Übungen zur Vorlesung
Praktische Mathematik für Medieninformatiker
Sommersemester 2015

PD Dr. Thorsten Hüls

Übungsblatt 12
1.7.2015

Abgabe: Mittwoch, 8.7.2015, 10:00 Uhr in V3-128, Postfach 180
Tutor: Julius Hülsmann, E-Mail: `jhuelsma@math.uni-bielefeld.de`

Aufgabe 34:

Gegeben seien die Datenpaare $(-1, 4)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$.

Berechnen Sie von Hand das

(a) Polynom vom Grad 0,

(b) Polynom vom Grad ≤ 1,

(c) Polynom vom Grad ≤ 2,

(d) Polynom vom Grad ≤ 3,

das *möglichst nahe* an den gegebenen Daten liegt.

Erstellen Sie eine Abbildung, die die gegebenen Daten und die berechneten Polynome illustriert.

(10 Punkte)

Aufgabe 35:

(a) Sei $g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0 \end{cases}$
und beachten Sie, dass diese Abbildung beliebig oft stetig differenzierbar ist.

Beweisen Sie, dass in diesem Beispiel die Taylorreihe nicht mit der Funktion übereinstimmt:

$$\exists x \in \mathbb{R} : g(x) \neq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} x^j.$$

(b) Im Fall der Sinus- und Kosinus-Funktion tritt das in (a) beschriebene Problem nicht auf.

Verwenden Sie für $x \in \mathbb{R}$ die Taylorreihe

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} x^j$$

mit $f(x) = \sin(x)$ und $f(x) = \cos(x)$ zum Erhalt der bekannten Reihendarstellungen der Sinus- und der Kosinus-Funktion.

(c) Beweisen Sie unter Verwendung von Aufgabenteil (b) und der Reihenentwicklung der komplexen Exponentialfunktion

$$e^z = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}, \quad z \in \mathbb{C}$$

die Formel

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x), \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

(10 Punkte)

Aufgabe 36:

Sei

$$f(t) = \begin{cases} 2t, & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ 2t-2, & \text{für } \frac{1}{2} < t \le 1. \end{cases}$$

Gegeben seien die $m+1$ Datenpaare $\big(t_k, f(t_k)\big)$, mit $t_k = \frac{k}{m+1}$, $k = 0, \ldots, m$.

Schreiben Sie ein SCILAB-Programm, das die Koeffizienten der Exponentialsumme

$$p(t) = \sum_{j=0}^{m} a_j p_j(t), \quad \text{mit} \quad p_j(t) = \tfrac{1}{\sqrt{m+1}} e^{2\pi j t}, \quad j = 0, \ldots, m$$

bestimmt, die die gegebenen Daten interpoliert.

Die Berechnung ist für jedes $m \in \{3, 5, 11, 21, 41\}$ durchzuführen. Die gesuchten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_m$ sind hierbei durch Lösen eines linearen Gleichungssystems – Skript, Formel (6.6) – zu bestimmen.
Anschließend sind jeweils Real- und Imaginärteil von f und p zu plotten.

(10 Punkte)