Vertiefung NWI: 1. Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Mittwoch, 10.4.2013

1. Modellieren zufälliger Ereignisse

Motivation: k-maliges Werfen einer fairen Münze

(a) Für $k = 15$: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (Ws.), mindestens $(k-1)$-mal das gleiche Ergebnis (d.h. $(k-1)$-mal Kopf oder $(k-1)$-mal Zahl) zu erzielen?

(b) Für die fleißigen Münzwerfer: Wie groß ist die Ws., in $n = 1000$ Versuchen, bei denen die Münze je 15-mal geworfen wird, mindestens einmal das Ereignis aus (a) zu beobachten?

Begriffe: (Bsp.: Münzwurf, 1x Würfeln)

- *Elementarereignis* ω*:* ein möglicher Ausgang eines Zufallsexperiments
- *Ereignisraum* $\Omega \neq \emptyset$*:* Menge aller Elementarereignisse ω
  Vorläufige Annahme: Ω sei eine endliche Menge
- *Ereignis* A*:* eine beliebige Teilmenge A von Ω, d.h. $A \subset \Omega$
  Bemerkung: $A = \emptyset$ und $A = \Omega$ sind zulässig
  Sprechweise: "A tritt ein" $\Leftrightarrow \omega \in A$
- *Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses* $\omega \in \Omega$*:* $p(\omega) \in [0, 1]$
  Forderung: $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$ (Normierung)
  (Bsp.: nichtfaire Münze, nichtfairer Würfel)
- *Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses* $A \subset \Omega$*:* $P(A) = \sum_{\omega\in A} p(\omega) \in [0, 1]$
  Konvention: Im Fall $A = \emptyset$ setzen wir $P(\emptyset) = 0$

Beobachtung: p ist eine Abbildung und ordnet jedem Elementarereignis eine Zahl zwischen 0 und 1 zu: $p : \Omega \to [0, 1]$ mit $\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$

Wichtig: $P(\emptyset) = 0$ und $P(\Omega) = 1$

Beispiel: $1\times$ Würfeln
$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{2,4,6\}$ (Werfen einer geraden Augenzahl)
$p(\omega) = 1/6$ für alle $\omega \in \Omega$
$P(A) = p(2) + p(4) + p(6) = 1/2$

Fragen: Im allgemeinen, wie wählen wir Ω? Wie wählen wir p?

Beispiele:

- $1\times$ Würfeln, ungeschicktes Modellieren:
  $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ und $p(\omega) = 1/6$ für alle $\omega \in \{1,2,3,4,5,6\}$ sowie $p(7) = 0$
- $2\times$ Würfeln, gerade Augenzahl gewürfelt: Verschiedene Wahlen von Ω
  - $\Omega_1 = \{1,\dots,6\}^2$
    $\omega = (i,j) \in \Omega_1$ bedeute, daß wir im ersten Wurf i und im zweiten Wurf j geworfen haben
    $p_1((i,j)) = 1/36$ für alle $(i,j) \in \Omega_1$
    $A_1 = \{(i,j) \in \Omega_1 : i+j \text{ gerade}\}$
    $P_1(A_1) = 1/2$
  - $\Omega_2 = \{\{1,1\},\{1,2\},\dots,\{1,6\},\{2,2\},\{2,3\},\dots,\{2,6\},\dots,\{3,3\},\dots,\{3,6\},\dots,\{6,6\}\}$
    $\omega = \{i,j\} \in \Omega_2$ bedeute, daß wir in den beiden Würfen zusammen i und j geworfen haben
    $p_2(\{i,j\}) = 1/36$ für $i = j$, aber $p_2(\{i,j\}) = 2/36$ für $i \neq j$
    $A_2 = \{\{i,j\} \in \Omega_2 : i+j \text{ gerade}\}$
    $P_2(A_2) =$? (muß wieder $1/2$ sein)
  - $\Omega_3 = \{2,\dots,12\}$
    $\omega = k \in \Omega_3$ bedeute, daß die Augensumme gleich k ist
    Tabelle für die Werte $p_3(k)$, $k = 2,\dots,12$, aufstellen
    $A_3 = \{2,4,6,8,10,12\}$
    $P_3(A_3) = p_3(2) + p_3(4) + p_3(6) + p_3(8) + p_3(10) + p_3(12)$ (muß wieder $1/2$ sein)
- Wie groß ist die Ws., daß eine Familie mit zwei Kindern mindestens einen Sohn hat?
  Verschiedene Wahlen von Ω, Bestimmen der $p(\omega)$:
  - $\Omega_1 = \{(M,M),(M,J),(J,M),(J,J)\}$
    $p_1(\omega) = 1/4$ für alle $\omega \in \Omega$ (idealisierend)
  - Nicht idealisierend: Erhebe statistische Daten für p_1
  - $\Omega_2 = \{\{M,M\},\{M,J\},\{J,J\}\}$; beachte $\{M,J\} = \{J,M\}$ als zweielementige Mengen
    Weiterhin idealisierend: $p_2(\omega) = 1/3$??? Korrekte Werte mittels Ω_1 und p_1 bestimmen
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Reißzwecke "auf dem Rücken" landet? Heuristisch bestimmen. Warum funktioniert das?

Definition: *Gleichverteilung*
Wir sprechen von Gleichverteilung, wenn alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind, d.h., wenn eine Konstante $p_0 \in [0, 1]$ existiert mit $p(\omega) = p_0 \quad \forall\, \omega \in \Omega$

Beachte: Nur für endliche Ω möglich! Berechne p_0.

Bemerkung: Sinnvoll, falls Symmetrien vorhanden sind.

Folgerungen:

(a) $p(\omega) = \dfrac{1}{|\Omega|} \quad \forall\, \omega \in \Omega$

(b) $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|} \quad \forall\, A \subset \Omega$

Beweis:

(a) Folgt direkt aus der Berechnung von p_0.

(b) Aus (a) folgt sofort $\quad P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) = \sum_{\omega \in A} \dfrac{1}{|\Omega|} = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$.