Übungen zur Vorlesung
CHAOTISCHE DYNAMIK
Wintersemester 2015/2016

PD Dr. Thorsten Hüls

Übungsblatt 12
21.1.2016

Abgabe: Donnerstag, 28.1.2016, 14:00 Uhr in Postfach 114
Tutorin: Alina Girod, E-Mail: agirod@uni-bielefeld.de

Aufgabe 33:

Gegeben sei die Differenzengleichung

$$u_{n+1} = A_n u_n, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

wobei Invertierbarkeit der Matrizen $A_n \in \mathbb{R}^{d,d}$ **nicht** vorausgesetzt wird.
Für $n \geq m$ bezeichnet $\Phi(n,m)$ den zugehörigen Lösungsoperator.
Die (nicht-invertierbare) Differenzengleichung (1) besitzt eine exponentielle Dichotomie mit den Daten $(K, \alpha_{s,u}, P_n^{s,u})$, falls die Projektoren komplementär sind, d. h. $P_n^s + P_n^u = I$ für $n \in \mathbb{Z}$ und die folgenden Aussagen gelten:

$$\begin{aligned}
\Phi(n,m)P_m^{s,u} &= P_n^{s,u}\Phi(n,m), \quad \forall n \geq m,\\
\|\Phi(n,m)P_m^s x\| &\leq K\mathrm{e}^{-\alpha_s(n-m)}\|P_m^s x\|, \quad \forall n \geq m,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\\
\|\Phi(n,m)P_m^u x\| &\geq \tfrac{1}{K}\mathrm{e}^{\alpha_u(n-m)}\|P_m^u x\|, \quad \forall n \geq m,\ \forall x \in \mathbb{R}^d,\\
\|P_n^{s,u}\| &\leq K \quad \forall n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

(i) Beweisen Sie, dass diese Definition für invertierbare Matrizen zu der, aus der Vorlesung bekannten Dichotomie-Definition, äquivalent ist.

(ii) Gegeben seien die Matrizen bzw. Projektoren

$$A_n = \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{für } n \leq 0, \\[2ex] \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, & \text{für } n > 0, \end{cases} \qquad P_n^s(c) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \text{für } n \leq 0, \\[2ex] \begin{pmatrix} 1 & c \cdot (\frac{1}{4})^{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{für } n > 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob die Differenzengleichung (1) für alle $c \in \mathbb{R}$ eine exponentielle Dichotomie auf $\mathbb{Z}$ mit den Projektoren $P_n^s(c)$ und $P_n^u(c) = I - P_n^s(c)$ besitzt.

(iii) Eine exponentielle Dichotomie heißt regulär, falls Invertierbarkeit in der instabilen Richtung vorliegt, d. h. $\Phi(n,m)_{|\mathcal{R}(P_m^u)}$ ist für alle $n \geq m$ invertierbar.

Untersuchen Sie, ob das System aus Aufgabenteil (ii) mit den gegebenen Projektoren eine reguläre Dichotomie besitzt.

(9 Punkte)

Aufgabe 34:

Gegeben sei die Funktion

$$f : \begin{array}{rcl} [0,1] & \rightarrow & [0,1] \\ x & \mapsto & -4x^2 + 4x. \end{array}$$

(a) Zeigen Sie, dass das durch diese ein-dimensionale Abbildung erzeugte dynamische System mindestens zwei unterschiedliche homokline Orbits bezüglich des Fixpunktes 0 besitzt:

(a.1) Erstellen Sie eine Grafik, in der diese Orbits (mittels graphischer Iteration) eingezeichnet werden.

(a.2) Geben Sie zwei homokline Orbits explizit an.

Hinweis: Für die Tent-Map ist diese Konstruktion einfacher, vgl. Aufgabe 26.

(b) Überprüfen Sie, ob die Variationsgleichung entlang eines homoklinen f-Orbits eine exponentielle Dichotomie (im Sinne der Definition aus Aufgabe 33) besitzt.

(9 Punkte)