Übungen zur Vorlesung
Praktische Mathematik für Medieninformatiker
Sommersemester 2015

PD Dr. Thorsten Hüls

Übungsblatt 6
20.5.2015

Abgabe: Mittwoch, 27.5.2015, 10:00 Uhr in V3-128, Postfach 180
Tutor: Julius Hülsmann, E-Mail: `jhuelsma@math.uni-bielefeld.de`

Aufgabe 16:

(a) Sei $P \in \mathbb{R}^{3,3}$ ein Projektor mit $\dim(\mathrm{kern}(P)) = 1$.

Beweisen Sie, dass P nicht längenerhaltend ist.

(b) Bestimmen Sie den Projektor P, der jeden Punkt entlang der Menge $M := \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$ auf die Gerade $G := \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ abbildet.

(c) Bestimmen Sie den Projektor P, mit $\mathrm{bild}(P) = M$ und $\mathrm{kern}(P) = G$, wobei die Mengen M und G in dem Aufgabenteil (b) definiert sind.

(d) Sei $P \in \mathbb{R}^{2,2}$ ein Projektor mit $\dim(\mathrm{bild}(P)) = \dim(\mathrm{kern}(P)) = 1$.

Gilt dann $\|Px\|_2 \leq \|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$?

(10 Punkte)

Aufgabe 17: (Überblick über Kapitel 2)

(1) Geben Sie eine reelle 2×2-Matrix an, die keinen reellen Eigenwert besitzt.

(2) Beweisen Sie, dass die Spalten einer orthogonalen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \geq 2$, senkrecht aufeinander stehen.

(3) Geben Sie eine indefinite, orthogonale 2×2-Matrix an.

(4) Untersuche Sie, ob zwei ähnliche Matrizen die gleiche Orientierung besitzen.

(5) Berechnen Sie von Hand die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

(6) Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit $\dim(\mathrm{Eig}(A, 7)) = 1$ und sei $P \in \mathbb{R}^{n,n}$ ein Projektor mit $\mathrm{bild}(P) = \mathrm{Eig}(A, 7)$.

Beweisen Sie, dass $B := P \cdot A$ den Eigenwert 7 besitzt.

(7) Welche Definitheits-Eigenschaft besitzen Projektoren?

(8) Beweisen Sie, dass das Produkt zweier orthogonaler Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ auch orthogonal ist.

(9) Sei $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ eine Drehspiegelung. Welche geometrische Operation beschreibt die Matrix $A \cdot A$?

(10) Sei I die Einheitsmatrix im $\mathbb{R}^4$ und sei $QR = I$ die, mit dem Algorithmus aus der Vorlesung berechnete QR-Zerlegung.

Berechnen Sie von Hand die Matrizen Q und R.

Wie sehen diese Matrizen in beliebigen Raumdimensionen aus?

(10 Punkte)

Aufgabe 18:

(i) Sei

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad F(u) = \begin{pmatrix} \sin(u) \\ u^2 \cdot \cos(u) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $F'(u)$ und plotten Sie diese Kurve für $u \in [0, 2\pi]$ mit SCILAB.

(ii) Sei

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad F(u) = \begin{pmatrix} e^{\sin(u)} \\ \cos(u^2)^3 \\ u + \ln(u) \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $F'(u)$ und plotten Sie diese Kurve für $u \in [0, 2\pi]$ mit SCILAB.

(10 Punkte)