

Übungen zur Vorlesung
CHAOTISCHE DYNAMIK
Wintersemester 2015/2016

PD Dr. Thorsten Hüls

Übungsblatt 10
7.1.2016

Abgabe: Donnerstag, 14.1.2016, 14:00 Uhr in Postfach 114
Tutorin: Alina Girod, E-Mail: agirod@uni-bielefeld.de

Aufgabe 28:

Gegeben sei die Differenzengleichung

$$u_{n+1} = A_n u_n, \quad A_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2+(-1)^n}{2} \\ \frac{2-(-1)^n}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (A) Die Matrizen A_n , $n \in \mathbb{Z}$ besitzen ausschließlich stabile Eigenwerte.
- (B) Es existiert ein $u_0 \in \mathbb{R}^2$, $\|u_0\| \leq 1$, so dass der zugehörige Vorwärtsorbit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt ist.
- (C) Die Differenzengleichung (1) besitzt eine exponentielle Dichotomie auf \mathbb{Z} .

(6 Punkte)

Aufgabe 29:

Die lineare Differenzengleichung

$$u_{n+1} = A_n u_n, \quad A_n \text{ invertierbar für } n \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

besitze auf \mathbb{Z} eine exponentielle Dichotomie mit den Daten $(K, \alpha_s, \alpha_u, P_n^s, P_n^u)$.
Gegeben sei zusätzlich die Differenzengleichung

$$v_{n+1} = (A_{n+1}^{-1})^T v_n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

- (i) Welche Beziehung besteht zwischen dem Lösungsoperator Φ von (2) und dem Lösungsoperator Ψ von (3)?
- (ii) Zeigen Sie, dass auch (3) eine exponentielle Dichotomie auf \mathbb{Z} besitzt und geben Sie insbesondere die zugehörigen Dichotomiedaten an.

(6 Punkte)

Aufgabe 30:

Die Theorie exponentieller Dichotomien kann auch für lineare Differentialgleichungen hergeleitet werden.

- (a) Übertragen Sie den in der Vorlesung – für lineare Differenzgleichungen – eingeführten Begriff der exponentiellen Dichotomie auf den Fall einer nicht-autonomen linearen Differentialgleichung der Form

$$u' = A(t)u, \quad t \in \mathbb{R}, \quad A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d,d}.$$

- (b) Untersuchen Sie, ob die linearen Differentialgleichungen

(b.1) $u' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} u,$

(b.2) $u' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} u,$

(b.3) $u' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u$

jeweils eine exponentielle Dichotomie auf \mathbb{R} besitzen. Geben Sie beim Vorliegen einer Dichotomie insbesondere die zugehörigen Dichotomiedaten an.

(6 Punkte)