Übungen zur Vorlesung
Praktische Mathematik für Medieninformatiker
Sommersemester 2015

PD Dr. Thorsten Hüls

Übungsblatt 5
13.5.2015

Abgabe: Mittwoch, 20.5.2015, 10:00 Uhr in V3-128, Postfach 180

Tutor: Julius Hülsmann, E-Mail: `jhuelsma@math.uni-bielefeld.de`

Aufgabe 13:

(a) Untersuchen Sie, welche geometrischen Operationen die folgenden Matrizen beschreiben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{4,4}$ eine orthogonale Matrix, die den 3-dimensionalen Eigenraum $\mathrm{Eig}(A,1)$ besitzt.
Zusätzlich sei ein Vektor $v \in \mathrm{Eig}(A,1)^{\perp}$ gegeben, d. h.: $\langle v, w\rangle = 0$ für alle $w \in \mathrm{Eig}(A,1)$.

Beweisen Sie unter diesen Voraussetzungen: $Av = -v$.

Welche geometrische Operation beschreibt die Matrix A?

(10 Punkte)

Aufgabe 14:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ gegeben.

(1) Schreiben Sie eine SCILAB-Funktion, die die in der Vorlesung vorgestellte – nicht-optimierte Version – des Algorithmus nach Housholder zur Berechnung der QR-Zerlegung realisiert.

(2) Testen Sie Ihre Funktion für $n \in \{3, 30, 100\}$ mit jeweils einer Zufallsmatrix mit Einträgen aus dem Intervall $[-1, 1]$. Geben Sie den betragsmäßig größten Eintrag von

- $Q^T Q - I$,
- $A - QR$

aus.

(3) Liefert der Algorithmus die gleichen Ergebnisse, wenn

$$\alpha = \texttt{sign(y(1))*norm(y)}$$

gesetzt wird?

(4) Vergleichen Sie abschließend Ihre Ergebnisse aus (2) und (3) mit der Ausgabe der SCILAB-Funktion `[q,r] = qr(A)`. Messen Sie insbesondere die Laufzeiten der verschiedenen Algorithmen und stellen Sie die erhaltenen Ergebnisse aussagekräftig dar.

(10 Punkte)

Aufgabe 15:

(i) Sei $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ und sei $v \in \mathbb{R}^n$ mit $Qv = -v$ gegeben. Zusätzlich gelte

$$Qw = w \quad \text{für alle} \quad w \in \{x \in \mathbb{R}^n : x^T v = 0\}.$$

Beweisen Sie unter Verwendung einer Ähnlichkeitstransformation

$$\det(Q) = -1.$$

(ii) Sei $A = QR$ die, mit dem Housholder-Algorithmus berechnete QR-Zerlegung der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Zeigen Sie:

$$|\det(A)| = \prod_{i=1}^{n} |R_{i,i}|, \quad \text{wobei} \quad R = \begin{pmatrix} R_{1,1} & \dots & R_{1,n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & R_{n,n} \end{pmatrix}.$$

(iii) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie von Hand die QR-Zerlegung unter Verwendung des Algorithmus nach Housholder aus der Vorlesung.

(10 Punkte)