Übungen zur Vorlesung
CHAOTISCHE DYNAMIK
Wintersemester 2015/2016

PD Dr. Thorsten Hüls

Übungsblatt 11
14.1.2016

Abgabe: Donnerstag, 21.1.2016, 14:00 Uhr in Postfach 114
Tutorin: Alina Girod, E-Mail: agirod@uni-bielefeld.de

Aufgabe 31:

Sei f ein Diffeomorphismus im $\mathbb{R}^2$ und ξ ein hyperbolischer Fixpunkt von f.
Sei $\bar{x}_\mathbb{Z}$ ein homokliner Orbit bezüglich ξ und es gelte die Transversalitätsbedingung

$$u_\mathbb{Z} \in S_\mathbb{Z},\ u_{n+1} = Df(\bar{x}_n)u_n,\ n \in \mathbb{Z} \quad \Leftrightarrow \quad u_n = 0\ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{1}$$

Beweisen Sie, dass die Variationsgleichung

$$u_{n+1} = Df(\bar{x}_n)u_n, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

eine exponentielle Dichotomie auf $\mathbb{Z}$ besitzt.

Hinweis: Es empfiehlt sich die folgende Vorgehensweise:

(i) Zeigen Sie, dass die Differenzengleichung

$$u_{n+1} = Df(\xi)u_n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

eine exponentielle Dichotomie auf $\mathbb{Z}$ besitzt.

(ii) Weisen Sie für ein hinreichend großes N unter Verwendung des Roughness-Theorems eine exponentielle Dichotomie von (2) auf $[N, \infty)$ bzw. $(-\infty, -N]$ nach.

(iii) Setzen Sie diese Dichotomien auf $\mathbb{Z}^+$ bzw. $\mathbb{Z}^-$ fort.

(iv) Verwenden Sie die Bedingung (1) um die halbseitigen Dichotomien zu einer Dichotomie auf $\mathbb{Z}$ zusammenzusetzen.

(9 Punkte)

Aufgabe 32:

Beweisen Sie die folgende Aussage:

Seien Y und Z zwei Banachräume und $F \in \mathcal{C}^1(Y, Z)$, wobei $DF(y_0)$ für ein $y_0 \in Y$ ein Homöomorphismus ist.
Weiter existieren Konstanten $\kappa, \eta, \delta > 0$ mit

$$\begin{aligned} \|DF(y) - DF(y_0)\| &\leq \kappa < \eta \leq \frac{1}{\|DF(y_0)^{-1}\|} \quad \forall y \in B_\delta(y_0), \\ \|F(y_0)\| &\leq (\eta - \kappa)\delta. \end{aligned}$$

Dann besitzt F eine eindeutige Nullstelle $\bar{y} \in B_\delta(y_0)$.

Hinweis: Definieren Sie den Operator T mittels

$$T(y) := y - DF(y_0)^{-1}F(y), \quad y \in Y$$

und zeigen Sie, dass der Banachsche Fixpunktsatz auf $T_{|B_\delta(y_0)}$ anwendbar ist.

(9 Punkte)