Um in dieser Hinsicht erste repräsentable Ergebnisse darzureichen, werden wir die GAIO-Methode `tree.boxes(-1)` dazu verwenden, die Anzahl der Boxen für die FE-Attraktoren $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ und $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}$ aus den FE-Räumen $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ und $\mathcal{V}_{\frac{1}{4}}$ der Dimension $N_h = 3$ und $N_h = 7$ logarithmisch zu plotten. Dazu müssen wir die Datei `chafee1DFEMEEM.m` überarbeiten, indem wir die Zeilen 5, 17 und 18 geeignet durch

```
chafee.dim = 3;                              % oder chafee.dim = 7;
(...)
for i=1:30                                   % falls chafee.dim = 7, so wähle i=1:35
   rga(tree,1);
   [n,boxdim3(i)] = size(tree.boxes(-1)); % falls chafee.dim = 7, so wähle
                                             % [n,boxdim7(i)] = size(tree.boxes(-1));
end
```

ersetzen. Die Vektoreneinträge `boxdim3(i)` und `boxdim7(i)` enthalten anschließend die Anzahl der Boxen des jeweiligen FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ bzw. $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}$ nach der `i`-ten Iteration. Für die Auswertungen des Zeitaufwandes werden wir die MATLAB-Funktion `tic toc` verwenden. Dazu müssen wir die Datei `chafee1DFEMEEM.m` erneut überarbeiten, indem wir die Zeilen 5, 17 und 18 geeignet durch

```
chafee.dim = 3;          % oder chafee.dim = 7;
(...)
for i=1:30               % falls chafee.dim = 7, so wähle i=1:35
   tic
   rga(tree,1);
   tdim3(i) = toc;       % falls chafee.dim = 7, so wähle tdim7(i) = toc;
end
```

ersetzen. Die Vektoreneinträge `tdim3(i)` und `tdim7(i)` enthalten anschließend die Zeit (in Sek.), die bei der Berechnung des jeweiligen FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ bzw. $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}$ für den `i`-ten Iterationsschritt benötigt wird. Beide Prozeduren lassen sich auch leicht auf die Verfeinerungen anstelle der Iterationen übertragen. Dies liefert uns die folgenden Aufwandsabbildungen zur Berechnung der FE-Attraktoren $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ und $\mathcal{A}_{\frac{1}{4}}$ der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung.

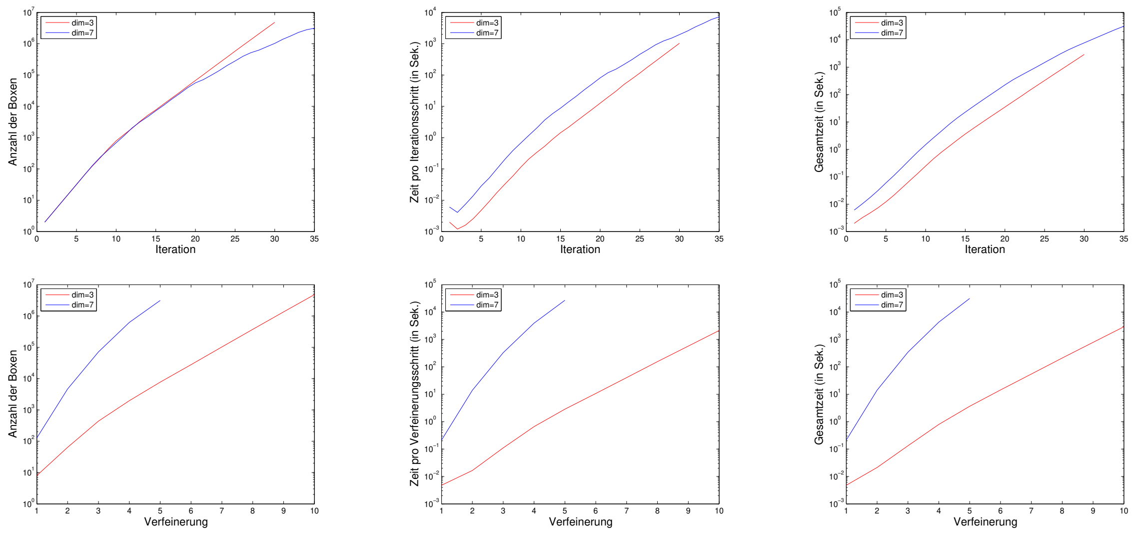


Abbildung 6.19.: Aufwandplots zur Berechnung des FE-Attraktors der Chafee-Infante-Gleichung

Die drei oberen Diagramme in Abbildung 6.19 enthalten auf der y-Achse die Anzahl der Boxen, die Zeit pro Iterationsschritt (in Sek.) und die Gesamtzeit (in Sek.) (von links nach rechts) und auf der x-Achse die Iterationen, die mit dem rga-Algorithmus durchgeführt wurden. Die unteren drei Diagramme in Abbildung 6.19 enthalten auf der y-Achse die Anzahl der Boxen, die Zeit pro Verfeinerungsschritt (in Sek.) und die Gesamtzeit (in Sek.) und auf der x-Achse die Verfeinerungen des jeweiligen FE-Attraktors. Es wird in den Aufwandplots deutlich ersichtlich, dass (unabhängig von der Dimension des FE-Raums) sowohl die Zeit als auch die Anzahl der Boxen mit zunehmender Verfeinerung des FE-Attraktors exponentiell wächst. Eine Verfeinerung des FE-Raums bewirkt eine Beschleunigung dieses Aspekts. Dies begründet unsere nicht weitreichenden Ergebnisse im vorangegangenen Abschnitt.

Optimierungsversuche:

1. Integrationszeit: Es gibt jetzt verschiedene Möglichkeiten dieser Problematik mit dem exponentiellen Wachstum der Boxenanzahl und der Zeit entgegenzuwirken. Eine erste Überlegung wäre es, die Integrationszeit zu ändern, in Hoffnung auf eine schnellere Konvergenz. Es ist dabei, wie wir bereits in Abbildung 6.14 gesehen haben, zu erwarten, dass dieses Vorgehen zu einem Verlust großer Teile des FE-Attraktors führt. Dazu ändern wir den Wert von `tFinal` in Zeile 10 in der Datei von `chafee1DFEMEEM.m` durch

```
map.tFinal = 5;
(...)
rga(tree,30);
plotb(tree,'b',[1 2 3]); % plotb(tree,'b',[1 2]);, plotb(tree,'b',[1 3]);, plotb(tree,'b',[2 3]);
```

Dies liefert uns die folgenden Darstellungen für unseren FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$.

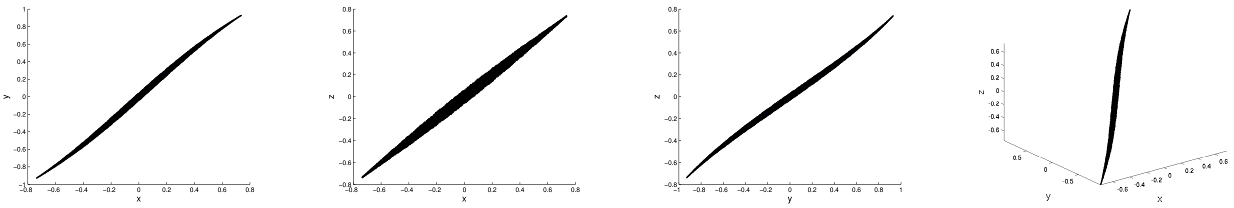


Abbildung 6.20.: FE-Attraktor der Chafee-Infante-Gleichung bei Änderung der Integrationszeit

Abbildung 6.20 enthält die verschiedenen xy-, xz-, yz- und xyz-Darstellungen des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung im 3-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ nach der 10. Verfeinerung für den Bifurkationsparameter $\lambda = 7$. Es ist hierbei augenscheinlich festzustellen, dass der FE-Attraktor durch die Änderung der Integrationszeit etwas abgemagert erscheint. (Wir erinnern dazu vergleichsweise an die Darstellungen des FE-Attraktors in der vorletzten Zeile in Abbildung 6.8.) Dabei handelt es sich speziell für die Chafee-Infante-Gleichung allerdings um keinen Nachteil. Denn in Abbildung 6.20 sind die stabilen Fixpunkte $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{4},1}$ (Tab. 6.2) und der heterokline Orbit (2. Diagramm in Abb. 6.5) sehr gut approximiert. Dabei befinden sich die stabilen Fixpunkte $\Phi^{\pm}_{\frac{1}{4},1}$ genau an den Enden und der instabile Fixpunkt $\Phi_{\frac{1}{4},0}$ genau im Ursprung. Da wir speziell für die Chafee-Infante-Gleichung nach Korollar 5.14 wissen, dass sowohl der kontinuierlicher Attraktor $\mathcal{A}$ als auch der FE-Attraktor $\mathcal{A}_h$ (für jedes $0 < h \leqslant h_0$) ausschließlich aus der Vereinigung aller heteroklinen Orbits besteht, genügt es uns für den FE-Attraktor die zugehörigen heteroklinen Orbits zu untersuchen. Man beachte hierbei, dass die Anzahl der Boxen etwa konstant bleibt, insofern die heteroklinen Orbits nahezu exakt approximiert wurden. Allerdings können wir einen Teil der heteroklinen Orbits bei der Approximation des FE-Attraktors ebenso gut verlieren, wie wir bereits bei der Strukturuntersuchung des FE-Attraktors festgestellt haben. Falls wir allerdings eine derartig spezielle Darstellung des Attraktors nicht erwarten können, liefert uns diese Modifikation leider keine Verbesserung.

2. Testpunkte: Eine weitere Möglichkeit mit Hoffnung auf schnellere Konvergenz wäre es, die Testpunkte geschickter zu wählen. In GAIO stehen uns dafür verschiedene Testpunkte zur Auswahl. Wir vergleichen exemplarisch den FE-Attraktor der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung, der mittels `Edges`, `MonteCarlo`, `Grid` und `Vertices` Testpunkten berechnet wurde. Dazu ändern wir die Zeile 14, 17 und 18 in der Datei `chafee1DFEMEEM.m` wie folgt

```
tree.domain_points = Points('Edges', chafee.dim, 50);
% tree.domain_points = Points('MonteCarlo', chafee.dim, 50);
% tree.domain_points = Points('Grid', chafee.dim, 50);
% tree.domain_points = Points('Vertices', chafee.dim, 50);
(...)
rga(tree,27);
plotb(tree,'b',[1 2 3]); % plotb(tree,'b',[1 2]);, plotb(tree,'b',[1 3]);, plotb(tree,'b',[2 3]);
```

Da die zugehörigen Abbildungen keine eindeutigen Unterschiede aufweisen, sparen wir uns an dieser Stelle ihre Darstellungen und kommen stattdessen auf die Anzahl der Boxen zu sprechen, aus denen die jeweiligen FE-Attraktoren bestehen. Die folgende Tabelle enthält die Anzahl der Boxen des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ der Chafee-Infante-Gleichung im 3-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ nach der 9. Verfeinerung für den Bifurkationsparameter $\lambda = 7$.

Testpunkte	Edges	MonteCarlo	Grid	Vertices
Anzahl der Boxen	1354102	1200325	1330177	1238896

Tabelle 6.5.: Anzahl der Boxen des FE-Attraktors bei unterschiedlichen Testpunkten

Hierbei ist zu erkennen, dass die Anzahl der Boxen bei der Wahl von Monte-Carlo-Testpunkten etwas langsamer wächst, als es bei den anderen zur Betrachtung ausstehenden Testpunkten der Fall ist. Eine bessere Asymptotik wird aber auch hier leider nicht erreicht.

3. Boxen-Elimination: Ein letzter Versuch, das exponentielle Wachstum der Boxen und der Zeit zu verbessern, wäre es, wenn wir nach jedem Verfeinerungsschritt des FE-Attraktors $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ einen Teil der Boxen willkürlich entfernen. Dass diese Auslöschung der Boxen nichts Gutes verheißt, mag man sich leicht überlegen. Denn die Löschung der Boxen führt schließlich im Allgemeinen zu einer eher schlechten Approximation des FE-Attraktors.

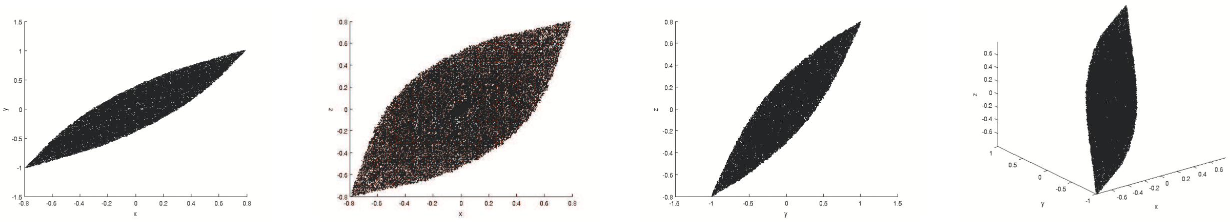


Abbildung 6.21.: FE-Attraktor nach einer Boxen-Elimination

Abbildung 6.21 zeigt den FE-Attraktor $\mathcal{A}_{\frac{1}{2}}$ der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung im 3-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$ für den Bifurkationsparameter $\lambda = 7$ nach der 11. Verfeinerung. Dabei haben wir nach der 10. Verfeinerung 6 von 7 Boxen gelöscht und anschließend einen weiteren Verfeinerungsschritt durchführen lassen. Die daraus resultierenden Ergebnisse sind nicht akzeptabel. Daher werden wir uns allen Bemühungen zum Trotz mit unseren gesamten bisherigen Ergebnissen zufrieden geben müssen.

6.4.j. Konvergenz einer Anfangswertfunktion

Wir wollen uns abschließend die Konvergenz einer Startfunktion für die eindimensionale Chafee-Infante-Gleichung im 3-, 7- und 15-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$, $\mathcal{V}_{\frac{1}{4}}$ und $\mathcal{V}_{\frac{1}{8}}$ ansehen. Dazu benötigen wir eine feste Startfunktion im jeweiligen FE-Raum. Für eine 3-dimensionale Darstellung des zeitlichen Verlaufs der Lösungstrajektorie wurde in Anhang A.8.e die MATLAB-Datei `Convergence.m` zur Verfügung gestellt. Wir speichern diese Datei im GAIO-Hauptverzeichnis und führen sie anschließend im MATLAB `Command Window` aus.

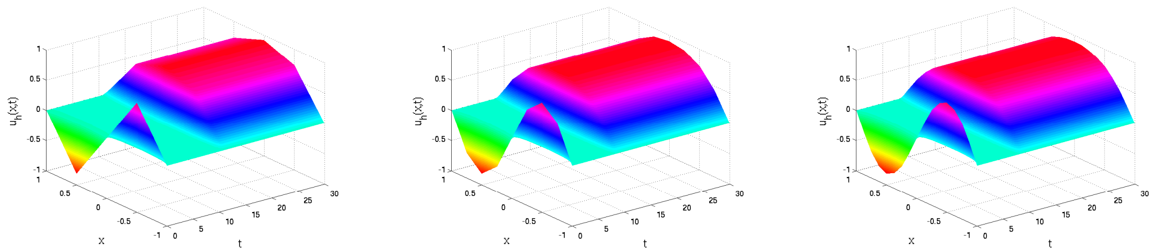


Abbildung 6.22.: Konvergenz einer FE-Lösung in den FE-Räumen $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$, $\mathcal{V}_{\frac{1}{4}}$ und $\mathcal{V}_{\frac{1}{8}}$

Abbildung 6.22 enthält die Konvergenz einer speziellen diskretisierten Anfangswertfunktion der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung mit 3-, 7- und 15-dimensionalen FE-Raum $\mathcal{V}_{\frac{1}{2}}$, $\mathcal{V}_{\frac{1}{4}}$ und $\mathcal{V}_{\frac{1}{8}}$ (von links nach rechts) gegen die stabile stationäre Lösung $\Phi^+_{\frac{1}{4},1}$, $\Phi^+_{\frac{1}{8},1}$ bzw. $\Phi^+_{\frac{1}{16},1}$ (von links nach rechts). Dabei wurden die ersten 30 Zeitschritte betrachtet, d.h. wir haben auf den durch die Anfangswertfunktion gegebenen Vektor mit den Koeffizienten der Basisfunktionen insgesamt 30 Iterationsschritte mit dem expliziten Euler-Verfahren ausgeübt. Damit beenden wir die praktische Analyse der eindimensionalen Finite-Elemente- und explizite Euler-diskretisierten Chafee-Infante-Gleichung.

6.5. Ein ergänzendes Beispiel

Medizinisches Modell: Die Vorgehensweise in Abschnitt 6.1 lässt sich sehr leicht auf andere eindimensionale Beispiele übertragen. Zudem können wir das betrachtete Gebiet durch kleinere Abänderungen auf einfache Weise verändern. Somit erhalten wir beispielsweise für das medizinische Modell (1.5) auf dem eindimensionalen Gebiet $\Omega =]-1,1[$ trivialerweise dieselbe Massen- und Steifigkeitsmatrix sowie den folgenden Vektor für die Nichtlinearität

$$\begin{aligned} G_i(\alpha) = &-\frac{3h}{20}\alpha_{i-1}^3 - \frac{6h}{5}\alpha_i^3 - \frac{3h}{20}\alpha_{i+1}^3 - \frac{h}{12}\alpha_{i-1}^2 - \frac{h}{2}\alpha_i^2 - \frac{h}{12}\alpha_{i+1}^2 \\ &- \frac{3h}{10}\alpha_{i-1}^2\alpha_i - \frac{9h}{20}\alpha_{i-1}\alpha_i^2 - \frac{9h}{20}\alpha_i^2\alpha_{i+1} - \frac{3h}{10}\alpha_i\alpha_{i+1}^2 - \frac{h}{6}\alpha_{i-1}\alpha_i - \frac{h}{6}\alpha_i\alpha_{i+1} \end{aligned}$$

Eine weitere kleine Abänderung der Datei `chafee-infante-1D-FEM-EEM-MAP.c` in den Zeilen 60-64 ermöglicht uns unmittelbar die praktische Auswertung dieses Beispiels, das wir als Ergänzung im Anhang A.8.f bereitgestellt haben. Da das medizinische Modell (1.5) in Anbetracht von Abschnitt 6.2.b die Eigenschaft $G'(0) = 0$ aufweist, besitzt dieses Beispiel keine FE-Bifurkationspunkte und damit ausschließlich die Lösung $u_h \equiv 0$. Diese Tatsache lässt sich auch im kontinuierlichen Fall leicht anhand des Abschnitts 6.2.a nachvollziehen. Denn wegen

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 + |u|_{H^1}^2 = \lambda\int_\Omega -|u|^3 - 3|u|^4\,dx \leqslant 0 \quad \forall\, t \geqslant 0$$

folgt direkt aus der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung A.12

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 \leqslant -\frac{\pi^2}{2}\|u(t)\|_{L^2}^2 \leqslant 0 \quad \forall\, t \geqslant 0$$

und damit aus dem differentiellen Gronwall-Lemma A.46 $\|u(t)\|_{L^2}^2 \leqslant 0$ für jedes $t \geqslant 0$, also $u \equiv 0$ für jedes $\lambda > 0$. Damit ist das Langzeitverhalten des medizinischen Modells (1.5) sehr einfach, da alle Lösungstrajektorien gegen die stabile stationäre Lösung $u \equiv 0$ konvergieren. Weitere Anwendungsbeispiele und durchaus kompliziertere Beispiele sind im Anhang in Abschnitt A.7.b aufgeführt.

A. Ergänzungen

A.1. Sobolevräume

A.1.a. Notationen und Grundbegriffe

In diesem Abschnitt werden wir kurz einige grundlegende Notationen einführen, die in der gesamten Ausarbeitung verwendet werden (siehe: [2], [27], [31], [35]).

Eine Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ wird als **Gebiet** bezeichnet, wenn sie offen und zusammenhängend ist. Hierbei steht $d \in \mathbb{N}$ für die Dimension des Gebiets. Mit Ω bezeichnen wir gewöhnlich ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^d$, wobei $d = 1, 2$ oder 3 ist. Der Rand des Gebiets Ω wird üblicherweise mit $\partial\Omega$ bezeichnet. Dabei werden wir stets annehmen, dass der Rand von Ω entweder ein Lipschitz-Rand oder ein konvexes Polygon (falls $d = 2$) bzw. ein konvexes Polyeder (falls $d = 3$) ist. Im Falle von $d = 1$ beschreibt Ω trivialerweise ein offenes eindimensionales Intervall, also ein Lipschitz-Gebiet. Weiter bezeichnen wir mit $\overline{\Omega}$ den **Abschluss** von Ω, d.h. $\overline{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$.

Sei $u : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ eine skalarwertige und $w : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ eine vektorwertige Funktion, dann definieren wir den **Gradienten** (oder: **Nabla-Operator**) von u durch

$$\nabla u \;:=\; \operatorname{grad} u \;:=\; \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_d}\right)$$

wobei $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_d}\right)$ ist, die **Divergenz** von w durch

$$\nabla \cdot w \;:=\; \operatorname{div} w \;:=\; \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial w_i}{\partial x_i}$$

und den **Laplace-Operator** von u durch

$$\triangle u \;:=\; \nabla^2 u \;:=\; \nabla \cdot \nabla u \;:=\; \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

Ein **Multiindex** $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$ ist ein d-dimensionaler Vektor, wobei die $\alpha_i \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ $(i = 1, \ldots, d)$ nichtnegative ganze Zahlen sind. Die Länge $|\alpha|$ eines Multiindex α ist durch $|\alpha| := \sum_{i=1}^{d} \alpha_i$ definiert. Sei $u : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ zunächst nach wie vor eine skalarwertige Funktion, dann definieren wir die zu α gehörige **partielle Ableitung** von u der Ordnung $|\alpha|$ durch

$$D^\alpha u \;:=\; \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

Da wir es hier für gewöhnlich mit Funktionen zu tun haben werden, die sowohl von dem Ort x als auch von der Zeit t abhängen, verwenden wir zur Kennzeichnung der partiellen Ableitungen die folgenden Notationen: Für eine Funktion $u : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $(x, t) \longmapsto u(x, t)$ bezeichne

$$\triangle u \;:=\; \triangle_x u \;:=\; \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

den Laplace-Operator von u bezüglich der räumlichen Variablen x und

$$u_t := \partial_t u := \frac{\partial u}{\partial t}$$

die partielle Ableitung von u bezüglich der zeitlichen Variablen t.

Für eine Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ bezeichnen wir mit $C(\Omega)$ den linearen **Raum aller stetigen Funktionen** von Ω nach $\mathbb{R}$. Dieser Raum wird für beschränkte Funktionen $f \in C(\Omega)$ mit der **Supremumsnorm**

$$\|f\|_{C(\Omega)} := \|f\|_\infty := \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$$

versehen.

Ähnlich bezeichnen wir für ein (nicht notwendig beschränktes) Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und einer nichtnegativen ganzen Zahl $k \in \mathbb{N}_0$ mit $C^k(\Omega)$ den **Raum aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen** von Ω nach $\mathbb{R}$. Falls Ω zudem beschränkt ist, so bezeichnen wir mit $C^k(\Omega)$ den Raum aller Funktionen $f \in C^k(\Omega)$, für die $D^\alpha f \in C(\overline{\Omega})$ für jedes $|\alpha| \leqslant k$ gilt. Für beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ist $\overline{\Omega}$ offenbar kompakt, da $\overline{\Omega}$ im $\mathbb{R}^d$ abgeschlossen und beschränkt ist, so dass die Funktionen $f \in C^k(\overline{\Omega})$ ihr Maximum annehmen. Wir versehen nun den Raum $C^k(\overline{\Omega})$ mit der C^k-Norm

$$\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} := \max_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha f\|_{C(\overline{\Omega})}$$

und der C^k-Halbnorm

$$|f|_{C^k(\overline{\Omega})} := \max_{|\alpha|= k} \|D^\alpha f\|_{C(\overline{\Omega})}$$

Für ein festes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ bezeichnen wir mit $C_0^k(\Omega)$ die Menge aller Funktionen $f \in C^k(\Omega)$ mit **kompakten Träger**, d.h. $\mathrm{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}} \subset \overline{\Omega}$ ist kompakt. Insbesondere gilt für solche Funktionen $f \in C_0^k(\Omega)$ auf dem Rand von Ω die Gleichung $D^\alpha f = 0$ für alle $|\alpha| \leqslant k$. Speziell für $k = \infty$ bezeichnen wir mit $C_0^\infty(\Omega)$ den Raum aller Funktionen $f \in C_0^k(\Omega)$, die unendlich oft stetig differenzierbar sind.

Desweiteren bezeichnen wir mit $L^p(\Omega)$ den **Raum der p-fach integrierbaren Funktionen** von Ω nach $\mathbb{R}$, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet ist. Dabei bildet

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\Omega)} &:= \left(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} && , p < \infty \\ \|f\|_{L^\infty(\Omega)} &:= \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)| && , p = \infty \end{aligned}$$

Speziell für $p = 2$ ist durch $L^2(\Omega)$, dem **Raum der quadratintegrierbaren Funktionen**, ein Hilbertraum gegeben. Dabei bildet

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} := \int_\Omega f g \,\mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt auf $L^2(\Omega)$.

A.1.b. Sobolevräume

In diesem Abschnitt werden wir die Sobolevräume einführen ([2], [9], [27], [31], [35]).

A.1 Definition. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen mit $d \in \mathbb{N}$, $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ p-fach integrierbar (d.h. $u \in L^p(\Omega)$) und $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$. Eine Funktion $u^{(\alpha)} \in L^p(\Omega)$ heißt* ***schwache*** *(oder:* ***verallgemeinerte****)* ***Ableitung*** *von u vom Index α, falls*

$$\int_\Omega u(x) \cdot D^\alpha \varphi(x)\, dx \;=\; (-1)^{|\alpha|} \cdot \int_\Omega u^{(\alpha)}(x) \cdot \varphi(x)\, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

gilt.

A.2 Bemerkung. *Falls eine schwache Ableitung $u^{(\alpha)}$ von u vom Index α existiert, so ist diese eindeutig ([2] 1.25) und wir setzen $D^\alpha u = u^{(\alpha)}$ (im schwachen Sinne). Insbesondere ist der Begriff der schwachen Ableitung eine Verallgemeinerung des klassischen Ableitungsbegriffs. Denn für jedes $u \in C^k(\Omega)$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ existiert für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \leqslant k$ die schwache Ableitung $u^{(\alpha)}$ von u vom Index α und diese ist gegeben durch $u^{(\alpha)} = D^\alpha u$. Weil für klassisch differenzierbare Funktionen der klassische Ableitungsbegriff und der Begriff der schwachen Ableitung übereinstimmen, entsteht keine Verwechslungsgefahr, wenn wir $D^\alpha u$ für die schwache Ableitung von u vom Index α schreiben.*

A.3 Definition. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen mit $d \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Der* ***Sobolevraum*** *der Ordnung k mit Exponent p ist definiert durch*

$$W^{k,p}(\Omega) \;:=\; \{u \in L^p(\Omega) \mid \forall\, |\alpha| \leqslant k\; \exists\, u^{(\alpha)} \in L^p(\Omega) :\; u^{(\alpha)} \text{ ist schw. Abl. von } u \text{ vom Index } \alpha\}$$

Speziell für $p = 2$ schreiben wir $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$.

Hierbei bildet

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} \;:=\; \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}} \;=\; \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \int_\Omega (D^\alpha u)^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad , p \in [1, \infty[$$

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} \;:=\; \max_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \qquad , p = \infty$$

eine Norm und

$$|u|_{W^{k,p}(\Omega)} \;:=\; \left(\sum_{|\alpha|= k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}} \;=\; \left(\sum_{|\alpha|= k} \int_\Omega (D^\alpha u)^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad , p \in [1, \infty[$$

$$|u|_{W^{k,\infty}(\Omega)} \;:=\; \max_{|\alpha|= k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \qquad , p = \infty$$

eine Halbnorm auf $W^{k,p}(\Omega)$. Insbesondere ist $(W^{k,p}(\Omega), \|.\|_{W^{k,p}(\Omega)})$ für jedes $p \in [1, \infty]$ ein Banachraum (d.h. dieser Raum ist vollständig bzgl. seiner Norm), der zudem für jedes $p \in [1, \infty[$ reflexiv ist. Speziell für $p = 2$ bildet

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} \;=\; (u, v)_{W^{k,2}(\Omega)} \;:=\; \sum_{|\alpha|\leqslant k} \int_\Omega (D^\alpha u) \cdot (D^\alpha v)\, dx$$

ein Skalarprodukt auf $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ und $(H^k(\Omega), (.,.)_{H^k(\Omega)})$ ist für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ein Hilbertraum mit der Eigenschaft $H^{k+1}(\Omega) \subset H^k(\Omega)$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Weiter gelten hierbei insbesondere die Normbeziehungen

$$\|u\|_{H^0} \;=\; |u|_{H^0} \;=\; \|u\|_{L^2}$$

$$\|u\|_{H^1} \;=\; \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ und } |u|_{H^1} \;=\; \|\nabla u\|_{L^2}$$

$$\|u\|_{H^2} \;=\; \left(\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\triangle u\|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}} \text{ und } |u|_{H^2} \;=\; \|\triangle u\|_{L^2}$$

wobei wir hier und in der Regel die Gebietsbezeichnungen an der Normen, Halbnormen und Skalarprodukten zwar fortlassen, die betrachteten Räume jedoch weiterhin aufführen werden.
Man beachte, dass es eine weitere Möglichkeit gibt, den klassischen Ableitungsbegriff zu erweitern. Denn es ist naheliegend, den Raum $C^\infty(\Omega)$ unter der Norm $\|.\|_{H^k}$ abzuschließen.

A.4 Definition. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen mit $d \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann definieren wir*

$$H^k(\Omega) := \overline{\{u \in C^\infty(\Omega) \mid \|u\|_{H^k(\Omega)} < \infty\}}^{\|.\|_{H^k(\Omega)}}$$

Es stellt sich heraus, dass diese Definition äquivalent zur vorherigen ist.

A.5 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen mit $d \in \mathbb{N}$. Dann gilt für jedes $k \in \mathbb{N}_0$, dass die Menge*

$$\{u \in C^\infty(\Omega) \mid \|u\|_{H^k(\Omega)} < \infty\}$$

dicht in $H^k(\Omega)$ liegt. Speziell für $k = 0$ gilt, dass $C^\infty(\Omega)$ dicht in $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ liegt.

Als nächstes definieren wir einen Teilraum von $H^k(\Omega)$.

A.6 Definition. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $d \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann definieren wir*

$$H_0^k(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|.\|_{H^k(\Omega)}}$$

Dabei bildet $(H_0^k(\Omega), (.,.)_{H^k(\Omega)})$ für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ ein Hilbertraum. Insbesondere gilt per Definition, dass $H_0^1(\Omega)$ ein abgeschlossen Teilraum von $H^1(\Omega)$ ist. Abschließend definieren wir die Sobolevräume für negative k.

A.7 Definition. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen mit $d \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann definieren wir $H^{-k}(\Omega)$ als den Dualraum von $H_0^k(\Omega)$.*

Speziell für $k = 1$ versehen wir den Dualraum $H^{-1}(\Omega)$ mit der Norm

$$\|u\|_{H^{-1}(\Omega)} := \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{|(u,v)_{L^2(\Omega)}|}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}$$

A.8 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt mit $d \in \mathbb{N}$ und $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar. Dann gilt*

$$\forall\, k \in \mathbb{N}: \quad u \in C^{k-1}(\overline{\Omega}) \implies u \in H^k(\Omega)$$

Beweis. siehe [4] Satz 5.2 □

Weiter gelten für die vorgestellten Räume die Inklusionen

$$\begin{array}{ccccccccc}
\|.\|_{L^2} & = & \|.\|_{H^0} & \leqslant & \|.\|_{H^1} & \leqslant & \|.\|_{H^2} & \leqslant & \cdots \\
L^2(\Omega) & = & H^0(\Omega) & \supset & H^1(\Omega) & \supset & H^2(\Omega) & \supset & \cdots \\
 & & \| & & \cup & & \cup & & \\
 & & H_0^0(\Omega) & \supset & H_0^1(\Omega) & \supset & H_0^2(\Omega) & &
\end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \leqslant & \|.\|_{H^{-2}} & \leqslant & \|.\|_{H^{-1}} & \leqslant & \|.\|_{L^2} & \leqslant & \|.\|_{H^1} & \leqslant & \|.\|_{H^2} & \leqslant & \cdots \\
\cdots & \supset & H^{-2}(\Omega) & \supset & H^{-1}(\Omega) & \supset & L^2(\Omega) & \supset & H_0^1(\Omega) & \supset & H_0^2(\Omega) & \supset & \cdots
\end{array}$$

A.1.c. Spursatz und Poincaré-Friedrichs-Ungleichung

Viele der Sobolevschen Einbettungstheoreme erfordern für ihre Beweisführung, als Gebiet ein sogenanntes Lipschitz-Gebiet. Folglich sind zahlreiche partielle Differentialgleichungen und Variationsprobleme auf Lipschitz-Gebieten definiert. Dabei handelt es sich um ein Gebiet, dessen Rand hinreichend regulär ist, in dem Sinne, dass er sich lokal als Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion auffassen lässt ([4], [24]).

A.9 Definition. *a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $d \in \mathbb{N}$. Dann sagen wir, dass Ω einen* ***Lipschitz-Rand*** *besitzt (bzw. ein* ***Lipschitz-Gebiet*** *ist), falls es für jeden Punkt $p \in \partial\Omega$ einen Radius $r > 0$ und eine Abbildung $h_p : B_r(p) \longrightarrow B_1(0)$ gibt, so dass die Eigenschaften*

$$\begin{aligned}
&\text{(1): } h_p \text{ ist bijektiv}\\
&\text{(2): } h_p, h_p^{-1} \text{ sind Lipschitz-stetig}\\
&\text{(3): } h_p(\partial\Omega \cap B_r(p)) \;=\; B_1^0(0)\\
&\text{(4): } h_p(\Omega \cap B_r(p)) \;=\; B_1^+(0)
\end{aligned}$$

erfüllt sind, wobei

$$\begin{aligned}
B_r(p) \;&:=\; \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x - p\| < r\}\\
B_1^0(0) \;&:=\; \{x \in B_1(0) \mid x_d = 0\}\\
B_1^+(0) \;&:=\; \{x \in B_1(0) \mid x_d > 0\}
\end{aligned}$$

b) Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Dann sagen wir, dass Ω einen ***C^k-Rand*** *(oder:* ***glatten Rand****) besitzt (bzw. ein* ***C^k-Gebiet*** *ist), falls in a) anstelle von (2) die Bedingung*

$$\text{(2)': } h_p, h_p^{-1} \text{ sind } k\text{-mal stetig differenzierbar}$$

für jedes $p \in \partial\Omega$ gilt.
c) Weiter sagen wir, dass Ω einen ***stückweise C^k-Rand*** *(oder:* ***stückweise glatten Rand****) besitzt, falls es eine endliche Zerlegung $\partial\Omega = \bigcup_{i=1}^n M_i$ von $\partial\Omega$ gibt, so dass M_i für jedes $i = 1, \ldots, n$ ein C^k-Rand ist.*

Man beachte, dass konvexe polygonale Gebiete spezielle Lipschitz-Gebiete sind.

A.10 Satz (SPURSATZ). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand (oder C^1-Rand) und $d \in \mathbb{N}$. Dann gibt es genau einen linearen und beschränkten Operator $T : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$ mit der Eigenschaft*

$$Tu \;=\; u|_{\partial\Omega} \quad \forall\, u \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$$

Hierbei bezeichnet man T als ***Spuroperator*** *und die wegen der Beschränktheit geltende Ungleichung*

$$\|Tu\|_{L^2(\partial\Omega)} \;\leqslant\; C\|u\|_{H^1} \quad \forall\, u \in H^1(\Omega)$$

als ***Spurungleichung****. Die minimale Konstante, für die diese Ungleichung gilt, ist die Operatornorm des Spuroperators, d.h. $C = \|T\|_{op}$.*

Beweis. siehe [2] A.6.6, [27] Theo.5.35 $\square$

Mithilfe des Spursatzes erhält man eine hilfreiche Charakterisierung des Raumes $H_0^1(\Omega)$. Diese besagt, dass sich der Raum $H_0^1(\Omega)$ interpretieren lässt, als der Raum der Funktionen aus $H^1(\Omega)$, die auf dem Rand $\partial\Omega$ verschwinden.

A.11 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand und $d \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$u \in H_0^1(\Omega) \quad \Longleftrightarrow \quad u \in H^1(\Omega) \text{ und } Tu = u|_{\partial\Omega} = 0$$

Beweis. siehe [27] Theo.5.36 □

Weiter haben wir für den Raum $H_0^1(\Omega)$ die folgende wichtige Ungleichung.

A.12 Lemma (POINCARÉ-FRIEDRICHS-UNGLEICHUNG). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit $d \in \mathbb{N}$ und*

$$diam(\Omega) := \sup\{\|x-y\| \mid x, y \in \Omega\} = \sup\{\left(\sum_{i=1}^{d}(x_i - y_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} \mid x, y \in \Omega\}$$

Dann gilt für die Konstante $C = C(\Omega) := diam(\Omega) > 0$ die Ungleichung

$$\|v\|_{L^2} \leqslant C \cdot \|\nabla v\|_{L^2} = C \cdot |v|_{H^1} \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

Beweis. siehe: [4] (1.6), [27] Prop.5.8, [31] Theo.A.6 □

Man beachte, dass sich die Konstante C aus der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung optimieren lässt (siehe: [27] (9.2) und Lem.5.40). In der Tat lässt sich zeigen, dass die Abschätzung für $C = \lambda_1^{-\frac{1}{2}}$ gilt, wobei $\lambda_1 = \lambda_1(\Omega)$ der kleinste Eigenwert des elliptischen Eigenwertproblems

$$\begin{aligned} -\triangle u(x) &= \lambda u(x) \qquad , x \in \Omega \\ u(x) &= 0 \qquad\qquad , x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

ist. Desweiteren folgt aus der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung, dass die Normen $\|.\|_{H^1}$ und $|.|_{H^1}$ auf $H_0^1(\Omega)$ äquivalent zueinander sind, weshalb die Halbnorm $|.|_{H^1}$ eine Vollnorm auf $H_0^1(\Omega)$ erzeugt.

A.1.d. Sobolevsche Ungleichungen

A.13 Satz (ALLGEMEINE SOBOLEVSCHE UNGLEICHUNGEN). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand (oder C^1-Rand) und $d \in \mathbb{N}$. Weiter sei $u \in W^{k,p}(\Omega)$.*
(1) Falls $k < \frac{d}{p}$ ist, so gilt $u \in L^q(\Omega)$ mit $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{k}{d}$ und es gibt eine Konstante $C = C(k, p, d, \Omega) > 0$ mit

$$\|u\|_{L^q} \leqslant C\|u\|_{W^{k,p}}$$

(2) Falls $k > \frac{d}{p}$ ist, so gilt $u \in C^{k-\lfloor\frac{d}{p}\rfloor-1,\gamma}(\overline{\Omega})$ mit

$$\gamma = \begin{cases} \left\lfloor\frac{d}{p}\right\rfloor + 1 - \frac{d}{p} & , \text{falls } \frac{d}{p} \notin \mathbb{Z} \\ \text{irgendeine positive Zahl } < 1 & , \text{falls } \frac{d}{p} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

und es gibt eine Konstante $C = C(k, p, d, \Omega, \gamma) > 0$ mit

$$\|u\|_{C^{k-\lfloor\frac{d}{p}\rfloor-1,\gamma}(\overline{\Omega})} \leqslant C\|u\|_{W^{k,p}}$$

Beweis. siehe [9] Kap.5.6.3 Theo.6. □

Hierbei bezeichnet $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ bezeichnet den sogenannten **Hölder-Raum**. Wir benötigen speziell den Fall $p = 2$ und führen dafür einen Spezialfall dieser Ungleichung auf, der sich in [27] (Theo.5.31) finden lässt.

A.14 Satz (SPEZIELLE SOBOLEVSCHE UNGLEICHUNGEN). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand (oder C^1-Rand) und $d \in \mathbb{N}$. Weiter sei $u \in W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$.*
(1) Falls $k < \frac{d}{2}$ ist, so gilt $u \in L^{\frac{2d}{d-2k}}(\Omega)$ und es gibt eine Konstante $C > 0$ mit

$$\|u\|_{L^{\frac{2d}{d-2k}}} \leqslant C\|u\|_{W^{k,2}} = C\|u\|_{H^k}$$

(2) Falls $k = \frac{d}{2}$ ist, so gilt $u \in L^p(\Omega)$ für jedes $p \in [1, \infty[$ und es gibt für jedes $p \in [1, \infty[$ eine Konstante $C = C(p) > 0$ mit

$$\|u\|_{L^p} \leqslant C\|u\|_{W^{k,2}} = C\|u\|_{H^k}$$

(3) Falls $k > j + \frac{d}{2}$ ist, so gilt $u \in C^j(\overline{\Omega})$ und es gibt eine Konstante $C = C(j) > 0$ mit

$$\|u\|_{C^j(\overline{\Omega})} \leqslant C\|u\|_{W^{k,2}} = C\|u\|_{H^k}$$

Speziell in eindimensionalen Gebieten verwenden wir den folgenden Satz mit $p = 2$.

A.15 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit $d \in \mathbb{N}$. Weiter sei $u \in H_0^{1,p}(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega)$ mit $1 < p < \infty$. Falls $1 - \frac{d}{p} > 0$ ist, so gilt $u \in L^\infty(\Omega)$ und es gilt eine Konstante $C = C(d, p, \Omega) > 0$ mit*

$$\|u\|_{L^\infty} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p}$$

Beweis. siehe [2] Satz 8.10. □

A.1.e. Sobolevscher Einbettungssatz

Die zweite Aussage des folgenden stetigen und kompakten Einbettungssatz für Sobolevräume werden wir speziell für $m_1 = 2$, $m_2 = 1$ (bzw. $m_1 = 1$, $m_2 = 0$) und $p_1 = p_2 = 2$ sowie für die Dimensionen $d = 1, 2, 3$ anwenden.

A.16 Satz (SOBOLEVSCHER EINBETTUNGSSATZ). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand und $d \in \mathbb{N}$. Weiter seien $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0$ sowie $1 \leqslant p_1 < \infty$ und $1 \leqslant p_2 < \infty$.*
(1) Falls die Eigenschaften

$$m_1 - \frac{d}{p_1} \geqslant m_2 - \frac{d}{p_2} \quad \text{und} \quad m_1 \geqslant m_2$$

erfüllt sind, so existiert die Einbettung

$$Id : W^{m_1,p_1}(\Omega) \longrightarrow W^{m_2,p_2}(\Omega)$$

(d.h. $W^{m_1,p_1} \subset W^{m_2,p_2}$) und diese ist stetig. Weiter gilt die Abschätzung

$$\exists\, C = C(d, \Omega, m_1, m_2, p_1, p_2) > 0 \;\forall\, u \in W^{m_1,p_1}(\Omega) : \; \|u\|_{W^{m_2,p_2}} \leqslant C\|u\|_{W^{m_1,p_1}}$$

Dabei ist $W^{0,p}(\Omega) := L^p(\Omega)$.
(2) Falls die Eigenschaften

$$m_1 - \frac{d}{p_1} > m_2 - \frac{d}{p_2} \quad \text{und} \quad m_1 > m_2$$

erfüllt sind, so existiert die Einbettung

$$Id : W^{m_1,p_1}(\Omega) \longrightarrow W^{m_2,p_2}(\Omega)$$

(d.h. $W^{m_1,p_1} \subset W^{m_2,p_2}$) und diese ist stetig und kompakt. Weiter gilt die Abschätzung

$$\exists\, C = C(d, \Omega, m_1, m_2, p_1, p_2) > 0 \;\forall\, u \in W^{m_1,p_1}(\Omega) : \; \|u\|_{W^{m_2,p_2}} \leqslant C\|u\|_{W^{m_1,p_1}}$$

(3) Für beliebige beschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ mit $d \in \mathbb{N}$ gelten die Aussagen in (1) und (2) für die Räume $W_0^{m_i,p_i}(\Omega)$ anstatt $W^{m_i,p_i}(\Omega)$. Dabei ist $W_0^{0,p}(\Omega) := L^p(\Omega)$.

Beweis. siehe [2] 8.9. □

Der Sobolevsche Einbettungssatz A.16 gilt sogar für $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ und $p_1, p_2 \in [0, \infty]$. In diesem Zusammenhang ist der Sobolevraum $W^{m_1,\infty}(\Omega)$ durch den Hölder-Raum $C^{m,a}(\overline{\Omega})$ definiert, wobei $k = m+a$, $a \in]0,1]$ und $m \in \mathbb{Z}$ sind. Die Aussage (2) ist auch unter dem Namen **Satz von Kondrakov** bekannt. Für den Beweis werden eine Reihe von Ungleichungen benötigt, zu denen unter anderem die Gagliardo-Nirenberg-Sobolev-Ungleichung, die Nash-Ungleichung sowie die Sobolevsche Ungleichung A.13 gehören, auf die wir an dieser Stelle nicht weiter eingehen wollen.

Bekanntlich ist nicht jede Funktion aus dem Sobolevraum $H^k(\Omega)$ mit $k \in \mathbb{N}$ stetig auf dem Abschluss von Ω. Daher werden wir abschließend einen weiteren Einbettungssatz formulieren [24], der uns gerade dies garantiert.

A.17 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand und $d \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

(1) $\forall\, k \in \mathbb{N}$ *mit* $k > \dfrac{d}{2}:\ H^k(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$

(2) Die Einbettung aus (1) ist stetig.

Beweis. siehe [2] □

A.2. Gammafunktion und Eulersche Betafunktion

In diesem Abschnitt werden wir die Gammafunktion und die Eulersche Betafunktion einführen und einige Eigenschaften dieser Funktionen nennen. Nähere Informationen und Beweise der Aussagen finden sich in [26].

A.2.a. Gammafunktion

A.18 Definition. *Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $Re(z) > 0$. Dann bezeichnet man die durch*

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

definierte Funktion als ***Gammafunktion*** *(oder:* ***Eulersches Integral 2. Art****).*

Die Funktion Γ ist in jedem Streifen $\{z \in \mathbb{C} \mid a \leqslant Re(z) \leqslant b\}$ mit $0 < a < b < \infty$ beschränkt und konvergiert dort gleichmäßig und absolut. Weiter erfüllt sie die **Funktionalgleichung**

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \text{ mit } Re(z) > 0, \quad \Gamma(1) = 1$$

und den **Eulerschen Ergänzungssatz**

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \text{ mit } Re(z) > 0$$

Weitere Eigenschaften sind

$$\overline{\Gamma(z)} = \Gamma(\overline{z}) \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \text{ mit } Re(z) > 0$$

$$\Gamma(x) > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ mit } x > 0$$

$$|\Gamma(z)| \leqslant \Gamma(Re(z)) \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \text{ mit } Re(z) > 0$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \text{ allgemeiner: } \Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = \frac{(2n)!}{4^n n!}\sqrt{\pi} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$$

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}+z)\Gamma(\tfrac{1}{2}-z) = \frac{\pi}{\cos \pi z} \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \text{ mit } Re(z) > 0$$

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z \sin \pi z} \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \text{ mit } Re(z) > 0$$

Eine Approximation der Gammafunktion liefert die *Stirling-Formel* durch

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \text{ mit } Re(z) > 0$$

A.2.b. Eulersche Betafunktion

A.19 Definition. *Seien $z, w \in \mathbb{C}$ mit $Re(z), Re(w) > 0$. Dann bezeichnet man die durch*

$$B(z,w) := \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\,dt = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}}\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2z-1}(\cos t)^{2w-1}\,dt$$

definierte Funktion als ***Eulersche Betafunktion*** *(oder:* ***Eulersches Integral 1. Art****).*

Die Funktion B konvergiert in $\{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid Re(z) > 0,\ Re(w) > 0\}$ kompakt und absolut und ist daher bei festem $z \in \mathbb{C}$ mit $Re(z) > 0$ (bzw. $w \in \mathbb{C}$ mit $Re(w) > 0$) holomorph in der Halbebene $\{w \in \mathbb{C} \mid Re(w) > 0\}$ (bzw. in $\{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0\}$). Weiter erfüllt die Eulersche Betafunktion die Symmetriebedingung

$$B(z,w) = B(w,z) \quad \forall\, z,w \in \mathbb{C} \text{ mit } Re(z), Re(w) > 0$$

sowie

$$B(z+1,w) = \frac{z}{z+w}\cdot B(z,w) \quad \forall\, z,w \in \mathbb{C} \text{ mit } Re(z), Re(w) > 0$$
$$B(1,w) = \frac{1}{w} \quad \forall\, w \in \mathbb{C} \text{ mit } Re(w) > 0$$

Das Hauptresultat aus der Theorie der Betafunktion ist die **Eulersche Identität**

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \quad \forall\, z,w \in \mathbb{C} \text{ mit } Re(z), Re(w) > 0$$

A.3. Operatortheorie, Hilbert-Schmidt-Theorem, Spektralsatz und gebrochene Potenzen

Für diesen gesamten Abschnitt verweisen wir auf [2] und [35].

A.3.a. Grundbegriffe der Operatortheorie

Sei $T : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung - auch **Operator** genannt - zwischen zwei Banachräumen $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$.

A.20 Definition. *a) T heißt* ***linear****, falls*

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2 \quad \forall\, x_1, x_2 \in X\ \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

b) T heißt ***beschränkt****, falls*

$$\exists\, C > 0 : \ \|Tx\|_Y \leqslant C\|x\|_X \quad \forall\, x \in X$$

c) T heißt ***stetig****, falls*

$$\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = x : \ \lim_{n\to\infty} T x_n = Tx$$

d) Die Menge aller linearen und beschränkten Operatoren bezeichnen wir mit

$$L(X,Y) := \{T : X \longrightarrow Y \mid T \text{ linear und beschränkt}\}$$

$L(X,Y)$ bildet zusammen mit der ***Operatornorm***

$$\|T\|_{L(X,Y)} := \|T\|_{op} := \inf\{C \mid \|Tx\|_Y \leqslant C\|x\|_X \quad \forall x \in X\}$$

ein Banachraum.

Bei Differentialoperatoren handelt es sich für gewöhnlich um unbeschränkte Operatoren, die erst nach der Einschränkung auf ihren eigentlichen Definitionsbereich als beschränkte Operatoren aufgefasst werden können.

A.21 Lemma. *Sei $T \in L(X,Y)$. Dann gilt:*

$$T \text{ beschränkt} \iff T \text{ stetig}$$

Beweis. siehe [2] Lem.3.1 oder [35] II.1.2. □

A.22 Definition. *a) Mit $\mathcal{D}(T) \subset X$ bezeichnen wir den* ***Definitionsbereich*** *von T.*
b) Der ***Bildraum*** *von T ist definiert durch*

$$R(T) := \{y \in Y \mid \exists\, x \in \mathcal{D}(T) : \; Tx = y\} = \{Tx \in Y \mid x \in \mathcal{D}(T)\} \subset Y$$

c) Der ***Nullraum*** *(oder* ***Kern****) von T ist definiert durch*

$$N(T) := \{x \in \mathcal{D}(T) \mid Tx = 0\} \subset X$$

d) Eine lineare Abbildung $T : X \longrightarrow Y$ heißt ***invertierbar****, falls T bijektiv ist.*

Der Nullraum $N(T)$ bildet wegen der Stetigkeit von T einen abgeschlossenen Unterraum von X. Der Bildraum $R(T)$ ist im Allgemeinen nicht abgeschlossen.

A.23 Lemma.

$$T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow R(T) \text{ invertierbar} \iff N(T) = \{0\}$$

Beweis. siehe [27] Lem.3.4. □

A.24 Satz (SATZ VON DER INVERSEN ABBILDUNG). *Sei $T \in L(X,Y)$. Dann gilt:*

$$T \text{ bijektiv} \implies T^{-1} : Y \longrightarrow X \text{ linear}$$

Zusatz: Sei $T \in L(X,Y)$ nach ***unten beschränkt****, d.h. es gibt ein $C > 0$ mit $\|Tx\|_Y \leqslant C\|x\|_X$, dann ist der Inversoperator T^{-1} wohldefiniert. Falls T sogar beschränkt ist, so ist auch $T^{-1} : R(T) \longrightarrow \mathcal{D}(T)$ beschränkt.*
Beweis. siehe [2] Satz 5.8. □

A.25 Definition. *Sei $T : X \longrightarrow Y$ ein linearer Operator. T heißt* ***kompakt****, falls eine der folgenden Aussagen gilt:*

(i): $\forall\, U \subset X$ beschränkt : $\overline{T(U)} \subset Y$ ist kompakt
(ii): $\forall\, U \subset X$ beschränkt : $T(U) \subset Y$ ist relativ kompakt
(iii): $\forall\, (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ beschränkt : $(Tu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt eine in Y konvergente Teilfolge

A.26 Lemma.

$$T \text{ kompakt} \quad \Longrightarrow \quad T \text{ beschränkt (und damit stetig)}$$

Beweis. siehe: [27] Lem.3.9 □

Sei $(H, \|\cdot\|_H, (\cdot,\cdot)_H)$ fortan ein Hilbertraum.

A.27 Definition. *a) Eine Teilmenge $\{e_k \mid k \in N\} \subset H$ mit $N \subset \mathbb{N}$ heißt* ***Orthogonalsystem*** *von H, falls die folgenden Aussagen gelten:*

(i): $(e_k, e_l)_H = 0 \quad \forall\, k,l \in N$ mit $k \neq l$

(ii): $e_k \neq 0 \quad \forall\, k \in N$

b) Eine Teilmenge $\{e_k \mid k \in N\} \subset H$ mit $N \subset \mathbb{N}$ heißt ***Orthonormalsystem*** *von H, falls die folgende Aussage gilt:*

$$(e_k, e_l)_H = \delta_{kl} \quad \forall\, k,l \in N$$

A.28 Satz. *Sei $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset H$ ein Orthonormalsystem von H. Dann heißt $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ eine* ***Orthonormalbasis*** *(oder:* ***vollständiges Orthonormalsystem****) von H, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:*

(1): $\operatorname{span}\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ *liegt dicht in H* (d.h. $\overline{\operatorname{span}\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}} = H$)

(2): $x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)_H \cdot e_k \quad \forall\, x \in H$

(3): $\|x\|_H^2 = (x,x)_H = \sum_{k=1}^{\infty} |(x, e_k)_H|^2 \quad \forall\, x \in H$ (***Parsevalsche-Identität***)

(4): $(x,y)_H = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k)_H \cdot (e_k, y)_H \quad \forall\, x \in H$

Beweis. siehe [2] 7.7. □

A.3.b. Hilbert-Schmidt-Theorem

A.29 Definition. *Ein linearer Operator $T : H \supset \mathcal{D}(T) \longrightarrow H$ heißt* ***symmetrisch****, falls*

$$(Tx_1, x_2)_H = (x_1, Tx_2)_H \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$$

A.30 Satz (Satz von Hilbert-Schmidt). *Sei H ein Hilbertraum und $T : H \longrightarrow H$ ein linearer, symmetrischer, kompakter Operator. Dann gilt:*

(1): *Es gibt eine Folge reeller Eigenwerte $\{\lambda_i \mid i = 1, \ldots, \infty\} \subset \mathbb{R}$ von T mit $\lambda_i \neq 0\; \forall\, i$*

(2): *Sind die Eigenwerte gemäß $|\lambda_{i+1}| \leqslant |\lambda_i|$ angeordnet, so gilt*

$$\lim_{i \to \infty} \lambda_i = 0$$

(3): *Es gibt eine orthonormale Menge $\{\varphi_i \mid i = 1, \ldots, \infty\}$ an zugehörigen Eigenfunktionen von T, d.h.*

$$T\varphi_i = \lambda_i \varphi_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, \infty$$

(4): *Die zugehörigen Eigenfunktionen $\{\varphi_i \mid i = 1, \ldots, \infty\}$ können so gewählt werden, dass sie eine Orthonormalbasis von H bilden und T lässt sich darstellen durch*

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x, \varphi_i)_H \varphi_i \quad \forall\, x \in H$$

Beweis. siehe [27] Theo.3.18. □

Die Linearität und Symmetrie des Operators T in den Voraussetzungen von Satz A.30 lassen sich auch durch die Beschränktheit und Selbstadjungiertheit von T ersetzen.

A.3.c. Spektralsatz

A.31 Satz (SPEKTRALSATZ). *Sei H ein Hilbertraum und $T : H \supset \mathcal{D}(T) \longrightarrow H$ ein linearer, symmetrischer Operator mit $R(T) = H$. Weiter sei T invertierbar mit kompakter Inverser. Dann gilt:*

(1): Es gibt eine abzählbar unendliche Menge $\{\lambda_i \mid i = 1, \dots, \infty\}$ reeller Eigenwerte von T. Sind die Eigenwerte gemäß $|\lambda_{i+1}| \geqslant |\lambda_i|$ angeordnet, so gilt

$$\lim_{i \to \infty} \lambda_i = +\infty$$

(2): Die zugehörigen Eigenfunktionen $\{\varphi_i \mid i = 1, \dots, \infty\}$ können so gewählt werden, dass sie eine Orthonormalbasis von $R(T) = H$ bilden und T lässt sich darstellen durch

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x, \varphi_i)_H \varphi_i \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(T) \quad (\textbf{Spektraldarstellung})$$

Beweis. siehe [27] Theo.3.26. □

A.3.d. Gebrochene Potenzen

A.32 Definition. *Ein Operator $T : H \supset \mathcal{D}(T) \longrightarrow H$ heißt* ***positiv****, falls*

$$\exists\, C > 0 : \; (Tx, x)_H \geqslant C\|x\|_H^2 \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(T)$$

Bemerke: Es folgt unmittelbar, dass, wenn der Operator T im Spektralsatz A.31 positiv ist, auch alle seine Eigenwerte positiv sind. In diesem Fall lassen sich wegen der Spektraldarstellung von T gebrochene Potenzen einführen.

A.33 Definition. *Sei $T : H \supset \mathcal{D}(T) \longrightarrow H$ eine positiver Operator. Weiter lasse sich T darstellen durch*

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x, \varphi_i)_H \varphi_i \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(T)$$

Dann definieren wir ***gebrochene Potenzen*** *T^α von T für $\alpha \in \mathbb{R}$ durch*

$$T^\alpha x := \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^\alpha (x, \varphi_i)_H \varphi_i$$

$$\mathcal{D}(T^\alpha) = \{x \in \mathcal{D}(T) \mid \|T^\alpha x\|_H < \infty\} = \{x \in \mathcal{D}(T) \mid x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i, \; \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^{2\alpha} \lambda_i^2 < \infty\}$$

$\mathcal{D}(T^\alpha)$ bildet zusammen mit dem Skalarprodukt

$$(x_1, x_2)_{\mathcal{D}(T^\alpha)} := (T^\alpha x_1, T^\alpha x_2)_H \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T^\alpha)$$

und der Norm

$$\|x\|_{\mathcal{D}(T^\alpha)} := \|T^\alpha x\|_H \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(T^\alpha)$$

ein Hilbertraum.

A.34 Definition. *a) Ein linearer Operator $T : H \supset \mathcal{D}(T) \longrightarrow H$ heißt* ***dicht definiert*** *in H, falls $D(T)$ dicht in H liegt, d.h.*

$$\overline{\mathcal{D}(T)} = H$$

b) Ein linearer Operator $T : H \supset \mathcal{D}(T) \longrightarrow H$ heißt ***abgeschlossen****, falls*

$$\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(T) \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_n = x \in H \text{ und } \lim_{n\to\infty} Tx_n = y \in H : \ x \in \mathcal{D}(T) \text{ und } Tx = y$$

A.35 Definition. *Sei $T : H \supset \mathcal{D}(T) \longrightarrow H$ ein linearer und dicht-definierter Operator.*
a) Die Abbildung $T^* : H \supset \mathcal{D}(T^*) \longrightarrow H$ mit dem Definitionsbereich

$$\mathcal{D}(T^*) := \{y \in H \mid x \longmapsto (Tx, y)_H \text{ ist stetig auf } \mathcal{D}(T)\}$$

heißt zu T ***adjungierter*** *(oder* ***dualer****)* ***Operator*** *und erfüllt die Eigenschaft*

$$(Tx, y)_H = (x, T^*y)_H \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(T)\ \forall\, y \in \mathcal{D}(T^*)$$

b) Die Abbildung T heißt ***selbstadjungiert****, falls $T = T^*$.*

Ein selbstadjungierter Operator eines Hilbertraums H ist stets dicht definiert, symmetrisch und abgeschlossen, aber nicht notwendigerweise stetig. Falls T ein symmetrischer und dicht definierter Operator ist, so ist T selbstadjungiert.

A.36 Definition. *Sei $T : H \supset \mathcal{D}(T) \longrightarrow H$ ein dicht definierter Operator. Dann definieren wir die* ***Resolventenmenge*** *von T durch*

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, \lambda I - T : \mathcal{D}(T) \longrightarrow H \text{ ist bijektiv und } (\lambda I - T)^{-1} \text{ existiert und ist beschränkt}\}$$

und das ***Spektrum*** *von T durch*

$$\sigma(T) := \mathbb{C}\backslash\rho(T)$$

Die Resolventenmenge eines dicht definierten Operators ist offen und das zugehörige Spektrum abgeschlossen (siehe: [35] Satz VII.2.15). Für beschränkte Operatoren ist das Spektrum nichtleer und kompakt, wohingegen das Spektrum für unbeschränkte Operatoren nicht notwendig kompakt sein muss. Weiter ist das Spektrum eines selbstadjungierten Operators reell (siehe: [35] Satz VII.2.16), d.h. $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$, und kann zudem unbeschränkt sein.

A.37 Definition. *Ein linearer, abgeschlossener, dicht definierter Operator $T : H \supset \mathcal{D}(T) \longrightarrow H$ heißt* ***sektoriell****, falls*

$$\text{(1): } \exists\, \phi \in]\frac{\pi}{2}, \pi[\ \exists\, M \geqslant 1\ \exists\, a \in \mathbb{R} : \ S_{a,\phi} := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\arg(\lambda + a)| \leqslant \phi,\ \lambda \neq -a\} \subset \rho(T)$$

$$\text{(2): } \|(\lambda I - T)^{-1}\|_H \leqslant \frac{M}{|\lambda - a|} \quad \forall\, \lambda \in S_{a,\phi}$$

Dabei bezeichnet man die Menge $S_{a,\phi}$ als ***Sektor****.*

Falls T ein (auf einem Hilbertraum H definierter) selbstadjungierter, dicht definierter und nach unten beschränkter Operator ist, so ist T sektoriell (siehe: [14] Seite 19).

A.38 Satz (Interpolationsabschätzung). *Sei $T : H \supset \mathcal{D}(T) \longrightarrow H$ ein sektorieller Operator und $\alpha = \beta\theta + (1-\theta)\gamma$ mit $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, $\beta \geqslant 0$ und $\gamma \geqslant 0$. Dann gibt es eine Konstante $C > 0$, so dass die Abschätzung*

$$\|T^\alpha x\|_H \leqslant C\|T^\beta x\|_H^\theta \|T^\gamma x\|_H^{1-\theta}$$

gilt.

Beweis. siehe: [14] 1.4 Exer.5 □

Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \leqslant 3)$ ein beschränktes Gebiet mit polygonalem Rand $\partial\Omega$. Betrachte den negativen Laplace-Operator

$$A := -\triangle : \; L^2(\Omega) \supset \mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \longrightarrow R(A) = L^2(\Omega) \text{ mit } u(x) \longmapsto -\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x)$$

auf dem Hilbertraum $L^2(\Omega)$. So erfüllt dieser gewisse Eigenschaften:
a) Die Abbildung A ist als Differentialoperator offensichtlich linear, d.h. für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $u, v \in L^2(\Omega)$ gilt

$$A(\alpha u + \beta v) \;=\; \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(\alpha u(x) + \beta v(x)) \;=\; \alpha \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x) + \beta \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} v(x) \;=\; \alpha A u + \beta A v$$

b) Weiter ist der Operator A unbeschränkt auf $L^2(\Omega)$. Als Gegenbeispiel für die Beschränktheit im eindimensionalen Fall betrachte man für beliebiges $k \in \mathbb{R}$

$$\|A e^{-kx}\|_{L^2} \;=\; \|\frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{-kx}\|_{L^2} \;=\; k^2 \|e^{-kx}\|_{L^2}$$

c) Der Definitionsbereich, der Bildbereich und der Nullraum von A sind gegeben durch

$$\mathcal{D}(A) \;=\; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),\; R(A) \;=\; L^2(\Omega) \text{ und } N(A) \;=\; \{0\}$$

Damit ist A nach Lemma A.23 invertierbar mit Inverser $A^{-1} : R(A) = L^2(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}(A)$. Desweiteren ist A auf $\mathcal{D}(A)$ ein linearer und beschränkter Operator.
d) Der Operator A ist nach der Greenschen-Formel A.40 und der Nullrandbedingung symmetrisch

$$(Au, v)_{L^2} \;=\; (-\triangle u, v)_{L^2} \;=\; (\nabla u, \nabla v)_{L^2} \;=\; (u, -\triangle v)_{L^2} \;=\; (u, Av)_{L^2} \quad \forall\, u, v \in \mathcal{D}(A)$$

e) Desweiteren ist A nach der Greenschen-Formel A.40, der Nullrandbedingung und der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung A.12 positiv

$$(Au, u)_{L^2} \;=\; (-\triangle u, u)_{L^2} \;=\; (\nabla u, \nabla u)_{L^2} \;=\; \|\nabla u\|_{L^2}^2 \;=\; |u|_{H^1}^2 \;\geqslant\; C\|u\|_{L^2}^2 \quad \forall\, u \in \mathcal{D}(A)$$

f) Der Operator A ist wegen des Sobolevschen Einbettungssatzes A.16(2) in $L^2(\Omega)$ dicht definiert

$$\mathcal{D}(A) \;=\; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset\subset H_0^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega) \;\Longrightarrow\; \overline{\mathcal{D}(A)} \;=\; \overline{H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)} \;=\; L^2(\Omega)$$

g) Weiter ist A wegen der Vertauschbarkeit der Differentiation und Limesbildung abgeschlossen: Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(A)$ mit $\lim_{n\to\infty} u_n = u \in L^2(\Omega)$ und $\lim_{n\to\infty} Au_n = v \in L^2(\Omega)$, so gilt

$$Au \;=\; -\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x) \;=\; -\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \lim_{n\to\infty} u_n(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} -\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u_n(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} Au_n(x) \;=\; v$$

und folglich gilt $u \in \mathcal{D}(A)$.
h) Da A ein symmetrischer und dicht definierter Operator ist, ist A folglich selbstadjungiert.
i) Es lässt sich auch zeigen, dass A^{-1} kompakt ist ([2] 8.14), was uns die Anwendung des Spektralsatzes ermöglicht.
j) Um die Theorie auch für sektorielle Operatoren zu gewährleisten, können wir auch zeigen, dass A sektoriell ist. Dazu siehe auch [12] Sec.6-7, [14] 1.3 Exer.(5), 1.3 Ex.(7)* oder 1.6 bzw. [34] Chap.6. □

Da wir im praktischen Teil der Ausarbeitung den kleinsten Eigenwert des Operators A benötigen, veranschaulichen wir im nächsten Beispiel exemplarisch die Berechnung der Eigenwerte und Eigenfunktionen von $A = -\triangle$.

Beispiel. (1): Der Einfachheit halber betrachten wir ein rechteckiges Gebiet, d.h.

$$\Omega =]a,b[\times]c,d[\quad \text{mit } a,b,c,d \in \mathbb{R} \text{ und } a<b,\ c<d$$

Wir suchen nun diejenigen Eigenfunktionen φ_k und Eigenwerte λ_k, die für jedes $k = 1,2,3,\ldots$ das Eigenwertproblem (bzw. die **Helmholtz-Gleichung**)

$$\begin{aligned} A\varphi_k(x) &= \lambda_k \varphi_k(x) \quad &, x \in \Omega \\ \varphi_k(x) &= 0 &, x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

mit Dirichlet-Nullrandbedingung lösen. Der Ansatz hierbei lautet

$$\varphi_k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \sin(m\pi \frac{1}{b-a}(x-a)) \sin(n\pi \frac{1}{d-c}(y-c))$$

wobei $k,m,n = 1,2,3,\ldots$ und

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
(m,n)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(1,3)$	$(3,1)$	$(2,3)$	$(3,2)$	$(1,4)$	$(4,1)$	$\cdots$

Tabelle A.1.: Indizierung von Eigenfunktionen und Eigenwerten im Zweidimensionalen

Dass φ_k tatsächlich die Helmholtz-Gleichung löst, lässt sich leicht überprüfen

$$\begin{aligned} A\varphi_k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= -\frac{d^2}{dx^2}\left(\sin(m\pi \frac{1}{b-a}(x-a)) \sin(n\pi \frac{1}{d-c}(y-c))\right) \\ &\quad - \frac{d^2}{dy^2}\left(\sin(m\pi \frac{1}{b-a}(x-a)) \sin(n\pi \frac{1}{d-c}(y-c))\right) \\ &= \left(\frac{m^2\pi^2}{(b-a)^2} + \frac{n^2\pi^2}{(d-c)^2}\right) \sin(m\pi \frac{1}{b-a}(x-a)) \sin(n\pi \frac{1}{d-c}(y-c)) \\ &= \lambda_k \varphi_k \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beachte, dass die Eigenwerte λ_k vom Gebiet Ω abhängen. Es bleibt die Nullrandbedingung zu überprüfen

$$\begin{aligned} \varphi_k \begin{pmatrix} x \\ c \end{pmatrix} &= \varphi_k \begin{pmatrix} x \\ d \end{pmatrix} = 0 \\ \varphi_k \begin{pmatrix} a \\ y \end{pmatrix} &= \varphi_k \begin{pmatrix} b \\ y \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Damit haben wir die Eigenwerte λ_k und die (noch nicht normierten) Eigenfunktionen φ_k von A gefunden.
(2): Dieselbe Vorgehensweise für das eindimensionales Gebiet

$$\Omega =]a,b[\quad \text{mit } a,b \in \mathbb{R} \text{ und } a<b$$

und dem Ansatz für die Eigenfunktionen

$$\varphi_k(x) := \sin(k\pi \frac{1}{b-a}(x-a))$$

liefert uns die Eigenwerte

$$\lambda_k := \frac{k^2\pi^2}{(b-a)^2}$$

(3): Auch im Fall eines dreidimensionalen quaderförmigen Gebiets

$$\Omega =]a,b[\times]c,d[\times]e,f[\quad \text{mit } a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R} \text{ und } a<b,\ c<d,\ e<f$$

und dem Ansatz für die Eigenfunktionen

$$\varphi_k \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \sin(l\pi\frac{1}{b-a}(x-a))\sin(m\pi\frac{1}{d-c}(y-c))\sin(n\pi\frac{1}{f-e}(z-e))$$

erhalten wir mithilfe einer ähnlichen Tabelle wie in Beispiel (1) die Eigenwerte

$$\lambda_k := \frac{l^2\pi^2}{(b-a)^2} + \frac{m^2\pi^2}{(d-c)^2} + \frac{n^2\pi^2}{(f-e)^2}$$

□

A.3.e. Differentiation linearer und nichtlinearer Operatoren

A.39 Definition. *Es seien $(X, \|\bullet\|_X)$ und $(Y, \|\bullet\|_Y)$ normierte Räume und $U \subset X$ eine offene Teilmenge. Ein Operator $T : U \longrightarrow Y$ heißt **Fréchet-differenzierbar** an der Stelle $\varphi \in U$, falls es einen beschränkten linearen Operator $dT(\varphi) : X \longrightarrow Y$ gibt, so dass*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\|h\|_X} \cdot \|T(\varphi+h) - T(\varphi) - dT(\varphi)h\|_Y = 0$$

*gilt. In diesem Fall nennen wir den Operator $dT(\varphi)$ die **Fréchet-Ableitung** von T an der Stelle φ. Existiert die Fréchet-Ableitung für alle $\varphi \in U$, so nennen wir die Abbildung $dT : U \longrightarrow L(X,Y)$ mit $\varphi \longmapsto dT(\varphi)$ die **Fréchet-Ableitung** von T auf U.*

A.4. Greensche Formel, Elementare Ungleichungen, Gronwall-Lemmata und Banachscher Fixpunktsatz

A.4.a. Greensche Formel

A.40 Satz (GREENSCHE FORMEL). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand und $d \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\int_\Omega u \cdot \triangle v \, dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot v \, dS \quad \forall\, u,v \in C^2(\overline{\Omega})$$

wobei $\frac{\partial v}{\partial \nu} = \nu \cdot \nabla v$ die äußere Normalenableitung von v in Richtung ν bezeichnet. Alternativ gilt diese Gleichung auch, wenn wir die Funktionen $u,v \in C^2(\overline{\Omega})$ durch $\forall\, v \in H^2(\Omega)$ und $\forall\, u \in H^1(\Omega)$ ersetzen.

Beweis. siehe [9] C.2 Theo.3. □

A.4.b. Elementare Ungleichungen

A.41 Satz (Cauchy-Schwarz-Ungleichung). *Sei H ein Hilbertraum mit Norm $\|.\|$ und Skalarprodukt $(.,.)$. Weiter seien $x, y \in X$, dann gilt die Ungleichung*

$$|(x,y)|^2 \leqslant (x,x)\cdot(y,y) = \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$$

Beweis. siehe [9] B.2.i. □

A.42 Satz (Allgemeine Minkowskische Ungleichung). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $d \in \mathbb{N}$. Weiter seien $p \in [1,\infty]$ und $f_j \in L^p(\Omega)$ für alle $j = 1,\dots,m$. Dann folgt $\sum_{j=1}^m f_j \in L^p(\Omega)$ und es gilt die Abschätzung*

$$\|\sum_{j=1}^m f_j\|_{L^p} \leqslant \sum_{j=1}^m \|f_j\|_{L^p}$$

Beweis. siehe [2] Lem.1.18 oder [9] B.2.f. □

A.43 Satz (Allgemeine Höldersche Ungleichung). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $d \in \mathbb{N}$. Weiter seien $p_j \in [1,\infty]$ mit $j = 1,\dots,m$ $(m \in \mathbb{N})$, $\frac{1}{r} := \sum_{j=1}^m \frac{1}{p_j}$ mit $\frac{1}{\infty} := 0$ und $f_j \in L^{p_j}(\Omega)$ für alle $j = 1,\dots,m$. Dann folgt $\prod_{j=1}^m f_j \in L^r(\Omega)$ und es gilt die Abschätzung*

$$\|\prod_{j=1}^m f_j\|_{L^r} \leqslant \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{L^{p_j}}$$

Beweis. siehe [2] Lem.1.16. □

A.4.c. Summationsformel und Summationsabschätzungen

A.44 Satz (Partielle Summationsformel). *Seien $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $(S_j)_{j\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen. Dann gilt*

$$\sum_{j=N+1}^m P_j(S_j - S_{j-1}) = (P_{m+1}S_m - P_{N+1}S_N) - \sum_{j=N+1}^m (P_{j+1} - P_j)S_j \quad \forall\, m \geqslant N+1$$

A.45 Satz (Verallgemeinerte Summationsabschätzung). *Seien $k > 0$ und $t_j := jk$ für $j \in \mathbb{N}_0$. Weiter seien $n \in \mathbb{N}_0$, $n_2 := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $\alpha \geqslant 0$ und $\beta > 0$. Dann gibt es eine Konstante $C = C(\alpha,\beta) > 0$, so dass die Abschätzungen*

$$(1)\!: k \cdot \sum_{j=1}^n t_{n-j+1}^{-1+\alpha} t_j^{-1+\beta} \leqslant C \cdot t_n^{-1+\alpha+\beta}$$

$$(2)\!: k \cdot \sum_{j=1}^{n_2} t_{n-j+1}^{-\alpha} t_j^{-1+\beta} \leqslant t_{n-n_2+1}^{-\alpha} \cdot k \cdot \sum_{j=1}^{n_2} t_j^{-1+\beta} \leqslant C \cdot t_n^{-\alpha+\beta}$$

gelten.

Beweis. siehe [16] Bew. v. Theo.5.3. □

A.4.d. Gronwall-Lemmata

A.46 Satz (Differentielles Gronwall-Lemma). *Sei $\varphi : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine in $[0,T]$ stetige und in $]0,T[$ einmal stetig-differenzierbare Funktion. Falls φ eine Abschätzung der Form*

$$\varphi'(t) \leqslant \alpha(t) + \beta(t) \cdot \varphi(t) \quad \forall\, t \in]0,T[$$

erfüllt, wobei $\alpha : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\beta : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ beide stetig in $[0,T]$ sind, so gilt die Ungleichung

$$\varphi(t) \leqslant \varphi(0) \cdot e^{\int_0^t \beta(\tau)\, d\tau} + \int_0^t e^{\int_s^t \beta(\tau)\, d\tau} \cdot \alpha(s)\, ds \quad \forall\, t \in [0,T]$$

Beweis. siehe [9] B.2.j. □

A.47 Satz (Integralform des Gronwall-Lemma). *Sei $\varphi : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine in $[0,T]$ stetige und in $]0,T[$ einmal stetig-differenzierbare Funktion. Falls φ eine Abschätzung der Form*

$$\varphi(t) \leqslant \alpha(t) + \int_0^t \beta(s) \cdot \varphi(s)\, ds \quad \forall\, t \in]0,T[$$

erfüllt, wobei $\alpha : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\beta : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ beide stetig in $[0,T]$ sind und β in $[0,T]$ nichtnegativ ist (d.h. $\beta(t) \geqslant 0\ \forall\, t \in [0,T]$), so gilt die Ungleichung

$$\varphi(t) \leqslant \alpha(t) + \int_0^t \alpha(s) \cdot \beta(s) \cdot e^{\int_s^t \beta(\tau)\, d\tau}\, ds \quad \forall\, t \in [0,T]$$

Beweis. siehe [3] □

A.48 Satz (Verallgemeinertes Gronwall-Lemma). *Sei $\varphi : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine in $[0,T]$ stetige und nichtnegative Funktion. Falls φ eine Abschätzung der Form*

$$\varphi(t) \leqslant A \cdot t^{-1+\alpha} + B \cdot \int_0^t (t-s)^{-1+\beta} \cdot \varphi(s)\, ds \quad \forall\, t \in]0,T]$$

erfüllt, wobei $A, B \geqslant 0$ und $\alpha, \beta > 0$ reelle Konstanten sind, so gibt es eine Konstante $C = C(B,T,\alpha,\beta) > 0$, so dass die Ungleichung

$$\varphi(t) \leqslant C \cdot A \cdot t^{-1+\alpha} \quad \forall\, t \in]0,T]$$

gilt. Bemerke: Die Konstante $C > 0$ ist exponentiell wachsend in T.

Beweis. siehe [18] Lem.1.4 oder [28] Lem.6.3 □

A.49 Satz (Verallgemeinertes diskretes Gronwall-Lemma). *Seien $k, T > 0$ fest und $\varphi : \{nk \mid n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } nk \leqslant T\} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft $0 \leqslant \varphi_n \leqslant R$ $\forall\, t_n \in [0,T]$, wobei $\varphi_n := \varphi(t_n)$ und $t_n := nk$. Falls φ_n eine Abschätzung der Form*

$$\varphi_n \leqslant A_1 t_n^{-1+\alpha_1} + A_2 t_n^{-1+\alpha_2} + Bk \cdot \sum_{j=1}^{n} t_{n-j+1}^{-1+\beta} \varphi_j \quad \forall\, t_n \in]0,T]$$

erfüllt, wobei $A_1, A_2, B \geqslant 0$ und $\alpha_1, \alpha_2, \beta > 0$ reelle Konstanten und $k > 0$ der zeitliche Diskretisierungsparameter sind, so gibt es zwei Konstanten $k_0 = k_0(R,B,\beta) > 0$ und $C = C(B,T,\alpha_1,\alpha_2,\beta) > 0$, so dass die Ungleichung

$$\varphi_n \leqslant C(A_1 t_n^{-1+\alpha_1} + A_2 t_n^{-1+\alpha_2}) \quad \forall\, t_n \in]0,T]\ \forall\, k \in]0,k_0]$$

gilt. Bemerke: Die Konstante $C > 0$ ist exponentiell wachsend in T.

Beweis. siehe [28] Lemma 7.1. □

A.4.e. Banachscher Fixpunktsatz

A.50 Definition. *i) Eine Abbildung Φ, die eine Menge M in sich selbst abbildet, heißt* ***Selbstabbildung*** von M.
ii) Sei (M, d) ein metrischer Raum. Eine Selbstabbildung $\Phi : M \longrightarrow M$ heißt ***Kontraktion***, ***kontraktiv*** oder ***kontrahierend*** *auf M, falls es eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $0 \leqslant \lambda < 1$ gibt, so dass für alle $x, y \in M$ die Lipschitz-Bedingung*

$$d(\Phi(x), \Phi(y)) \leqslant \lambda \cdot d(x, y)$$

gilt. λ bezeichnet man in diesem Fall als ***Kontraktionsfaktor***.
iii) Sei (M, d) ein metrischer Raum und $\Phi : M \longrightarrow M$ eine Selbstabbildung. Ein Punkt $x \in M$ heißt ***Fixpunkt*** von Φ, *falls $\Phi(x) = x$ gilt.*

Da eine Kontraktion den Abstand zwischen Punkten verringert, liegt der Gedanke nahe, dass kontrahierende Abbildungen Fixpunkte besitzen. Dazu muss der metrische Raum allerdings vollständig sein.

A.51 Satz (BANACHSCHER FIXPUNKTSATZ). *Sei (M, d) ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum und $\Phi : M \longrightarrow M$ eine Kontraktion auf M. Dann besitzt Φ genau einen Fixpunkt $x \in M$, d.h. $\Phi(x) = x$.*

Beweis. siehe [9] 9.2.1.Theo.1 oder [13] Satz 7.1 □

A.5. Bilinearformen, elliptische Regularität und Finite-Elemente-Räume

A.5.a. Eigenschaften von Bilinearformen

A.52 Definition. *Sei $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform auf einem Hilbertraum H und G ein linearer Unterraum von H.*
i) a heißt ***symmetrisch***, *falls*

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall\, u, v \in H$$

ii) a heißt ***stetig***, *falls*

$$\exists\, \alpha_\infty \in \mathbb{R}_+^* : \ |a(u, v)| \leqslant \alpha_\infty \cdot \|u\|_H \cdot \|v\|_H \quad \forall\, u, v \in H$$

iii) a heißt ***G-elliptisch*** *oder kurz* ***elliptisch*** *oder* ***koerziv***, *falls*

$$\exists\, \alpha_0 \in \mathbb{R}_+^* : \ a(w, w) \geqslant \alpha_0 \cdot \|w\|_H \quad \forall\, w \in G$$

Man bezeichnet hierbei α_∞ als **Stetigkeitskonstante** und α_0 als **Elliptizitätskonstante** von a.

Beispiel. Betrachte für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d \in \mathbb{N}$) mit Lipschitz-Rand oder konvexen polygonalen Rand die Abbildung

$$a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \ \text{ mit } \ a(u, v) := (\nabla u, \nabla v)_{L^2}$$

auf dem Hilbertraum $H^1(\Omega)$. Dann ist a eine stetige, symmetrische und H_0^1-elliptische Bilinearform auf $H^1(\Omega)$. Die Bilinearformeigenschaften und die Symmetrie sind klar. Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung A.41 folgt die Stetigkeit

$$|a(u, v)| = |(\nabla u, \nabla v)_{L^2}| \leqslant \|\nabla u\|_{L^2} \cdot \|\nabla v\|_{L^2} = |u|_{H^1} \cdot |v|_{H^1} \leqslant \|u\|_{H^1} \cdot \|v\|_{H^1}$$

mit $\alpha_\infty = 1$. Mithilfe der Poincaré-Friedrichs-Ungleichung A.12 folgt

$$\|u\|_{H^1}^2 \;=\; |u|_{H^1}^2 + \|u\|_{L^2}^2 \;\leqslant\; |u|_{H^1}^2 + C \cdot |u|_{H^1} \;=\; (1+C) \cdot |u|_{H^1}^2$$

und daraus erhalten wir die H_0^1-Elliptizität von a

$$a(u,u) \;=\; (\nabla u, \nabla u)_{L^2} \;=\; \|\nabla u\|_{L^2}^2 \;=\; |u|_{H^1} \;\geqslant\; \alpha_0 \cdot \|u\|_{H^1}^2$$

mit $\alpha_0 = (1+C)^{-1}$ und C aus der Pioncaré-Friedrichs-Ungleichung A.12. □

A.5.b. Elliptische Regularität

A.53 Definition. *Sei $H_0^k(\Omega) \subset V \subset H^k(\Omega)$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $a(.,.)$ eine V-elliptische Bilinearform. Das Variationsproblem*

$$a(u,v) \;=\; (f,v)_{L^2} \quad \forall\, v \in V$$

*heißt H^s**-regulär**, falls es erstens zu jedem $f \in H^{s-2k}(\Omega)$ eine Lösung $u \in H^s(\Omega)$ des Variationsproblems gibt und zweitens eine Konstante $C = C(\Omega, a, s) > 0$ gibt, so dass die Ungleichung*

$$\|u\|_{H^s} \;\leqslant\; \|f\|_{H^{s-2k}}$$

erfüllt ist.

A.54 Satz (ELLIPTISCHER REGULARITÄTSSATZ). *Sei a eine H_0^1-elliptische Bilinearform und $f \in L^2(\Omega)$. Dann gelten folgende Aussagen:*

(1): Das Variationsproblem

$$a(u,v) \;=\; (f,v)_{L^2} \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

besitzt genau eine Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$.

(2): Ist $\partial\Omega$ glatt (d.h. C^2-Rand) oder ein konvexes Polygon, so folgt sogar $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ und es gilt:

$$\exists\, C > 0 : \; \|u\|_{H^2} \;\leqslant\; C \cdot \|f\|_{L^2}$$

Beweis. siehe [7] oder [10] □

A.5.c. Finite-Elemente-Räume

A.55 Definition. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 1,2,3)$ ein polygonales Gebiet. Eine Zerlegung $\mathcal{T} = \{T_1, \ldots, T_M\}$ von Ω heißt **Triangulierung**, falls die Eigenschaften*

(1): $T_i \subset \Omega$ ist ein offenes d-Simplex-Element $\quad \forall\, i = 1, \ldots, M$

(2): $T_i \cap T_j \;=\; \emptyset \quad \forall\, i,j = 1,\ldots,M$ mit $i \neq j$

(3): $\overline{\Omega} \;=\; \bigcup_{i=1}^{M} \overline{T_i}$

erfüllt sind.

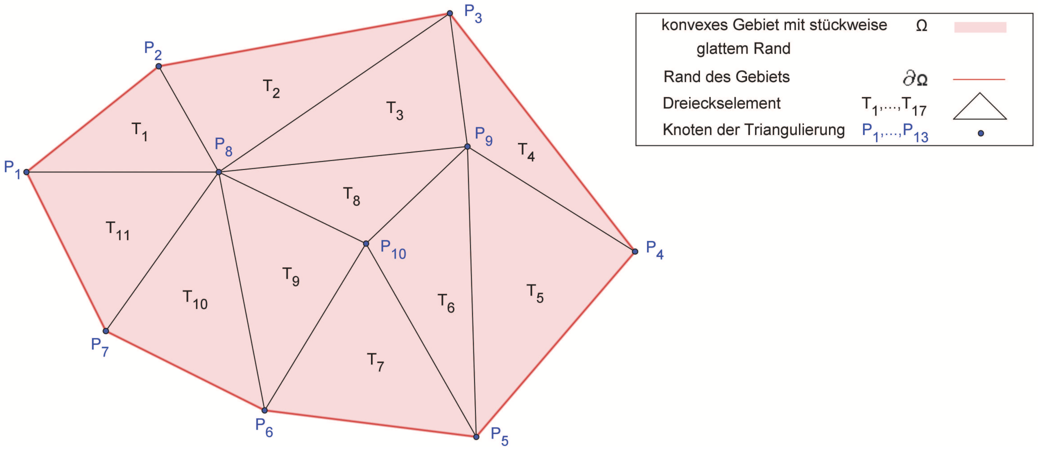


Abbildung A.1.: Triangulierung eines zweidimensionalen Gebiets

A.56 Definition. *a) Eine Triangulierung $\mathcal{T}$ von $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 1, 2, 3)$ heißt **zulässig** (oder **regulär** bzw. **konform**), falls für $\overline{T_i} \cap \overline{T_j}$ mit $i, j \in \{1, \ldots, M\}$ und $i \neq j$ genau eine der folgenden Eigenschaften gilt:*

(1): $\overline{T_i} \cap \overline{T_j} = \emptyset$

(2): $\overline{T_i} \cap \overline{T_j}$ *ist ein gemeinsamer Eckpunkt von* T_i *und* T_j

Falls $d = 2$ ist, so muss eine der Eigenschaften (1), (2) oder

(3): $\overline{T_i} \cap \overline{T_j}$ *ist eine gemeinsame Kante von* T_i *und* T_j

gelten. Falls $d = 3$ ist, so muss eine der Eigenschaften (1), (2), (3) oder

(4): $\overline{T_i} \cap \overline{T_j}$ *ist eine gemeinsame Seitenfläche von* T_i *und* T_j

gelten.
b) Falls jedes Element T_i $(i = 1, \ldots, M)$ einer regulären Triangulierung $\mathcal{T}$ eine maximale Kantenlänge von höchstens $h > 0$ besitzt, d.h.

$$\operatorname{diam}(T_i) \leqslant h \quad \forall\, i = 1, \ldots, M$$

so schreiben wir $\mathcal{T}_h$ anstelle von $\mathcal{T}$ und $T_{h,i}$ anstelle von T_i.
*c) Eine Familie von regulären Triangulierungen $\{\mathcal{T}_h \mid h \in I\}$ mit Indexmenge I heißt **uniform**, falls es eine Zahl $\delta > 0$ gibt, so dass für jedes $h \in I$ und für jedes d-Simplex-Element T, eine d-dimensionale Kugel mit Radius $\rho_T \geqslant \frac{h}{\delta}$ gibt, die in T enthalten ist.*

A.5.d. Elliptische Eigenwerttheorie

A.57 Satz. *Seien λ_j bzw. λ_{hj} die j-ten Eigenwerte der kontinuierlichen*

$$\begin{aligned} A\varphi_j(x) &= \lambda_j \varphi_j(x) \qquad , x \in \Omega \quad \forall\, j = 1, \ldots, \infty \\ \varphi_j(x) &= 0 \qquad\qquad , x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

bzw. semidiskreten Helmholtz-Gleichung

$$\begin{aligned} A_h\varphi_{hj}(x) &= \lambda_{hj} \varphi_{hj}(x) \qquad , x \in \Omega \quad \forall\, j = 1, \ldots, N_h \\ \varphi_{hj}(x) &= 0 \qquad\qquad , x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

wobei $A = -\triangle$ und $A_h = -\triangle_h$ den kontinuierlichen bzw. diskreten negativen Laplace-Operator bezeichnet und $\dim(\mathcal{V}_h) = N_h$ ist. Dann gilt:

$$\exists\, C > 0 \;\wedge\; \exists\, h_0 = h_0(j) > 0 : \; \lambda_j \leqslant \lambda_{hj} \leqslant \lambda_j + Ch^2 \quad \forall\, 0 < h \leqslant h_0$$

Beweis. siehe [31] Theo.6.7 □

A.6. Grundbegriffe dynamischer Systeme

Wir werden einige Grundbegriffe zum Langzeitverhalten dynamischer Systeme einführen ([27], [32], [33]). Alle folgenden Resultate werden speziell für $(\Phi, \mathbb{T}_+, V) = (S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ und $(\Phi, \mathbb{T}_+, X) = (S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ benötigt, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein konvexes polygonales Gebiet der Dimension $d = 1, 2$ oder 3 ist.

A.6.a. Das dynamische System

A.58 Definition. *a) Sei $(\mathbb{T}, +)$ eine Gruppe (üblicherweise die Zeitachse) mit $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$, neutralem Element $0 \in \mathbb{T}$ (z.B. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{T} = n\mathbb{Z}$ mit $0 \neq n \in \mathbb{R}$) und V ein Hilbertraum (i.a. nur ein metrischer Raum). Ein **dynamisches System** $(\Phi, \mathbb{T}, V)$ (kurz: Φ) ist eine stetige Abbildung $\Phi : \mathbb{T} \times V \longrightarrow V$ mit den zwei Eigenschaften*

$$\Phi(0)x = x \quad \forall\, x \in V \tag{A.1}$$

und

$$\Phi(t_1 + t_2)x = \Phi(t_2)(\Phi(t_1)x) \quad \forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{T}\, \forall\, x \in V \tag{A.2}$$

*Hierbei nennen wir (A.1) die **Anfangswerteigenschaft** und (A.2) die **Kozykluseigenschaft**.*
*b) Eine Abbildung $\Phi : \mathbb{T}_+ \times V \longrightarrow V$ mit $\mathbb{T}_+ := \{t \in \mathbb{T} \mid t \geqslant 0\}$, die (A.1) und (A.2) für jedes $t_1, t_2 \in \mathbb{T}_+$ und für jedes $x \in V$ erfüllt, heißt **semidynamisches System**. Falls $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{T}_+ = \mathbb{R}_+$) ist, so nennen wir das System $(\Phi, \mathbb{T}, V)$ (bzw. $(\Phi, \mathbb{T}_+, V)$) **kontinuierlich**. Falls $X \subset V$ ein Teilraum ist und $(\Phi, \mathbb{T}, X)$ (bzw. $(\Phi, \mathbb{T}_+, X)$) ein dynamisches (bzw. semidynamisches) System beschreibt, so nennen wir dieses System **semidiskret**. Falls zusätzlich $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{T}_+ \subset \mathbb{R}_+$) ist, so nennen wir das System $(\Phi, \mathbb{T}, X)$ (bzw. $(\Phi, \mathbb{T}_+, X)$) **diskret**.*
*c) Wir bezeichnen V als **Zustandsraum**. Weiter bezeichnen wir für jedes feste $x \in V$ die Abbildung $\Phi(t)x$ als **Lösung**, **Trajektorie**, **Lösungskurve** oder **Orbit** durch x. Den Wert x nennen wir hierbei **Anfangswert** oder - im Falle, dass V ein Funktionenraum ist - **Anfangswertfunktion**.*

Unter dem Begriff *dynamisch* lässt sich verstehen, dass es sich um ein mathematisches Objekt handelt, das zeitliche Veränderungen eines Zustandes beschreibt. Es ist hierbei von grundlegender Bedeutung, dass alle Lösungen mindestens in eine Intervallrichtung global existieren. Kommen wir nun zur Definition der invarianten Mengen ([27] Kap.10, [32] Def.2.8).

A.59 Definition. *Es sei $(\Phi, \mathbb{T}, V)$ ein (semi-)dynamisches System. Für eine Teilmenge $D \subseteq V$ definieren wir die **Menge aller Lösungstrajektorien** mit Anfangswerten aus D als*

$$\Phi(t)D := \bigcup_{x \in D} \Phi(t)x$$

*a) Eine Teilmenge $D \subseteq V$ heißt **vorwärts** (oder: **positiv**) **invariant**, falls die Inklusion*

$$\Phi(t)D \subseteq D \quad \forall\, t \geqslant 0$$

gilt.
*b) Eine Teilmenge $D \subseteq V$ heißt **rückwärts** (oder: **negativ**) **invariant**, falls die Inklusion*

$$\Phi(t)D \supseteq D \quad \forall\, t \geqslant 0$$

gilt.
*c) Eine Teilmenge $D \subseteq V$ heißt **invariant**, falls sie vorwärts und rückwärts invariant ist, also die Inklusion*

$$\Phi(t)D = D \quad \forall\, t \geqslant 0$$

gilt.

Bei invarianten Mengen handelt es sich um spezielle Mengen, die von den Lösungen nicht verlassen werden können. Eine invariante Menge D besitzt darüber hinaus die Eigenschaft, dass sie sich unter der Abbildung $\Phi(t)\bullet$ nicht weiter verkleinert. Weiter benötigen wir noch einen geeigneten Abstandsbegriff, der uns den Abstand zwischen einem Punkt und einer Menge sowie den Abstand zwischen zwei Mengen angibt ([27] Kap.10.3.2, [32] 2.3).

A.60 Definition. *Sei $D \subseteq V$ eine nichtleere Menge.*
a) Dann definieren wir den Abstand eines Punktes $x \in V$ von D durch

$$dist(x, D) := \inf_{y\in D} \|x - y\|_V$$

*b) Sei $E \subseteq H$ eine weitere Menge. Wir definieren den **nichtsymmetrischen Hausdorff-Abstand** zwischen E und D durch*

$$d_{NH}(E, D) := \sup_{x\in E} dist(x, D) \; = \; \sup_{x\in E}\{\inf_{y\in D} \|x - y\|_V\}$$

*c) Weiter definieren wir den **symmetrischen Hausdorff-Abstand** zwischen E und D durch*

$$d_{SH}(E, D) := \max\{d_{NH}(E, D), d_{NH}(D, E)\}$$

Es sei vermerkt, dass es sich bei dem nichtsymmetrischen Hausdorff-Abstand $\mathrm{d_{NH}}$ um keine Metrik handelt, denn es gilt nur

$$\mathrm{d_{NH}}(E, D) \; = \; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad E \subset D$$

Der symmetrische Hausdorff-Abstand $\mathrm{d_{SH}}$ hingegen verkörpert eine Metrik, d.h. es gilt

$$\mathrm{d_{SH}}(E, D) \; = \; 0 \quad \Longleftrightarrow \quad E \; = \; D$$

Insbesondere erfüllt $\mathrm{d_{NH}}$ die **Dreiecksungleichung**

$$\mathrm{d_{NH}}(E, D) \; \leqslant \; \mathrm{d_{NH}}(E, F) + \mathrm{d_{NH}}(F, D)$$

und daher auch die **umgekehrte Dreiecksungleichung**

$$\mathrm{d_{NH}}(E, F) \; \geqslant \; \mathrm{d_{NH}}(E, D) - \mathrm{d_{NH}}(F, D)$$

Als Beispiel für die Abstandsdefinitionen betrachten wir $V = \mathbb{R}$, $E = [-1, 1]$ und $D = \{0\}$. Dann ist $\mathrm{d_{NH}}(E, D) = 1$, $\mathrm{d_{NH}}(D, E) = 0$ und $\mathrm{d_{SH}}(D, E) = 1$.

A.6.b. Dissipative dynamische Systeme

Zur Analyse der Beschränktheit aller möglichen Lösungen, führen wir den Begriff der absorbierenden Menge ein ([27] Def.10.2, [32] Def.2.13).

A.61 Definition. *Es sei $(\Phi, \mathbb{T}, V)$ ein (semi-)dynamisches System. Eine beschränkte Menge $\emptyset \neq B \subset V$ heißt **gleichmäßig absorbierende Menge** in V, falls es zu jeder beschränkten Menge $E \subset V$ ein $t_0 = t_0(E) > 0$ gibt, so dass die Inklusion*

$$\Phi(t)E \; \subseteq \; B \quad \forall\, t \geqslant t_0$$

gilt.

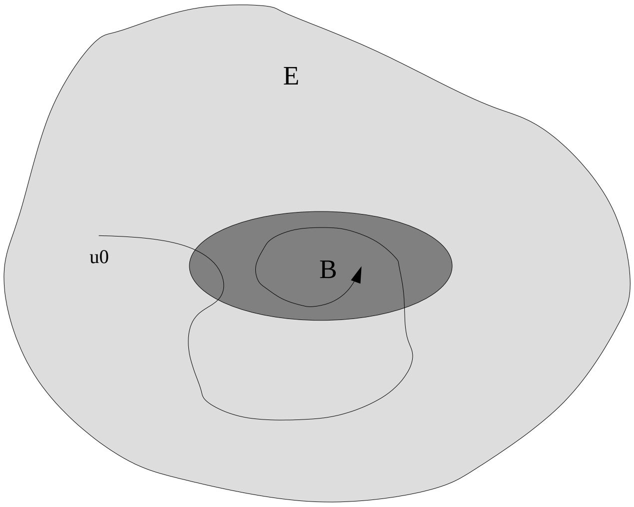


Abbildung A.2.: Absorbierende Menge

Falls eine absorbierende Menge existiert, so gehört das (semi-)dynamische System einer besonderen Klasse dynamischer Systeme an, den sogenannten *dissipativen* (semi-)dynamischen Systemen ([27] Def.10.2, [32] Def.2.13).

A.62 Definition. *Ein (semi-)dynamisches System $(\Phi, \mathbb{T}, V)$ heißt* ***dissipativ****, falls eine absorbierende Menge $B \subset V$ existiert.*

A.6.c. Attraktoren und Limes-Mengen dynamischer Systeme

Wir kommen als nächstes zur Definiton des globalen Attraktors eines (semi-)dynamischen Systems ([32] Def.7.1). Auch diese Definition werden wir speziell für $\Phi = S$ (bzw. $\Phi = S_h$), $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+$, $V = H_0^1(\Omega)$ (bzw. $V = \mathcal{V}_h$) und der Norm $\|.\|_{H^1}$ anwenden.

A.63 Definition. *Es sei $(\Phi, \mathbb{T}, V)$ ein (semi-)dynamisches System.*
a) Eine Menge $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset V$ heißt ***gleichmäßig anziehend*** *(oder:* ***gleichmäßig attraktiv****) bezüglich Φ, falls es eine offene (und beschränkte) Umgebung $B \subset V$ von $\mathcal{A}$ gibt, so dass die Bedingung*

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, t^* = t^*(\varepsilon) \geqslant 0\; \forall\, t \geqslant t^* :\; d_{NH}(\Phi(t)B, \mathcal{A}) \;\leqslant\; \varepsilon$$

erfüllt ist. In diesem Fall schreiben wir

$$\lim_{t\to\infty} d_{NH}(\Phi(t)B, \mathcal{A}) \;=\; 0$$

b) Eine Menge $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset V$ heißt ***Attraktor*** *von Φ, falls die Bedingungen*

(1): $\mathcal{A}$ ist kompakt (in V)

(2): $\mathcal{A}$ ist invariant (unter Φ)

(3): $\mathcal{A}$ zieht eine offene Umgebung $B \supset \mathcal{A}$ gleichmäßig an

gelten. Die größte offene Menge B, die die Eigenschaft (3) erfüllt, bezeichnen wir als ***Attraktorumgebung*** *von $\mathcal{A}$ bezüglich Φ.*
c) Eine Menge $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset V$ heißt ***globaler*** *(oder:* ***universeller****)* ***Attraktor*** *von Φ, falls die Bedingungen*

(1): $\mathcal{A}$ ist ein Attraktor von Φ

(2): $\mathcal{A}$ zieht jede beschränkte Menge $B \subset V$ gleichmäßig an

erfüllt sind. In diesem Fall sagen wir auch, dass $\mathcal{A}$ bezüglich Φ eine ***unendliche Attraktorumgebung*** *besitzt und bezeichnen diese mit V.*

Wir wollen nun ein Kochrezept zur Konstruktion einer gleichmäßig anziehenden Menge für das (semi-) dynamische System finden. Dazu führen wir die Limes-Mengen aus der Standardtheorie dynamischer Systeme ein ([27] Kap.10.3, [32] Def.2.10, [33] Kap.I.1.1). Wir werden sehen, dass uns die ω-Limes-Menge der gleichmäßig absorbierenden Menge unter einer zusätzlichen relativen Kompaktheitsbedingung eine gleichmäßig anziehende Menge mit einigen wünschenswerten Eigenschaften liefert.

A.64 Definition. *Sei $(\Phi, \mathbb{T}, V)$ ein (semi-)dynamisches System.*
a) Für einen Punkt $x \in V$ bezeichnen wir die Menge

$$\begin{aligned}\omega(x) \, := & \, \{y \in V \mid \exists\, (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T} \text{ mit } t_n \to \infty : \; \Phi(t_n)x \to y\} \\ = & \bigcap_{t\geqslant 0} \overline{\bigcup_{s\geqslant t} \Phi(s)x}\end{aligned}$$

als ***ω-Limes-Menge*** *von x.*
b) Für eine Teilmenge $X \subset V$ bezeichnen wir die Menge

$$\begin{aligned}\omega(X) \, := & \, \{y \in V \mid \exists\, (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{T} \text{ mit } t_n \to \infty \, \wedge \, \exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X : \; \Phi(t_n)x_n \to y\} \\ = & \bigcap_{t\geqslant 0} \overline{\bigcup_{s\geqslant t} \Phi(s)X}\end{aligned}$$

als ***ω-Limes-Menge*** *von X.*

A.65 Bemerkung. *i) Für eine absorbierende Menge $B \subset V$ lässt sich die ω-Limes-Menge auch schreiben als ([27] (10.10))*

$$\omega(B) \, = \bigcap_{t\geqslant 0} \Phi(t)B$$

ii) Für eine Teilmenge $X \subset V$ gilt im allgemeinen nur ([32] 2.9)

$$\bigcup_{x\in X} \omega(x) \, \subset \, \omega(X)$$

Daher kann die ω-Limes-Menge $\omega(X)$ einer Menge X komplizierter sein, als lediglich die Vereinigung von Limes-Mengen $\omega(x)$ der einzelnen Punkte $x \in X$. Denn sie enthält nämlich insbesondere auch die heteroklinen und homoklinen Orbits, die verschiedene Limes-Mengen zu einzelnen Punkten miteinander verbinden. Daher erfasst sie in einem gewissen Sinne die ständig wiederkehrenden Dynamiken der in X startenden Trajektorien ([32]).

Wir kommen nun zu einigen begehrenswerten Eigenschaften der ω-Limes-Menge. Hierbei und im folgenden Verlauf ist die relative Kompaktheitseigenschaft von zentraler Bedeutung.

A.66 Satz. *Sei $(\Phi, \mathbb{T}, V)$ ein (semi-)dynamisches System und $\emptyset \neq C \subset V$ eine beliebige Teilmenge. Falls es ein $t_0 \geqslant 0$ gibt, so dass die Menge $\cup_{t\geqslant t_0} \Phi(t)C$ relativ kompakt in V ist, so gilt*

(1): $\omega(C)$ ist nicht-leer
(2): $\omega(C)$ ist kompakt (in V)
(3): $\omega(C)$ ist invariant (unter Φ)
(4): $\omega(C)$ ist zusammenhängend

Beweis. siehe [27] Prop.10.3 oder [32] Theo.2.11 □

Die ω-Limes-Menge ermöglicht es uns, alle denkbaren Verhaltensweisen eines (semi-)dynamischen Systems für große Zeiten einzufangen und geben uns daher genauere Informationen über die möglichen asymptotischen Dynamiken eines Systems. Desweiteren erfüllt die ω-Limes-Menge das folgende interessante Kriterium: Falls $D \in V$ eine beschränkte Menge und $D \subset C$ ist, so gilt $\omega(D) \subset \omega(C)$. Falls C eine absorbierende Menge ist, so gilt sogar $\omega(D) = \omega(C)$ ([27] Exer.10.6). Wir kommen jetzt zu dem Existenzsatz eines Attraktors, den wir speziell für $(S, \mathbb{R}_+, H_0^1(\Omega))$ und $(S_h, \mathbb{R}_+, \mathcal{V}_h)$ anwenden werden.

A.67 Satz (EXISTENZSATZ EINES ATTRAKTORS). *Sei $(\Phi, \mathbb{T}, V)$ ein (semi-)dynamisches System und $\emptyset \neq X \subset V$ eine beschränkte und offene Menge. Weiter gebe es ein $t_0 \geqslant 0$ mit den Eigenschaften $\Phi(t)\overline{X} \subset X \;\forall\, t \geqslant t_0$ und $\bigcup_{t \geqslant t_0} \Phi(t)X$ ist relativ kompakt (in V). Dann existiert ein Attraktor $\mathcal{A} := \omega(X) \subset V$, der die Menge X gleichmäßig anzieht. Weiter besitzt der Attraktor $\mathcal{A}$ die Darstellung*

$$\mathcal{A} = \omega(X) = \bigcap_{t \geqslant 0} \Phi(t)X$$

Falls darüber hinaus V zusammenhängend ist, so ist auch $\mathcal{A}$ zusammenhängend.

Beweis. siehe [32] Theo.7.3 □

Als nächstes kommen wir zu einem Resultat, dass uns für dissipative (semi-)dynamische Systeme einen globalen Attraktor liefert ([27] Theo.10.5, [32] Coro.7.4). Die Charakterisierung dieses globalen Attraktors erfolgt durch die ω-Limes-Menge der gleichmäßig absorbierenden Menge.

A.68 Korollar (EXISTENZSATZ EINES GLOBALEN ATTRAKTORS). *Sei $(\Phi, \mathbb{T}, V)$ ein dissipatives (semi-)dynamisches System und $\emptyset \neq B \subset V$ eine kompakte absorbierende Menge. Dann existiert ein globaler Attraktor $\mathcal{A} := \omega(B) \subset V$. Falls darüber hinaus V zusammenhängend ist, so ist auch $\mathcal{A}$ zusammenhängend.*

A.6.d. Lyapunov-Funktionale dynamischer Systeme und Struktur globaler Attraktoren

In diesem Abschnitt wollen wir die Struktur des globalen Attraktors aus Korollar A.68 in allen Einzelheiten untersuchen. Wir zeigen zunächst, dass der Attraktor aus allen vollständigen und beschränkten Orbits besteht. Anschließend werden wir sehen, dass der Attraktor die instabile Mannigfaltigkeit aller Gleichgewichtspunkte und periodischen Orbits enthält. Dies liefert uns eine genauere Vorstellung über die Art der zu erwartenden Dynamiken des Systems. Dazu klären wir zunächst, was wir unter einem Gleichgewichtspunkt eines (semi-)dynamischen Systems verstehen ([32] Def.4.1).

A.69 Definition. *Sei $(\Phi, \mathbb{T}, V)$ ein (semi-)dynamisches System.*
a) Es sei $x \in V$ derart, dass $\Phi(t)x$ für jedes $t \in \mathbb{T}$ existiert. Dann bezeichnen wir die Mengen

$$\mathcal{O}^+(x) := \{\Phi(t)x \mid t \geqslant 0\}\,,\;\; \mathcal{O}^-(x) := \{\Phi(t)x \mid t \leqslant 0\} \;\text{ bzw. }\; \mathcal{O}(x) := \{\Phi(t)x \mid t \in \mathbb{T}\}$$

als den ***positiven Orbit***, ***negativen Orbit*** *bzw.* ***vollständigen Orbit*** *von x. Falls ein $p > 0$ existiert mit*

$$\mathcal{O}^+(x) = \mathcal{O}^p(x) := \{\Phi(t)x \mid 0 \leqslant t \leqslant p\} \neq \{x\}$$

so nennen wir $\mathcal{O}^p(x)$ den ***periodischen Orbit*** *von x.*
b) Sei $x \in V$. $\mathcal{O}^+(x)$ heißt ***stabil***, *falls eine der folgenden äquivalenten Aussagen erfüllt ist*

(1): $\forall\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ *mit* $x_n \longrightarrow x : \; S(t)x_n \longrightarrow S(t)x \quad \forall\, t \geqslant 0$

(2): $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;\forall\, y \in V$ *mit* $\|x - y\|_V < \delta : \; \|S(t)x - S(t)y\|_V < \varepsilon$

$\mathcal{O}^+(x)$ heißt ***instabil****, falls $\mathcal{O}^+(x)$ nicht stabil ist. $\mathcal{O}^+(x)$ heißt* ***uniform asymptotisch stabil****, falls $\mathcal{O}^+(x)$ stabil ist und*

$$\exists\, V \supset W = \{y \in V \mid \|x-y\|_V < r\}\ \forall\, y \in W:\ \|S(t)y, S(t)x\|_V \longrightarrow 0 \text{ für } t \longrightarrow \infty$$

Oftmals sagt man auch anstelle von $\mathcal{O}^+(x)$, dass x stabil, instabil bzw. uniform asymptotisch stabil sei.
c) Ein Punkt $\overline{x} \in V$ heißt ***Gleichgewichtspunkt*** *(oder* ***Fixpunkt****) von Φ, falls*

$$\Phi(t)\overline{x} \;=\; \overline{x} \quad \forall\, t \geqslant 0 \quad (\text{d.h. } \mathcal{O}^+(\overline{x}) = \{\overline{x}\})$$

d) Wir definieren die ***Menge aller Gleichgewichtspunkte*** *durch*

$$\mathbb{G} \;:=\; \{\overline{x} \in V \mid \Phi(t)\overline{x} = \overline{x} \quad \forall\, t \in \mathbb{T}\}$$

e) Seien $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in \mathbb{G}$ mit $\overline{x_1} \neq \overline{x_2}$. Eine Trajektorie $\{\Phi(t)x \in V \mid t \in \mathbb{R} \wedge \Phi(t)x \text{ existiert für alle } t \in \mathbb{R}\}$ mit den Eigenschaften

$$\Phi(t)x \longrightarrow \overline{x_1} \quad \text{für} \quad t \longrightarrow -\infty \quad \text{und} \quad \Phi(t)x \longrightarrow \overline{x_2} \quad \text{für} \quad t \longrightarrow \infty$$

heißt ***heterokliner Orbit*** *von Φ.*
f) Sei $\overline{x} \in \mathbb{G}$. Eine Trajektorie $\{\Phi(t)x \in V \mid t \in \mathbb{R} \wedge \Phi(t)x \text{ existiert für alle } t \in \mathbb{R}\}$ mit der Eigenschaft

$$\Phi(t)x \longrightarrow \overline{x} \quad \text{für} \quad t \longrightarrow \pm\infty$$

heißt ***homokliner Orbit*** *von Φ.*

A.70 Satz. *Sei $(\Phi, \mathbb{T}, V)$ ein (semi-)dynamisches System und $\mathcal{A} \subset V$ der zugehörige globale Attraktor. Weiter bezeichne $C \subset V$ die Menge aller Anfangswertfunktionen, für die ein vollständiger und beschränkter Orbit existiert. Dann ist $\mathcal{A}$ äquivalent zu der Menge aller vollständigen und beschränkten Orbits von Φ, d.h.*

$$\bigcup_{x \in C} \mathcal{O}(x) \;=\; \mathcal{A}$$

Beweis. siehe [27] Theo.10.7 oder [32] Theo.7.6 □

Um die Struktur des Attraktors tiefergehend zu untersuchen, benötigen wir die Definition der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeit eines Gleichgewichtpunktes ([27] Def.10.8 und 10.9, [32] Def.5.1). Dabei handelt es sich um spezielle Mengen mit Anfangswertfunktionen, deren zugehörige Lösungen vorwärts bzw. rückwärts gegen den Gleichgewichtspunkt konvergieren.

A.71 Definition. *Sei $(\Phi, \mathbb{T}, V)$ ein (semi-)dynamisches System und $\overline{x} \in V$ ein Gleichgewichtspunkt von Φ.*
a) Die ***instabile Mannigfaltigkeit*** *von $\overline{x}$ ist die Menge*

$$W^u(\overline{x}) \;:=\; \{x \in V \mid \Phi(t)x \text{ ist definiert } \forall\, t \in \mathbb{R} \wedge \Phi(-t)x \longrightarrow \overline{x} \text{ für } t \longrightarrow \infty\}$$

b) Die ***stabile Mannigfaltigkeit*** *von $\overline{x}$ ist die Menge*

$$W^s(\overline{x}) \;:=\; \{x \in V \mid \Phi(t)x \longrightarrow \overline{x} \text{ für } t \longrightarrow \infty\}$$

c) Sei $X \subset V$ invariant unter Φ. Die ***instabile Mannigfaltigkeit*** *von X ist die Menge*

$$W^u(X) \;:=\; \{x \in V \mid \mathit{dist}(\Phi(-t)x, X) \longrightarrow 0 \text{ für } t \longrightarrow \infty\}$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass die instabile Mannigfaltigkeit $W^u(\overline{x})$ invariant unter Φ ist ([32] Lem.5.2). In Anbetracht der Definition des heteroklinen Orbits in A.69 e) sei vermerkt, dass der heterokline Orbit sowohl in der stabilen Mannigfaltigkeit $W^s(\overline{x_2})$ als auch in der instabilen Mannigfaltigkeit $W^u(\overline{x_1})$ enthalten ist. Ein homokliner Orbit liegt generell im Schnitt der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeit eines Gleichgewichtpunktes. Der folgende Satz garantiert uns, dass die instabile Mannigfaltigkeit aller invarianten Mengen im Attraktor enthalten ist. Insbesondere umfasst der Attraktor damit die instabile Mannigfaltigkeit aller Gleichgewichtspunkte und periodischen Orbits.

A.72 Satz. *Sei $(\Phi, \mathbb{T}, V)$ ein (semi-)dynamisches System, $\mathcal{A} \subset V$ der zugehörige globale Attraktor und $X \subset V$ eine beschränkte und unter Φ invariante Menge. Dann gilt:*

$$W^u(X) \subset \mathcal{A}$$

Beweis. siehe [27] Theo.10.10 □

Einige (semi-)dynamische Systeme besitzen besonders einfache asymptotische Dynamiken. Dabei handelt es sich um Systeme, die ein sogenanntes *Lyapunov-Funktional* aufweisen. Diese Funktionale sind zur Bestimmung invarianter Mengen sowie zur Lokalisierung von Grenzwertmengen äußerst hilfreich und liefern uns ein handfestes Mittel zur Verwaltung der Dynamiken eines Systems. Speziell für ein solches System, das wegen der Existenz eines Lyapunov-Funktionals auch als **Gradientensystem** bezeichnet wird, lassen sich stärkere Resultate zeigen. Wir werden sehen, dass der Attraktor eines derartigen Systems, das über ein Lyapunov-Funktional verfügt, im vollen Umfang aus der instabilen Mannigfaltigkeit der Menge aller Gleichgewichtspunkte besteht. Wir beginnen mit der Definition eines Lyapunov-Funktionals ([27] Def.10.11, [32] Def.2.15).

A.73 Definition. *Eine **Lyapunov-Funktion** für ein (semi-)dynamisches System $(\Phi, \mathbb{T}, V)$ auf einer positiv invarianten Menge $D \subset V$ ist eine Funktion $\mathcal{L} : D \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass die Eigenschaften*

(1): $\mathcal{L}$ ist stetig auf D

(2): $\forall\, x \in D: \ t \longmapsto \mathcal{L}(\Phi(t)x)$ ist nichtwachsend

(3): $(\exists\, T \in \mathbb{T}$ mit $T > 0: \ \mathcal{L}(\Phi(T)x) \ = \ \mathcal{L}(x)) \implies x$ ist ein Gleichgewichtspunkt von Φ

*erfüllt sind. Falls V ein Funktionenraum ist, so bezeichnet man $\mathcal{L}$ als **Lyapunov-Funktional**.*

Es sei vermerkt, dass es sich bei dieser Definition um eine stärkere Aussage handelt, als es normalerweise üblich ist. Tatsächlich gibt es eine schwächere Form von Lyapunov-Funktionalen, die die Aussage (3) nicht erfüllen. Die Eigenschaft (2) garantiert uns hierbei, dass es keine periodischen Lösungen geben kann und somit sind die einzigen Mengen, gegen die die Lösungstrajektorien konvergieren können, Gleichgewichtspunkte (bzw. Vereinigungen von Gleichgewichtspunkten).

A.74 Satz. *Sei $(\Phi, \mathbb{T}, V)$ ein (semi-)dynamisches System, $D \subset V$ eine positive invariante und gleichmäßig absorbierende Menge von Φ. Weiter besitze Φ das Lyapunov-Funktional $\mathcal{L} : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt:*

$$\omega(x) \subset \mathbb{G} \quad \forall\, x \in D$$

Falls darüber hinaus V zusammenhängend und $\mathbb{G}$ diskret ist, so gilt zudem

$$\omega(x) \in \mathbb{G} \quad \forall\, x \in D$$

Beweis. siehe [27] Prop.10.12 □

Es folgt abschließend die Struktur des globalen Attraktors eines Gradientensystems.

A.75 Satz (STRUKTURSATZ DES GLOBALEN ATTRAKTORS). *Sei $(\Phi, \mathbb{T}, V)$ ein (semi-)dynamisches System, $\mathcal{A} \subset V$ der globale Attraktor von Φ und $\mathcal{L} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$ das Lyapunov-Funktional von Φ. Dann gilt:*

$$\mathcal{A} = W^u(\mathbb{G})$$

Falls darüber hinaus V zusammenhängend und $\mathbb{G}$ diskret ist, so gilt zudem

$$\mathcal{A} = W^u(\mathbb{G}) = \bigcup_{\overline{x} \in \mathbb{G}} W^u(\overline{x})$$

und

$$\mathcal{A} = \mathcal{A} \cap W^s(\mathbb{G}) = \mathcal{A} \cap \bigcup_{\overline{x} \in \mathbb{G}} W^s(\overline{x})$$

Beweis. siehe [27] Theo.10.13 □

Falls V zusammenhängend und $\mathbb{G}$ diskret ist, so besagen die zwei Gleichungen, dass der globale Attraktor aus denjenigen Punkten $x \in V$ besteht, für die die Bedingungen

$$\lim_{n \to -\infty} \Phi(t)x = \overline{x_1} \quad \text{und} \quad \lim_{n \to \infty} \Phi(t)x = \overline{x_2}$$

gelten, wobei $\overline{x_1}, \overline{x_2} \in \mathbb{G}$ mit $\overline{x_1} \neq \overline{x_2}$. Damit erfasst der globale Attraktor ausschließlich alle heteroklinen Orbits des (semi-)dynamischen Systems.

A.6.e. Diskretisierung von globalen Attraktoren dynamischer Systeme

Um mengenwertige Konvergenzresultate zu untersuchen, benötigen wir die folgende Definition ([27] Kap.10.8, [32] Def.2.2), die wir speziell für den globalen Attraktor $\mathcal{A}$ der kontinuierlichen und für die Attraktoren $\mathcal{A}_h$ der FE-diskretisierten Reaktions-Diffusions-Gleichung benötigen.

A.76 Definition. *Sei seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_h$ (für $h \in]0, h_0]$) beliebige Mengen im Hilbertraum V.*
*a) Die Familie $\{\mathcal{A}_h \mid h \in]0, h_0]\} \cup \{\mathcal{A}\}$ heißt **oberhalbstetig** in $h = 0$, falls die Konvergenzaussage*

$$d_{NH}(\mathcal{A}_h, \mathcal{A}) \longrightarrow 0 \quad (\text{für } h \longrightarrow 0)$$

erfüllt ist.
*b) Die Familie $\{\mathcal{A}_h \mid h \in]0, h_0]\} \cup \{\mathcal{A}\}$ heißt **unterhalbstetig** in $h = 0$, falls die Konvergenzaussage*

$$d_{NH}(\mathcal{A}, \mathcal{A}_h) \longrightarrow 0 \quad (\text{für } h \longrightarrow 0)$$

erfüllt ist.
*c) Die Familie $\{\mathcal{A}_h \mid h \in]0, h_0]\} \cup \{\mathcal{A}\}$ heißt **stetig** in $h = 0$, falls die Konvergenzaussagen a) und b) erfüllt sind, d.h. die Aussage*

$$d_{SH}(\mathcal{A}, \mathcal{A}_h) \longrightarrow 0 \quad (\text{für } h \longrightarrow 0)$$

gilt.

Die Oberhalbstetigkeit der Attraktoren besagt, dass die diskretisierten Attraktoren gegen eine Menge konvergieren, die im kontinuierlichen Attraktor enthalten ist. Damit kann die Grenzmenge der approximierten Attraktoren keinesfalls beliebig groß werden. Die Unterhalbstetigkeit der Attraktoren besagt, dass die diskretisierten Attraktoren gegen eine Menge konvergieren, die den kontinuierlichen Attraktor umfasst. Damit kann die Grenzmenge der approximierten Attraktoren nicht in sich zusammenfallen.

A.7. Beispiele zur Lösbarkeit und Langzeitanalyse

In diesem Abschnitt führen wir einige Anwendungsbeispiele auf, die unsere Generalvoraussetzungen 2.1 und 5.1 erfüllen. Dabei enthält A.7.a Beispiele, die zwar die Generalvoraussetzung 2.1 aber nicht notwendigerweise die Generalvoraussetzung 5.1 erfüllen. Die Beispiele des Abschnitts A.7.a genügen daher unsere Lösbarkeitstheorie und ihre Lösungen lassen sich bei einem konvexen polygonalen Grundgebiet und einer uniformen Familie regulärer Triangulierungen mittels der Finite-Elemente-Methode und dem impliziten Euler-Verfahren numerisch berechnen. Der Abschnitt A.7.b enthält hingegen Beispiele, die zusätzlich die Generalvoraussetzungen 5.1 erfüllen. Semilineare parabolische Probleme mit einer derartigen Nichtlinearität wie in A.7.b weisen daher generell einen globalen Attraktor auf. Wir nehmen durchweg $\lambda \in [0, \infty[$ an.

A.7.a. Beispiele zur Lösbarkeit

Trigonometrische Funktionen:
1. $f(u) = \lambda \cdot \sin(u)$, $f(u) = \lambda \cdot \cos(u)$
2. $f(u) = \lambda \cdot u \cdot \sin(u)$, $f(u) = \lambda \cdot u \cdot \cos(u)$
3. $f(u) = \lambda \cdot u^2 \cdot \sin(u)$, $f(u) = \lambda \cdot u^2 \cdot \cos(u)$
4. $f(u) = \lambda \cdot \sin(u) \cdot \cos(u)$
5. $f(u) = \lambda \cdot u \cdot \sin(u) \cdot \cos(u)$

Polynomfunktionen:
6. $f(u) = \lambda(u - u^n)$, wobei $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$
7. $f(u) = \lambda \cdot \prod_{i=1}^{n}(u - a_i)$, wobei $a_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
8. $f(u) = \lambda \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i u^i$, wobei $a_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$
9. $f(u) = \lambda \left(\frac{1}{1+u^n}\right)$, wobei $n \in \mathbb{N}$, n gerade

Sonstige Funktionen:
10. $f(u) = \lambda \cdot e^{-\frac{1}{u^2}}$
11. $f(u) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{u^2}} & \text{, falls } u > 0 \\ 0 & \text{, falls } u \leqslant 0 \end{cases}$
12. $f(u) = \lambda \cdot e^u$ (**Zel'dovich-Frank-Kamenetskii-Gleichung**)
13. $f(u) = a + b \cdot e^{\lambda u}$

Die Beispiele 1,2,4,5,9,10 und 11 erfüllen die Generalvoraussetzung 2.1 für $d = 1, 2, 3$, das Beispiele 3 hingegen lediglich für $d = 1, 2$. Die Beispiele 6,7, und 8 erfüllen die Generalvoraussetzung 2.1 für $d = 1, 2, 3$, falls der Grad der Polynome $n \leqslant 3$ ist, und lediglich für $d = 1, 2$, falls $n \geqslant 4$ ist. Die Zel'dovich-Frank-Kamenetskii-Gleichung in 12 und der Reaktionsterm in 13 sind Beispiele für Nichtlinearitäten, die unsere Genralvoraussetzung 2.1 nur für $d = 1$ erfüllt.

A.7.b. Beispiele zur Langzeitanalyse

Trigonometrische Funktionen:
13. $f(u) = \lambda(u + u^2 \cdot \sin(u) - u^3)$
14. $f(u) = \lambda(u + u^2 \cdot \sin(u) + u^3 \cdot \cos(u) - u^5)$
15. $f(u) = \lambda(u + u^2 \cdot \frac{1}{\sin(u)^2+1} - u^3)$
16. $f(u) = \lambda(u + u^2 \cdot \frac{1}{\sin(u)^2+1} + u^3 \cdot \frac{1}{\cos(u)^2+1} - u^5)$
17. $f(u) = \lambda(u + u^2 \cdot \frac{1}{\sin(u)+2} + u^3 \cdot \frac{1}{\cos(u)+2} - u^5)$

Polynomfunktionen:
18. $f(u) = \lambda(u - u^n)$, wobei $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, n ungerade

19. $f(u) = \lambda \cdot \sum_{i=0}^{n} a_i u^i$, wobei $a_i \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, n ungerade, $a_n < 0$
20. $f(u) = \lambda \cdot (-u) \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\pi}{2^i} + u\right)\left(\frac{\pi}{2^i} - u\right)$, wobei $n \in \mathbb{N}$, n gerade

Sonstige Funktionen:

21. $f(u) = \lambda(u + u^3 \cdot \frac{1}{(u-1)^2+1} - u^5)$

A.8. Programmdateien

In diesem Abschnitt stellen wir einige Programmdateien zur Untersuchung der FE-Attraktoren zur Verfügung, die teilweise in Kapitel 6 verwendet werden. Zusätzlich enthält dieser Abschnitt aber auch ergänzendes Material zu den einzelnen Berechnungen.

A.8.a. Bifurkation

Es folgen die zur FE-Bifurkationsanalyse notwendige MATCONT-Systemdatei der eindimensionalen FE-diskretisierten Chafee-Infante-Gleichung bei einem 7-dimensionalen FE-Raum. Das Aufstellen dieses Systems lässt sich beispielsweise mit MAPLE gewährleisten, indem wir mit MAPLE das entsprechende 7-dimensionale Gleichungssystem (6.2) berechnen.

```
/* Copyright (c) 2009 Denny Otten */
/* Bifurcation-Analysis: the One-Dimensional Chafee-Infante-Equation with linear Finite-Element-Method */

u1' = -75/10864*lambda*u3*u4*u4-5223/54320*lambda*u1*u2*u2+3/10864*lambda*u6*u6*u7
      +201/108640*lambda*u4*u5*u5+3/21728*lambda*u6*u7*u7-111/108640*lambda*u5*u5*u6
      +2883/54320*lambda*u2*u2*u3-39612/679*u1+28080/679*u2-7524/679*u3+288/97*u4
      -540/679*u5+144/679*u6-36/679*u7+2799/108640*lambda*u2*u3*u3-309/21728*lambda*u3*u3*u4
      -21519/108640*lambda*u1*u1*u2+207/54320*lambda*u4*u4*u5-27/54320*lambda*u5*u6*u6
      +lambda*u1-16881/27160*lambda*u1*u1*u1+117/1358*lambda*u2*u2*u2-627/27160*lambda*u3*u3*u3
      +3/485*lambda*u4*u4*u4-9/5432*lambda*u5*u5*u5+3/6790*lambda*u6*u6*u6-3/27160*lambda*u7*u7*u7;
u2' =  75/2716*lambda*u3*u4*u4-585/2716*lambda*u1*u2*u2-3/2716*lambda*u6*u6*u7-201/27160*lambda*u4*u5*u5
      -3/5432*lambda*u6*u7*u7+111/27160*lambda*u5*u5*u6-2883/13580*lambda*u2*u2*u3+28080/679*u1
      -47136/679*u2+30096/679*u3-1152/97*u4+2160/679*u5-576/679*u6+144/679*u7-2799/27160*lambda*u2*u3*u3
      +309/5432*lambda*u3*u3*u4-585/5432*lambda*u1*u1*u2-207/13580*lambda*u4*u4*u5+27/13580*lambda*u5*u6*u6
      +lambda*u2+117/1358*lambda*u1*u1*u1-4377/6790*lambda*u2*u2*u2+627/6790*lambda*u3*u3*u3
      -12/485*lambda*u4*u4*u4+9/1358*lambda*u5*u5*u5-6/3395*lambda*u6*u6*u6+3/6790*lambda*u7*u7*u7;
u3' = -1125/10864*lambda*u3*u4*u4+627/10864*lambda*u1*u2*u2+45/10864*lambda*u6*u6*u7
      +603/21728*lambda*u4*u5*u5+45/21728*lambda*u6*u7*u7-333/21728*lambda*u5*u5*u6
      -5643/54320*lambda*u2*u2*u3-7524/679*u1+30096/679*u2-47676/679*u3+4320/97*u4-8100/679*u5
      +2160/679*u6-540/679*u7-23199/108640*lambda*u2*u3*u3-4635/21728*lambda*u3*u3*u4
      +627/21728*lambda*u1*u1*u2+621/10864*lambda*u4*u4*u5-81/10864*lambda*u5*u6*u6
      -627/27160*lambda*u1*u1*u1+627/6790*lambda*u2*u2*u2+lambda*u3-17553/27160*lambda*u3*u3*u3
      +9/97*lambda*u4*u4*u4-135/5432*lambda*u5*u5*u5+9/1358*lambda*u6*u6*u6-9/5432*lambda*u7*u7*u7;
u4' = -207/970*lambda*u3*u4*u4-3/194*lambda*u1*u2*u2-3/194*lambda*u6*u6*u7-201/1940*lambda*u4*u5*u5
      -3/388*lambda*u6*u7*u7+111/1940*lambda*u5*u5*u6+27/970*lambda*u2*u2*u3+288/97*u1-1152/97*u2
      +4320/97*u3-6816/97*u4+4320/97*u5-1152/97*u6+288/97*u7+111/1940*lambda*u2*u3*u3
      -201/1940*lambda*u3*u3*u4-3/388*lambda*u1*u1*u2-207/970*lambda*u4*u4*u5+27/970*lambda*u5*u6*u6
      +3/485*lambda*u1*u1*u1-12/485*lambda*u2*u2*u2+9/97*lambda*u3*u3*u3+lambda*u4
      -627/970*lambda*u4*u4*u4+9/97*lambda*u5*u5*u5-12/485*lambda*u6*u6*u6+3/485*lambda*u7*u7*u7;
u5' =  621/10864*lambda*u3*u4*u4+45/10864*lambda*u1*u2*u2+627/10864*lambda*u6*u6*u7
      -4635/21728*lambda*u4*u5*u5+627/21728*lambda*u6*u7*u7-23199/108640*lambda*u5*u5*u6
      -81/10864*lambda*u2*u2*u3-540/679*u1+2160/679*u2-8100/679*u3+4320/97*u4-47676/679*u5
      +30096/679*u6-7524/679*u7-333/21728*lambda*u2*u3*u3+603/21728*lambda*u3*u3*u4
      +45/21728*lambda*u1*u1*u2-1125/10864*lambda*u4*u4*u5-5643/54320*lambda*u5*u6*u6
      -9/5432*lambda*u1*u1*u1+9/1358*lambda*u2*u2*u2-135/5432*lambda*u3*u3*u3+lambda*u5
      +9/97*lambda*u4*u4*u4-17553/27160*lambda*u5*u5*u5+627/6790*lambda*u6*u6*u6-627/27160*lambda*u7*u7*u7;
u6' = -207/13580*lambda*u3*u4*u4-3/2716*lambda*u1*u2*u2-585/2716*lambda*u6*u6*u7+309/5432*lambda*u4*u5*u5
      -585/5432*lambda*u6*u7*u7-2799/27160*lambda*u5*u5*u6+27/13580*lambda*u2*u2*u3+144/679*u1-576/679*u2
      +2160/679*u3-1152/97*u4+30096/679*u5-47136/679*u6+28080/679*u7+111/27160*lambda*u2*u3*u3
      -201/27160*lambda*u3*u3*u4-3/5432*lambda*u1*u1*u2+75/2716*lambda*u4*u4*u5-2883/13580*lambda*u5*u6*u6
      +3/6790*lambda*u1*u1*u1-6/3395*lambda*u2*u2*u2+9/1358*lambda*u3*u3*u3+lambda*u6-12/485*lambda*u4*u4*u4
      +627/6790*lambda*u5*u5*u5-4377/6790*lambda*u6*u6*u6+117/1358*lambda*u7*u7*u7;
u7' =  207/54320*lambda*u3*u4*u4+3/10864*lambda*u1*u2*u2-5223/54320*lambda*u6*u6*u7-309/21728*lambda*u4*u5*u5
      -21519/108640*lambda*u6*u7*u7+2799/108640*lambda*u5*u5*u6-27/54320*lambda*u2*u2*u3-36/679*u1
      +144/679*u2-540/679*u3+288/97*u4-7524/679*u5+28080/679*u6-39612/679*u7-111/108640*lambda*u2*u3*u3
      +201/108640*lambda*u3*u3*u4+3/21728*lambda*u1*u1*u2-75/10864*lambda*u4*u4*u5+2883/54320*lambda*u5*u6*u6
      -3/27160*lambda*u1*u1*u1+3/6790*lambda*u2*u2*u2-9/5432*lambda*u3*u3*u3+3/485*lambda*u4*u4*u4
      -627/27160*lambda*u5*u5*u5+117/1358*lambda*u6*u6*u6+lambda*u7-16881/27160*lambda*u7*u7*u7;
```

A.8.b. Hutfunktion

Die MATLAB-Programmdatei `hut.m` verlangt als Eingabeparameter die Anzahl der inneren Knoten N der Triangulierung und die Nummer der zu betrachtenden Basisfunktion j. x bleibt hierbei variabel, da uns y eine von x abhängige Hutfunktion liefert.

```
function y = hut(x,N,j)

h = 1/(N-1);

y1 = -1+(j-1)*h;
y2 = -1+j*h;
y3 = -1+(j+1)*h;

if x < y1
    y=0;
elseif x >= y1 && x < y2
    y=(x-y1)/h;
elseif x >= y2 && x < y3
    y=(y3-x)/h;
elseif x >= y3
    y=0;
end
```

A.8.c. Fixpunkte und heterokline Orbits

Mit der MATLAB-Programmdatei `HeteroclinicOrbits.m` werden wir den FE-Attraktor der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung (1.4) auf heterokline Orbits untersuchen.

```
iter = 15;
verstufe = 7;

chafee = Model('chafee-infante-1D-FEM-EEM-MAP');
chafee.dim = 3;
chafee.lambda = 45.0;
chafee.deltat = 0.01;
map = Integrator('Map');
map.model = chafee;
map.tFinal = 1;

dp = Points('MonteCarlo', chafee.dim, 50);
ip = Points('Center', chafee.dim, 1);
tree = Tree(chafee.dim,zeros(1,chafee.dim),1.5*ones(1,chafee.dim));
tree.integrator = map;
tree.domain_points = dp;
tree.image_points = ip;

rga(tree,iter);

tree.unset_flags('all',1,-1);
flags = zeros(1,tree.count(-1));
box = tree.first_box(-1);
while(~isempty(box))
    Testpunkte = dp.get([box(1);box(2);box(3)],[box(4);box(5);box(6)]);
    for i=1:dp.noOfPoints
        bildpunkt = chafee.rhs(Testpunkte(:,i));
        boxnummer = tree.search(bildpunkt,-1);
        if(boxnummer ~= -1)
            flags(boxnummer) = flags(boxnummer)+1;
        end
    end
    box = tree.next_box(-1);
end

clear box;
clear Testpunkte;
clear bildpunkt;
clear boxnummer;

tree2 = Tree(2,zeros(1,2),ones(1,2));
for i=1:2*verstufe
   tree2.set_flags('all',1,-1);
   tree2.subdivide(1);
end

xDP(1) = -1+(1/(2^verstufe));
for i=2:2^verstufe
    xDP(i) = xDP(i-1)+2/(2^verstufe);
end
flags2 = zeros(1,tree2.count(-1));
box = tree.first_box(-1);
while(~isempty(box))
   for i=1:length(xDP)
        f = @(x) box(1)*hut(x,3,1)+box(2)*hut(x,3,2)+box(3)*hut(x,3,3);
        boxnummer = tree.search([box(1);box(2);box(3)],-1);
        boxnummer2 = tree2.search([xDP(i);f(xDP(i))],-1);
        if(boxnummer2 ~= -1)
            flags2(boxnummer2) = flags2(boxnummer2)+flags(boxnummer);
        end
   end
   box = tree.next_box(-1);
end

show3(tree.boxes(-1)','g',3,[1 2 3],[.5 .5 .5],.05,flags');
```

A.8.d. Fehlende Boxen im Inneren des FE-Attraktors

Die MATLAB-Programmdatei `MissingBoxes.m` ermöglicht es uns, den FE-Attraktor der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung auf Löcher in seinem Inneren zu untersuchen.

```
function lostboxes=lueckentest(U, Qradius)

n      = (size(U,1)-2)/2;
radius = U(n+1:2*n,1);

lostboxes=[];
for dim=1:n
   pos{dim} = -Qradius+radius(dim):2*radius(dim):Qradius-radius(dim);
end

anzahlStreifen = prod(cellfun('length',pos))/length(pos{n});

V=U;

for i=1:anzahlStreifen
    V = U;
    tmp=i-1;
    for j=(n-1):-1:1
        index = rem(tmp,length(pos{j}))+1;
        V     = V(:,V(j,:)==pos{j}(index));
        tmp   = fix(tmp/length(pos{j}));
    end
    if ~isempty(V)

        [dummy,ix]=sort(V(n,:));
        V=V(:,ix);

        imin = find(pos{n}==V(n,1));
        imax = find(pos{n}==V(n,end));
        for k=imin:imax
            if isempty(find(V(n,:)==pos{n}(k)))
                lostboxes = [lostboxes [V(1:n-1,1); pos{n}(k);V(n+1:2*n,1)]];
            end
        end
    end
end
```

A.8.e. Konvergenz einer Anfangswertfunktion

Mit der MATLAB-Programmdatei `Convergence.m` lässt sich das Konvergenzverhalten der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung im FE-Raum für eine fest vorgegebene Startfunktion graphisch darstellen.

```
chafee = Model('chafee-infante-1D-FEM-EEM-MAP');
chafee.dim = 15;
chafee.lambda = 5.0;
chafee.deltat = 0.001;
map = Integrator('Map');
map.model = chafee;
map.tFinal = chafee.deltat;

tmax = 30;
%u0 = [0.8218; 0; -0.8218];                                          % falls chafee.dim = 3;
%u0 = [0.5811; 0.8218; 0.5811; 0; -0.5811; -0.8218; -0.5811];        % falls chafee.dim = 7;
u0 = [0.3145; 0.5811; 0.7592; 0.8218; 0.7592; 0.5811; 0.3145; 0; % falls chafee.dim =15;
      -0.3145; -0.5811; -0.7592; -0.8218; -0.7592; -0.5811; -0.3145];
x = -1:2/(chafee.dim+1):1;
t = 0:chafee.deltat:tmax;

[T,X] = meshgrid(t,x);
tlength = length(t);
xlength = length(x);
z = zeros(xlength,tlength);

v = chafee.rhs(u0);
for j=2:xlength-1
    z(j,1) = v(j-1);
end

for i=2:tlength
    v = chafee.rhs(v);
    for j=2:xlength-1
        z(j,i) = v(j-1);
    end
end

colormap hsv
surf(t,x,z,'Linestyle','none','Facecolor','interp');
```

A.8.f. Das medizinische Modell

In diesem Abschnitt stellen wir die Programmdatei `medical-model-1D-FEM-EEM-MAP.c` für das eindimensionale medizinische Modell mit $\Omega =]-1,1[$ zur Verfügung. Die Herleitung und die Konstruktion dieser Programmdatei erfolgt analog mittels Finiter-Elemente-Methode und explizitem Euler-Verfahren wie bei der eindimensionalen Chafee-Infante-Gleichung.

```c
/* Copyright (c) 2009 Denny Otten */
/* One-Dimensional Medical-Model with Finite-Element-Method and Explicit-Euler-Method */

#include <math.h>

char *typ = "map";
char *name = "The 1D-Medical-Model MAP";
int   paramDim = 3;
char *paramNames[] = { "lambda", "dim", "deltat" };
int dim = 3;
double lambda = 7.0, deltat = 0.01;
double c[3] = {0,0,0};
double r[3] = {2,2,2};
double tFinal = 1.0;

void rhs(double *x, double *u, double *y) {
    double h = 2.0 / ((double) dim+1);
    int i,j;

    double B[dim][dim];
    for (i=0; i<dim; i++)
    {
       for (j=0; j<dim; j++)
          B[i][j] = 0.0;
    }
    for (i=0; i<dim; i++)
    {
       B[i][i] = 4.0;
       if (i+1<dim)
          B[i][i+1] = 1.0;
       if (i-1>=0)
          B[i][i-1] = 1.0;
    }

    double A[dim][dim];
    for (i=0; i<dim; i++)
    {
       for (j=0; j<dim; j++)
          A[i][j] = 0.0;
    }
    for (i=0; i<dim; i++)
    {
       A[i][i] = 2.0;
       if (i+1<dim)
          A[i][i+1] = -1.0;
       if (i-1>=0)
          A[i][i-1] = -1.0;
    }

    double xtemp[dim+2];
    xtemp[0] = 0.0;
    xtemp[dim+1] = 0.0;
    for (i=1; i<dim+1; i++)
    {
       xtemp[i] = x[i-1];
    }
    double G[dim];
    for (i=1; i<dim+1; i++)
    {
       G[i-1] = lambda*(xtemp[i-1]/6.0 + xtemp[i]*2.0/3.0 + xtemp[i+1]/6.0
                      - xtemp[i-1]*xtemp[i-1]*xtemp[i-1]/20.0
                                                - xtemp[i]*xtemp[i]*xtemp[i]*2.0/5.0
                                                - xtemp[i+1]*xtemp[i+1]*xtemp[i+1]/20.0
                      - xtemp[i-1]*xtemp[i-1]*xtemp[i]/10.0
                      - xtemp[i-1]*xtemp[i]*xtemp[i]*3.0/20.0
                                                - xtemp[i]*xtemp[i]*xtemp[i+1]*3.0/20.0
                                                - xtemp[i]*xtemp[i+1]*xtemp[i+1]/10.0);
    }

    double temp[dim];
    for (i=0; i<dim; i++)
    {
       temp[i] = 0.0;
       for (j=0; j<dim; j++)
       {
          temp[i] = temp[i] + A[i][j]*x[j];
       }
    }

    double b[dim];
    for (i=0; i<dim; i++)
    {
       b[i] = 6.0*(G[i] - temp[i]/(h*h));
    }

    for (i=1; i<dim; i++)
    {
```

```
        B[i][i-1] = B[i][i-1]/B[i-1][i-1];
        B[i][i]   = B[i][i] - B[i][i-1]*B[i-1][i];
        b[i]      = b[i] - B[i][i-1]*b[i-1];
    }

    y[dim-1] = b[dim-1]/B[dim-1][dim-1];
    for (i=dim-2; i>=0; i--)
    {
        y[i] = (b[i] - B[i][i+1]*y[i+1])/B[i][i];
    }

    for (i=0; i<dim; i++)
    {
        y[i] = x[i] + deltat*y[i];
    }
}
```

Literatur

[1] A. DHOOGE, W. GOVAERTS, Yu.A. KUZNETSOV W. MESTROM A.M. RIET B.SAUTOIS: *MATCONT and CL_MATCONT, Continuation toolboxes in MATLAB*. Universiteit Gent, Utrecht University, 2006.

[2] ALT, Hans Wilhelm: *Lineare Funktionalanalysis*. Springer, 5. Auflage, Berlin, 2006.

[3] AMANN, Herbert: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Gruyter, 2. Auflage, 1995.

[4] BRAESS, Dietrich: *Finite Elemente*. Springer, 4. Auflage, Berlin, 2007.

[5] C. JOHNSON, S. LARSSON, V. THOMÉE L. B. WAHLBIN: *Error estimates for spatially discrete approximations of semilinear parabolic equations with nonsmooth initial data*. Mathematics of Computation, Vol. 49, No. 180, pp. 331-357, 1987.

[6] CIARLET, Philippe: *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland, Vol. 4, Amsterdam, 1978.

[7] David GILBARG, Neil S. TRUDINGER: *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, 1998.

[8] ERLENKÖTTER, Helmut: *C Programmieren von Anfang an*. Rowohlt Tb., 2005.

[9] EVANS, Lawrence C.: *Partial differential equations*. Oxford University Press, 1998.

[10] GRISVARD, Pierre: *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Longman Higher Education, 1986.

[11] H. FUJITA, A. MIZUTANI: *On the finite element method for parabolic equations, I; approximation of holomorphic semi-groups*. Journal of the Mathematical Society of Japan, Vol. 28, No. 4, pp. 749-771, 1976.

[12] H. FUJITA, T. SUZUKI: *Evolution problems*. Handbook of Numerical Analysis, Vol. II. Finite Element Methods (Part 1)(P. G. Ciarlet and J. L. Lions, eds.), North-Holland, pp. 789-928, Amsterdam, 1991.

[13] HANKE-BOURGEOIS, Martin: *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*. Vieweg+Teubner, 2. Auflage, 2006.

[14] HENRY, Dan: *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Lecture Notes in Mathematics, vol. 840, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1981.

[15] LARSSON, Stig: *The long-time behavior of finite element approximations of solutions of semilinear parabolic problems*. SIAM Journal on numerical analysis, vol. 26, No. 2, pp. 348-365, 1989.

[16] LARSSON, Stig: *Nonsmooth data error estimates with applications to the study of the long-time behavior of finite element solutions of semilinear parabolic problems*. 1992.

[17] LARSSON, Stig: *Numerical analysis of semilinear parabolic problems*. Springer-Verlag, 1999.

[18] LARSSON, Stig: *Semilinear parabolic partial differential equations-theory, approximation, and application.* New Trends in the Mathematical and Computer Sciences (G. O. S. Ekhaguere, C. K. Ayo, and M. B. Olorunsaiye, eds.), Proceedings of an international workshop at Covenant University, Ota, Nigeria, June 18-23, 2006, Publications of the ICMCS, vol. 3, pp. 153-194, 2006.

[19] M. CROUZEIX, V. THOMÉE, L. B. WAHLBIN: *Error estimates for spatially discrete approximations of semilinear parabolic equations with initial data of low regularity.* Mathematics of Computation, Vol. 53, No. 187, pp. 25-41, 1989.

[20] Mario TABOADA, Yuncheng YOU: *Some stability Results for perturbed semilinear parabolic equations.* Institute for Mathematics and Its Applications, IMA Preprint Series, No. 730, 1990.

[21] Martine MARION, Jinchao XU: *Error Estimates on A New Nonlinear Galerkin Method Based on Two-grid Finite Elements.* SIAM Journal of Numerical Analysis, vol. 32, pp. 1170-1184, 1992.

[22] Michael DELLNITZ, Oliver JUNGE, Gary FROYLAND: *The algorithms behind gaio - set oriented numerical methods for dynamical systems.* 2001.

[23] Nathaniel CHAFEE, Ettore F. INFANTE: *A Bifurcation Problem for a Nonlinear Partial Differential Equation of Parabolic Type.* Applicable Analysis, Vol. 4, pp. 17-37, Gordon and Breach Science Publishers Ltd., Printed in Great Britain, 1974.

[24] Peter KNABNER, Lutz ANGERMANN: *Numerik partieller Differentialgleichungen: Eine anwendungsorientierte Einf.*

[25] Ragnar WINTHER, Aslak TVEITO: *Einführung in partielle Differentialgleichungen.* Springer, 1. Auflage, 2002.

[26] Reinhold REMMERT, Georg SCHUMACHER: *Funktionentheorie 2.* Springer, 3. Auflage, Berlin, 2007.

[27] ROBINSON, James C.: *Infinite dimensional dynamical systems: An introduction to dissipative parabolic PDEs and the theory of global attractors.* Cambridge University Press, 2001.

[28] Stig LARSSON, C. M. ELLIOTT: *Error estimates with smooth and nonsmooth data for a finite element method for the Cahn-Hilliard equation.* Mathematics of Computation, Vol. 58, No. 198, pp. 603-630, 1992.

[29] Stig LARSSON, Jesús-María SANZ-SERNA: *The behavior of finite element solutions of semilinear parabolic problems near stationary points.* SIAM Journal on numerical analysis, vol. 31, No. 4, pp. 1000-1018, 1994.

[30] Stig LARSSON, Jesús-María SANZ-SERNA: *A Shadowing Result With Applications To Finite Element Approximation Of Reaction-Diffusion Equations.* Mathematics of Computation, Vol. 68, No. 225, pp. 55-72, 1999.

[31] Stig LARSSON, Vidar THOMÉE: *Partielle Differentialgleichungen und numerische Methoden.* Springer, Berlin, 1. Auflage, 2005.

[32] STUART, Andrew: *Perturbation theory for infinite dimensional dynamical systems.* Advances in numerical analysis, editor M. Ainsworth, J. Levesley, M. Marletta and W.A. Light, 1995.

[33] TEMAM, Roger: *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics.* Applied mathematical syiences 68, Second Edition, Springer, New York Inc., 1988.

[34] THOMÉE, Vidar: *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems.* Springer series in Computational Mathematics, Second Edition, Springer, Berlin, 2006.

[35] WERNER, DIRK: *Funktionalanalysis.* Springer, Berlin, 5. Auflage, 2004.

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	Menge der reelle Zahlen
$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$
$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
Ω	$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ Gebiet der Dimension $d \in \mathbb{N}$
$\partial\Omega$	Rand vom Gebiet Ω
$\overline{\Omega}$	$\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ Abschluss vom Gebiet Ω
$\lvert\Omega\rvert$	Maß vom Gebiet Ω
A	$A = -\triangle$ kontinuierlicher negativer Laplace-Operator, Diffusionsterm
A^α	gebrochene Potenz von A
$\mathcal{A}$	kontinulierlicher Attraktor
A_h	$A_h = -\triangle_h$ diskreter negativer Laplace-Operator, Steifigkeitsmatrix
A_h^α	gebrochene Potenz von A_h
$\mathcal{A}_h$	FE-Attraktor
a	$a = a(\bullet, \bullet)$ Bilinearform
α_1	Wachstumskonstante aus Generalvoraussetzung 5.1
α_2	Wachstumskonstante aus Generalvoraussetzung 5.1
B	$B_R = B_{\lVert\bullet\rVert_{H_0^1}}(0, R) = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \lVert u\rVert_{H^1} \leqslant R\}$ Kugel in $H_0^1(\Omega)$ um 0 mit Radius R, $B = B(\bullet, \bullet)$ Eulersche Betafunktion
B_h	Massenmatrix
C^k	Menge aller k-fach stetig differenzierbaren Fünktionen
C_0^k	Menge aller C^k-Fünktionen mit kompaktem Träger
$C^{k,\alpha}$	Hölder-Raum
D	linearer Diffusionskoeffizient
$\mathcal{D}(T)$	Definitionsbereich eines Operators T
D_t^l	l-fache zeitliche Ableitung nach t
D^α	räumliche Ableitung der Ordnung α, starke (klassische) Ableitung
d	$d \in \mathbb{N}$ Dimension eines Gebiets
d_{NH}	nichtsymmetrischer Hausdorff-Abstand
d_{SH}	symmetrischer Hausdorff-Abstand
$dF(u)$	Fréchet-Ableitung des Nemytskii-Operators an der Stelle u
dist	Abstand zwischen einem Punkt und einer Menge
$\overline{\partial}_t$	Rückwärtsdifferenzenquotient
δ	Wachstumskonstante aus Generalvoraussetzung 2.1
E	Lösungsoperator des homogenen linearen AWP's, evolution operator

E_h	Lösungsoperator des räumlich diskretisierten homogenen linearen AWP's
E_{hk}	Lösungsoperator des vollständig diskretisierten homogenen linearen AWP's
e	Konvergenzfehler zwischen kontinuierlicher und räumlich diskretisierter Lösung, Exponentialfunktion
e_n	Konvergenzfehler zwischen kontinuierlicher und vollständig diskretisierter Lösung
F	Operator mit Nichtlinearität, Nemytskii-Operator
f	nichtlineare Funktion, nichtlinearer Reaktionsterm
φ_j	Eigenfunktion des kontinuierlichen negativen Laplace-Operators A
φ_{hj}	Eigenvektor des diskreten negativen Laplace-Operators von A_h
$\mathbb{G}$	Menge aller Gleichgewichtspunkte
Γ	Gammafunktion
γ	Wachstumskonstante aus Generalvoraussetzung 5.1
∇	Gradient
H^k	$H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ spezieller Sobolevraum, Hilbertraum
H_0^k	Menge aller H^k-Fünktionen mit homogenen Dirichlet-Rand
h	$h = \triangle x$ räumlicher Diskretisierungsparameter
I_h	Interpolationsoperator
k	$k = t_n - t_{n-1}$ zeitlicher Diskretisierungsparameter
κ	Wachstumskonstante aus Generalvoraussetzung 5.1
L^p	Raum der p-fach integrierbaren Funktionen
$\mathcal{L}$	Lyapunov-Funktional
Λ_j	Basisfunktion, Hutfunktion, Pyramidenfunktion
l	Wachstumskonstante aus Generalvoraussetzung 5.1
λ_j	Eigenwert des kontinuierlichen negativen Laplace-Operators A
λ	Bifurkationsparameter, Kontrollparameter
λ_{hj}	Eigenwert des diskreten negativen Laplace-Operators A_h
M_h	Anzahl an d-Simplex Elementen einer Triangulierung
N_h	Anzahl an inneren Knoten einer Triangulierung
$N(T)$	Nullraum, Kern eines Operators T
$\omega(X)$	ω-Limes-Menge einer Menge X
P_h	orthogonale Projektion auf $L^2(\Omega)$
$P_h^{(j)}$	innere Knoten einer Triangulierung
$R(T)$	Bildraum eines Operators T
R_h	Ritz-Projektion, elliptische Projektion, orthogonale Projektion auf $H_0^1(\Omega)$
ρ	Konsistenzfehler, Abschneidefehler, Ritzfehler zwischen kontinuierlicher und räumlich diskretisierter Lösung, Radius der absorbierenden Menge
ρ_n	Konsistenzfehler, Abschneidefehler, Ritzfehler zwischen kontinuierlicher und vollständig diskretisierter Lösung

$\rho(T)$	Resolventenmenge eines Operators T
S	Lösungsoperator des nichtlinearen AWP's, solution operator
S_h	Lösungsoperator des räumlich diskretisierten nichtlinearen AWP's
S_{hk}	Lösungsoperator des vollständig diskretisierten nichtlinearen AWP's
$\sigma(T)$	Spektrum eines Operators T
T	Zeitpunkt im Intervall, Operator, Spuroperator
$T_h^{(i)}$	d-Simplex Element einer Triangulierung
$\mathcal{T}_h$	Triangulierung
t	Zeitvariable
t_n	$t_n = nk$ diskrete Zeitvariable
$\mathbb{T}$	Zeitachse
$\mathbb{T}_+$	positive Zeitachse
θ	Stabilitätsfehler zwischen kontinuierlicher und räumlich diskretisierter Lösung
θ_n	Stabilitätsfehler zwischen kontinuierlicher und vollständig diskretisierter Lösung
u_0	u_0, u_{h0}, U_0 Anfangswertfunktionen
$u^{(\alpha)}$	schwache Ableitung von u vom Index α
$\mathcal{V}_h$	Finite-Elemente-Raum
$W^{k,p}$	Sobolevraum
W^u	instabile Mannigfaltigkeit
W^s	stabile Mannigfaltigkeit

Namens- und Sachverzeichnis