# Übungen zur Vorlesung
# CHAOTISCHE DYNAMIK
# Wintersemester 2015/2016

PD Dr. Thorsten Hüls

Übungsblatt 8
10.12.2015

**Abgabe: Donnerstag, 17.12.2015, 14:00 Uhr in Postfach 114**

Tutorin: Alina Girod, E-Mail: agirod@uni-bielefeld.de

**Aufgabe 22:**

Gegeben sei das dynamische System $\big(X, \mathbb{T}, (\varphi^t)_{t\in\mathbb{T}}\big)$, wobei $X$ ein metrischer Raum ist und $\mathbb{T} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{Z}\}$.
Sei $\bar{x} \in X$ ein Fixpunkt und $U \subset X$ eine offene Umgebung von $\bar{x}$.

Beweisen Sie die folgenden Beziehungen zwischen lokalen und globalen stabilen bzw. instabilen Mannigfaltigkeiten:

(i) $W^s(\bar{x}) = \bigcup_{t\le 0, t\in\mathbb{T}} \varphi^t(W_U^s(\bar{x}))$,

(ii) $W^u(\bar{x}) = \bigcup_{t\ge 0, t\in\mathbb{T}} \varphi^t(W_U^u(\bar{x}))$.

(6 Punkte)

**Aufgabe 23:**

Gegeben sei das durch die Abbildung

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{4}x^2 \end{pmatrix}$$

erzeugte zeitdiskrete dynamische System $\big(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}, (f^n)_{n\in\mathbb{Z}}\big)$.

(1) Sei $u_0 = \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}$ mit $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Folge $u_{n+1} = f(u_n)$, $n = 0, 1, \ldots$ gegen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ konvergiert.

(2) Geben Sie Graphendarstellungen der stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten explizit an (mit Beweis). Sind diese Darstellungen lokal oder global?

(6 Punkte)

**Aufgabe 24:**

Sei $Y = \left\{ f \in C^1([-1,1]) : \text{ mit (a), (b), (c), (d), (e)} \right\}$, wobei

(a) $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in [-1,1]$,

(b) $f'(0) = 0$ wobei $x = 0$ das einzige Maximum von $f$ ist und es gilt $f(0) = 1$,

(c) $f(1) =: -a < 0$,

(d) $b := f(a) > a$,

(e) $f(b) < a$.

Für $f \in Y$ und $a := -f(1)$ sei $T(f)(x) := -\frac{1}{a} f(f(-ax))$.

Überprüfen Sie, ob $T$ – wie in [19] behauptet – eine Abbildung von $Y$ nach $Y$ ist.

(6 Punkte)