

Übungen zur Vorlesung

Praktische Mathematik für Medieninformatiker

Sommersemester 2015

PD Dr. Thorsten Hüls

Übungsblatt 2
22.4.2015

Abgabe: Mittwoch, 29.4.2015, 10:00 Uhr in V3-128, Postfach 180

Tutor: Julius Hülsmann, E-Mail: jhuelsma@math.uni-bielefeld.de

Aufgabe 4:

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 der Matrix A bzw. B mit Hilfe des charakteristischen Polynoms.
- (b) Bestimmen Sie für die Matrizen A bzw. B zugehörige Eigenvektoren zu den in Aufgabenteil (a) berechneten Eigenwerten.
- (c) Geben Sie den Fixpunktraum V der Matrix A bzw. B an und berechnen Sie jeweils dessen Dimension.
- (d) Sei S_φ eine Spiegelungsmatrix im $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die beiden Eigenräume dieser Matrix senkrecht zueinander stehen.
- (e) Sei $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$. Beweisen Sie, dass die Drehmatrix D_φ keine reellen Eigenwerte besitzt.

(10 Punkte)

Aufgabe 5:

Schreiben Sie ein SCILAB-Programm, das die folgenden Schritte durchführt:

- (1) Wahl eines Zufallsvektors $x_0 \in [-1, 1] \times [-1, 1]$.
- (2) Iteration dieses Vektors, d. h.:

$$x_n := Bx_{n-1}, \quad \text{für } n = 1, \dots, 10.$$

Hierbei ist die Matrix B aus Aufgabe 4 zu verwenden.

- (3) Plotten der Punkte $x_n, n = 0, \dots, 10$, wobei x_n und $x_{n+1}, n = 0, \dots, 9$ mit Linien zu verbinden sind.
- (4) Wiederholen der Schritte (1) bis (3) für 99 weitere Zufallsvektoren.
- (5) Interpretieren Sie kurz die erhaltene Abbildung.

(10 Punkte)

Aufgabe 6:

- (i) Gegeben seien zwei Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$.

Beweisen Sie, dass die Determinante

$$\det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

den Flächeninhalt des, durch die obigen Vektoren beschriebenen, Parallelogramms liefert.

- (ii) Geben Sie (mit Begründung) sämtliche orthogonalen, symmetrischen 2×2 -Matrizen an, die die Determinante 1 besitzen.
- (iii) Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Beweisen Sie die folgende Äquivalenz (beide Richtungen sind zu zeigen):

$$\det(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ besitzt den Eigenwert } 0.$$

(10 Punkte)