

Übungen zur Vorlesung
CHAOTISCHE DYNAMIK
Wintersemester 2015/2016

PD Dr. Thorsten Hüls

Übungsblatt 5
19.11.2015

Abgabe: Donnerstag, 26.11.2015, 14:00 Uhr in Postfach 114
Tutorin: Alina Girod, E-Mail: agirod@uni-bielefeld.de

Aufgabe 13:

Sei $f : X \rightarrow X$ eine invertierbare Abbildung und seien ξ_1, ξ_2 zwei Fixpunkte von f . Ein Punkt $x \in X$ heißt

- *homokliner Punkt* bezüglich ξ_1 , falls $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} f^n(x) = \xi_1$,
- *heterokliner Punkt* bezüglich (ξ_1, ξ_2) , falls $\lim_{n \rightarrow -\infty} f^n(x) = \xi_1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \xi_2$.

Im Folgenden sei f die Hufeisenabbildung und X die zugehörige Cantormenge.

- (a) Neben dem Fixpunkt $\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ besitzt f einen weiteren Fixpunkt ξ_2 . Berechnen Sie diesen Fixpunkt.
- (b) Bestimmen Sie in $[\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{1}{3}]$ einen homoklinen Punkt bezüglich ξ_1 .
- (c) Bestimmen Sie in $[\frac{2}{3}, 1] \times [0, \frac{1}{3}]$ einen heteroklinen Punkt bezüglich (ξ_2, ξ_1) .
- (d) Illustrieren Sie diese Ergebnisse aussagekräftig unter Verwendung der NUM-LAB-App *Horseshoe*.

(6 Punkte)

Aufgabe 14:

Sei

$$f(x) = \begin{cases} ax, & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ a(1-x), & \text{für } \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases} \quad \text{mit } a \geq 3, \quad a \in \mathbb{N}.$$

Bestimmen Sie die maximale, positiv invariante Teilmenge K des Intervalls $I = [0, 1]$.

Hinweis: Für die Darstellung der Menge K sei auf Aufgabe 11 verwiesen. Insbesondere ist die positive Invarianz der gefundenen Menge formal nachzuweisen.

(6 Punkte)

Aufgabe 15:

Sei $J = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f : \begin{array}{l} J \rightarrow J \\ x \mapsto \sin(x) \end{array}$$

nicht strukturell stabil ist.

Hinweis: Man zeige zuerst, dass anziehende (abstoßende) Fixpunkte unter einer Konjugation auf anziehende (abstoßende) Fixpunkte abgebildet werden.

Alternativ kann auch direkt mit Aufgabe 8 (1) geschlossen werden.

(6 Punkte)