

Übungen zur Vorlesung
CHAOTISCHE DYNAMIK
Wintersemester 2015/2016

PD Dr. Thorsten Hüls

Übungsblatt 1
22.10.2015

Abgabe: Donnerstag, 29.10.2015, 14:00 Uhr in der Vorlesung

Tutorin: Alina Girod, E-Mail: agirod@uni-bielefeld.de

Aufgabe 1:

Skizzieren Sie die Phasenbilder der folgenden Differential- bzw. Differenzengleichungen und geben Sie jeweils den zugehörigen Lösungsoperator an.

(a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$

(b) $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$

(c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$

(d) $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}.$

Phasenbilder können alternativ auch mit der entsprechenden NUMLAB-App erstellt werden.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Gegeben sei das, durch die Differenzengleichung

$$u_{n+1} = au_n(1 - u_n), \quad n \in \mathbb{N}, \quad a > 0$$

erzeugte dynamische System.

(i) Zeigen Sie, dass das obige System für alle $a > 0$, $a \neq 1$ einen Fixpunkt $\bar{u} \neq 0$ besitzt.

(ii) Für welche $a > 0$ existiert ein $\bar{x} \neq \bar{u}$ mit der Eigenschaft:

$$\bar{u} \in \gamma(\bar{x}) ?$$

Geben Sie \bar{x} explizit an.

(iii) Illustrieren Sie dieses Ergebnis anhand einer aussagekräftigen Grafik (Stair-Case-Diagramm).

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Gegeben sei das, durch die Abbildung

$$f : \begin{array}{l} [0, 1] \rightarrow [0, 1] \\ u \mapsto \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi u) + u \end{array}$$

erzeugte dynamische System $([0, 1], \mathbb{Z}, (f^n)_{n \in \mathbb{Z}})$.

Überprüfen Sie, ob die folgenden Mengen positiv bzw. negativ invariant sind:

$$\{0\}, \{\frac{1}{2}\}, \{1\}, [0, \frac{1}{4}], [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], [\frac{3}{4}, 1], [0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1], [0, 1].$$

(6 Punkte)

