

Übungen zur Vorlesung
CHAOTISCHE DYNAMIK
Wintersemester 2015/2016

PD Dr. Thorsten Hüls

Übungsblatt 6
26.11.2015

Abgabe: Donnerstag, 3.12.2015, 14:00 Uhr in Postfach 114

Tutorin: Alina Girod, E-Mail: agirod@uni-bielefeld.de

Aufgabe 16:

Überprüfen Sie, ob die folgenden Abbildungen f beziehungsweise $g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ einen n -periodischen Orbit besitzen.

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -\frac{3}{2}x + \frac{7}{4}, & \text{für } \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

$$(b) \quad g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ -\frac{4}{3}x + \frac{5}{3}, & \text{für } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

(6 Punkte)

Aufgabe 17:

Carlo Miranda hat 1940 die folgende Verallgemeinerung des Zwischenwertsatzes aufgestellt:

Seien die folgenden Annahmen erfüllt:

(a) $k \geq 1$, $L > 0$ und $G := \{x \in \mathbb{R}^k : -L \leq x_i \leq L \forall i = 1, \dots, k\}$,

(b) $f \in C(G, \mathbb{R}^k)$,

(c) $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial G$,

(d) $f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, -L, x_{i+1}, \dots, x_k) \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, k$,

(e) $f_i(x_1, \dots, x_{i-1}, L, x_{i+1}, \dots, x_k) \leq 0$ für alle $i = 1, \dots, k$,

dann existiert ein $\bar{x} \in G$ mit $f(\bar{x}) = 0$.

Beweisen Sie diesen Satz.

Hinweis: Beweisen Sie den Satz zunächst unter der Annahme, dass (d) mit „ $\geq$ “ und (e) mit „ $\leq$ “ gilt. Wenden Sie hierzu den Fixpunktsatz von Brouwer auf die Abbildung F an, die komponentenweise durch

$$F_i(x) = x_i + \varepsilon_i f_i(x)$$

definiert wird.

(6 Punkte)

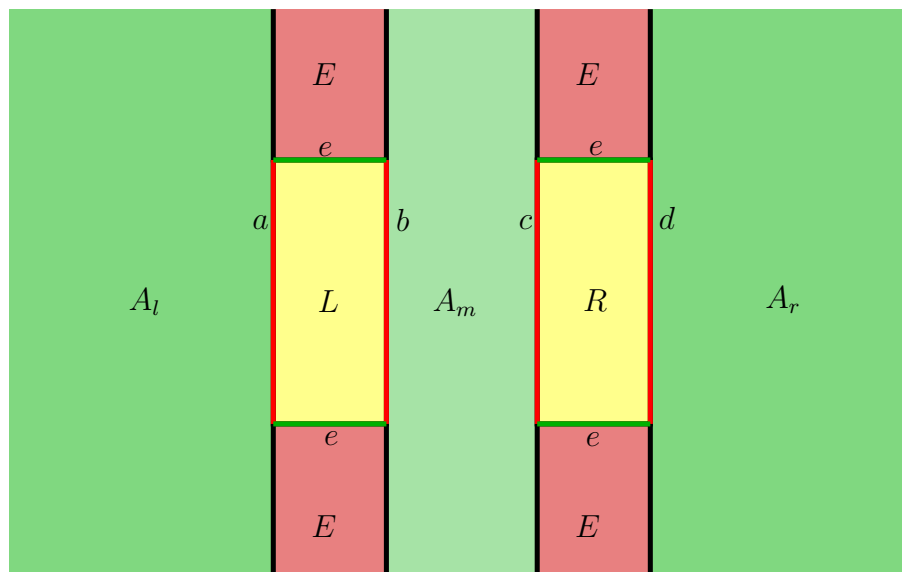
Aufgabe 18:

Sei g die in der Vorlesung eingeführte inverse Hufeisenabbildung.

Definieren Sie Mengen mit den folgenden Eigenschaften (die formal nachzuweisen sind):

- $\bar{L} = L, \bar{R} = R, \bar{E} = E,$
- A_l, A_r, A_m sind offene Mengen,
- $((L \dot{\cup} R) \cup E) \dot{\cup} A_l \dot{\cup} A_r \dot{\cup} A_m = \mathbb{R}^2,$
- $e = (L \dot{\cup} R) \cap E,$
- $a = L \cap \bar{A}_l, b = L \cap \bar{A}_m, c = R \cap \bar{A}_m, d = R \cap \bar{A}_r,$
- $g(a \cup d) \subset A_l,$
- $g(b \cup c) \subset A_r,$
- $g(L \dot{\cup} R) \subset \mathbb{R}^2 \setminus E.$

Hinweis: Die Grafik illustriert die Lage dieser Mengen.



(6 Punkte)