Übungen zur Vorlesung
Praktische Mathematik für Medieninformatiker
Sommersemester 2015

PD Dr. Thorsten Hüls

Übungsblatt 1
15.4.2015

Abgabe: Mittwoch, 22.4.2015, 10:00 Uhr in V3-128, Postfach 180

Tutor: Julius Hülsmann, E-Mail: `jhuelsma@math.uni-bielefeld.de`

Aufgabe 1:

(a) Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen linear beziehungsweise längenerhaltend sind:

$$
\begin{aligned}
f_1\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(x_1)\cdot x_1 - \sin(x_1)\cdot x_2 \\ \sin(x_1)\cdot x_1 + \cos(x_1)\cdot x_2 \end{pmatrix}, \\
f_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4})\cdot x_1 + \sin(\frac{\pi}{4})\cdot x_2 \\ \cos(\frac{\pi}{4})\cdot x_2 - \sin(\frac{\pi}{4})\cdot x_1 \end{pmatrix}, \\
f_3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

(b) Gegeben sei das Quadrat

$$Q = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : 1 \le x_1 \le 2,\ 1 \le x_2 \le 2 \right\} \quad \text{und die Matrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine formale Darstellung der Menge AQ an, und skizzieren Sie diese Menge.

(10 Punkte)

Aufgabe 2:

(i) Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^2$ wird zunächst an der x_1-Achse gespiegelt. Anschließend wird der resultierende Vektor um den Faktor 2 gestreckt und abschließend um den Winkel $\frac{\pi}{4}$ im Uhrzeigersinn um den Ursprung gedreht. Konstruieren Sie eine Abbildung, die diese geometrischen Operationen (in einem Schritt) ausführt.

(ii) Gegeben sei eine 2×2 Matrix $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Zusätzlich sei

$$\max\{|a|, |b|, |c|, |d|\} > 1.$$

Beweisen Sie, dass die Matrix A nicht orthogonal ist.

(iii) Untersuchen Sie, ob

$$\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right] := \max\{x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2\}$$

ein Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ definiert.

(iv) Seien zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ gegeben und sei $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ eine orthogonale Matrix. Beweisen Sie:

$$\measuredangle(x, y) = \measuredangle(Ax, Ay).$$

Hinweis: Verwenden Sie die bekannte Aussage $\langle x, y\rangle = \|x\|_2\|y\|_2 \cos(\measuredangle(x, y))$.

(10 Punkte)

Aufgabe 3:

(1) Schreiben Sie eine SCILAB-Funktion, die eine gegebene Matrix $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ in das Produkt einer orthogonalen Matrix Q und einer rechten oberen Dreiecksmatrix R zerlegt und diese Matrizen ausgibt.

(2) Testen Sie die Funktion aus (1) mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$.

(3) Geben Sie den maximalen Fehler, d. h. den betragsmäßig größten Eintrag der Matrix $A - Q \cdot R$ aus.

(4) Schreiben Sie eine Funktion, die überprüft, ob die Matrix Q orthogonal ist.

(5) Berechnen Sie in einer zweiten Rechnung die QR-Zerlegung mit dem SCILAB-Befehl `[Q,R] = qr(A)` für das Beispiel aus Aufgabenteil (2).

(6) Geben Sie auch für das Ergebnis aus (5) den maximalen Fehler aus, vgl. (3).

(7) Überprüfen Sie, ob die Matrix Q aus Aufgabenteil (5) orthogonal ist, vgl. (4).

(8) Überprüfen Sie, ob die Matrix Q aus Aufgabenteil (5) eine Drehung oder eine Spiegelung beschreibt.

(10 Punkte)