Universität Bielefeld

Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz SS 2013

Vertiefung NWI: 11. Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Mittwoch, 26.6.2013

11. Zufallsgrößen mit Dichten

Erinnerung
Der Satz von de Moivre-Laplace zeigt für eine mit Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße S_n, daß

$$\mathbb{P}\Big\{a < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b\Big\} \to \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{für } n \to \infty.$$

Motivation
Für große n können wir also die Ws., daß die ZV $(S_n - np)/\sqrt{np(1-p)}$ in einem Intervall $(a, b]$ liegt, durch ein Integral approximieren. Wir möchten nun allgemeiner Zufallsgrößen mit Werten im Kontinuum (z.B. $\mathbb{R}$, $[0,\infty)$, $[0,T]$, $[0,T)$) mit Hilfe solcher Integrale einführen.

Definition: *Dichte*
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$, die stückweise stetig ist, heißt *Dichte*, sofern

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

gilt.

Erläuterung
Für eine Funktioin $g \ge 0$, die auf jedem kompakten Intervall $[-N, +N]$ Riemann-integrierbar ist, ist die Folge $\{\int_{-N}^{+N} g(x)\,\mathrm{d}x\}_{N\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend in N. Ist die Folge unbeschränkt, so setzen wir $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \infty$, andernfalls

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{+N} g(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Beispiele von Dichten

- Dichte der Standardnormalverteilung, vgl. Satz von de Moivre-Laplace

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2} \ .$$

- Dichte der Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ und Varianz $\sigma^2 > 0$

$$\varphi(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \ .$$

  Die Substitution $y = (x-\mu)/\sigma$ zeigt, daß $x \mapsto \varphi(x;\mu,\sigma^2)$ eine Dichte ist.

- Dichte der uniformen Verteilung auf $[a,b]$ für $-\infty < a < b < \infty$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Dichte der Exponentialverteilung zum Parameter $\alpha > 0$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

Definition: *Dichte und Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße*
f sei eine Dichte. Dann heißt eine Zufallsgröße X *absolutstetig mit Dichte* f, falls

$$F_X(x) := \mathbb{P}\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f(y)\,\mathrm{d}y \qquad \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

Die Funktion F_X heißt *Verteilungsfunktion* von X.

Warnung
Angenommen, wir haben eine ZV X derart, daß

$$(*) \qquad \mathbb{P}\{a < X \leq b\} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

für alle a, b mit $a < b$ (mit einer über ganz $\mathbb{R}$ integrierbaren Funktion f). Dann gilt für jedes n

$$0 \leq \mathbb{P}\{X = a\} \leq \mathbb{P}\{a - 1/n < X \leq a\} = \int_{a-1/n}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

Das heißt, für jedes a gilt

$$\mathbb{P}\{X = a\} = 0 \ .$$

Eine diskrete Zufallsgröße kann somit die Eigenschaft (*) nicht haben!

Bemerkungen

- Im Rahmen dieser Vorlesung nehmen wir einige Einschränkungen in Kauf: Wir zeigen z.B. nicht, unter welchen Voraussetzungen eine Dichte existiert. Auch spezifizieren wir den Wahrscheinlichkeitsraum nicht. Hier gilt es zu beachten, daß $\mathbb{P}\{X \in A\}$ in der Regel nicht für *alle* Teilmengen von $\mathbb{R}$ definiert werden kann. Uns soll genügen, daß alles gutgeht, wenn wir uns auf Mengen A beschränken, die durch höchstens abzählbare Vereinigungen und Schnitte von Intervallen dargestellt werden können.

- Vergleichen Sie die bekannten Eigenschaften der Verteilungsfunktion für diskrete Zufallsgrößen mit jenen der Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße mit Dichte:

  - Verteilungsfunktionen sind monoton wachsend
  - Es gelten $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$
  - Falls die Zufallsgröße X eine Dichte hat, so ist die Verteilungsfunktion F_X stetig. Für diskrete Zufallsgrößen dagegen ist die Verteilungsfunktion stückweise konstant.

  (Machen Sie zwei Skizzen!)

- Dichten sind nicht eindeutig bestimmt.
  (Beispiel: weitere Dichten für die uniforme Verteilung)

- Ist die Dichte f stetig in einem Punkt a, so gilt

$$f(a) = \left.\frac{\mathrm{d}F_X(y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=a} .$$

Beispiele

- Verteilungsfunktion der uniformen Verteilung
- Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung
- Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung

Sprechweise
Eine ZG heißt normalverteilt, uniform verteilt, exponentialverteilt, etc, falls sie eine entsprechende Dichte hat.

Rechenregeln
Hat X eine Dichte f, so gelten für alle $-\infty \leq a < b \leq \infty$

- $\mathbb{P}\{a < X < b\} = \mathbb{P}\{a \leq X \leq b\} = \mathbb{P}\{a \leq X < b\} = \mathbb{P}\{a < X \leq b\}$
- $\mathbb{P}\{a < X \leq b\} = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \mathbb{P}\{X \leq b\} - \mathbb{P}\{X \leq a\} = F_X(b) - F_X(a)$
- $\mathbb{P}\{X \leq b\} = F_X(b) = \int_{-\infty}^b f(x)\ \mathrm{d}x$
- $\mathbb{P}\{a < X\} = \int_a^\infty f(x)\ \mathrm{d}x = 1 - \int_{-\infty}^a f(x)\ \mathrm{d}x = 1 - \mathbb{P}\{X \leq a\} = 1 - F_X(a)$

Beispiel
Berechnen der Wahrscheinlichkeit, daß eine exponentialverteilte Zufallsgröße mit Parameter α einen Wert größer als a annimmt bzw. einen Wert zwischen a und b.

- Direktes Ausrechnen des entsprechenden Integrals
- Erst Berechnen der Verteilungsfunktion, dann der Ws.

Definition: *Erwartungswert und Varianz*
Sei X eine Zufallsgröße mit einer Dichte f.

- Falls $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\,\mathrm{d}x < \infty$, so sagen wir, daß *der Erwartungswert von X existiert*. Er ist in diesem Fall gegeben durch

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} x f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

  (*Warnung:* So dürfen wir nur rechnen, wenn wir bereits gezeigt haben, daß der Erwartungswert existiert.)

- Falls der Erwartungswert von X existiert, definieren wir die *Varianz von X* als

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

  Ist $\mathrm{Var}(X) < \infty$, so sagen wir, daß die Varianz existiert.

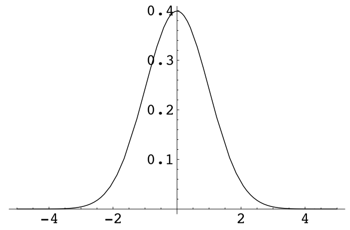
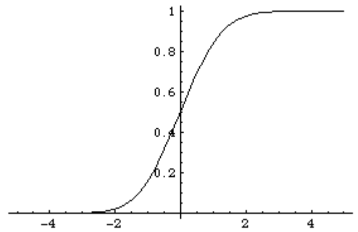
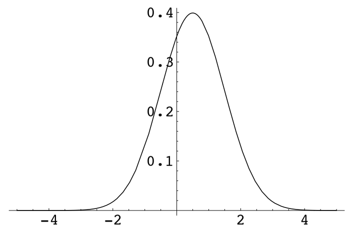
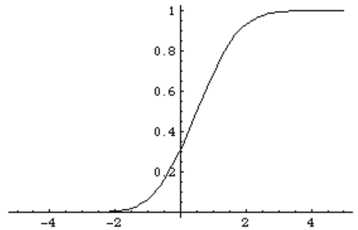
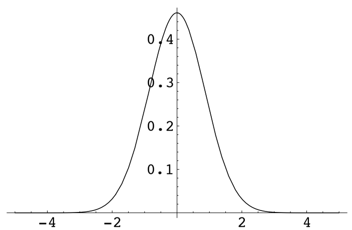
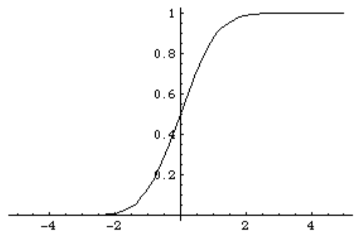
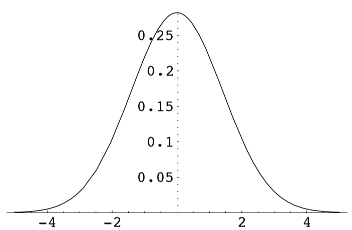
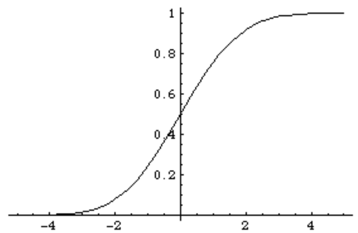
Bemerkung
Vergleichen Sie mit dem Fall diskreter Zufallsgrößen.

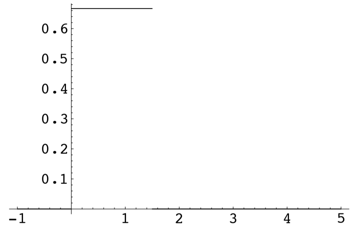
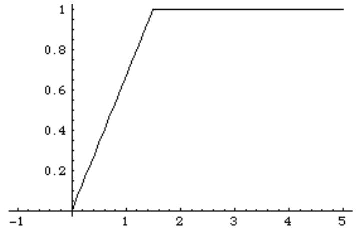
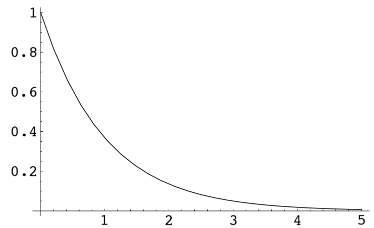
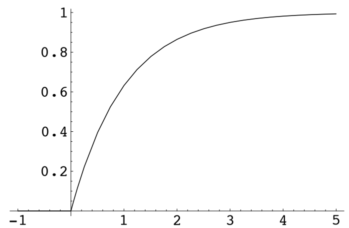
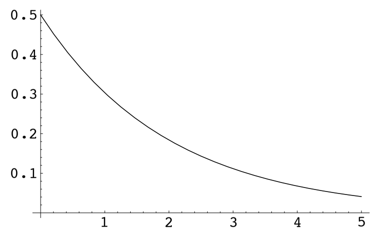
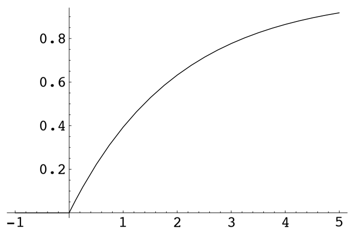
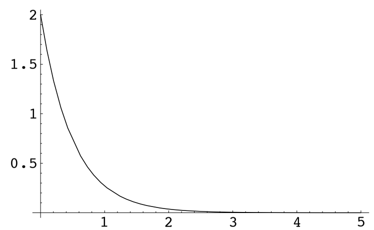
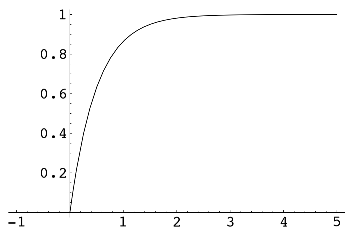
Beispiele *(siehe Tabelle im Anhang)*

- Uniforme Verteilung (direktes Ausrechnen – warum ist der Erwartungswert $(a+b)/2$?)
- Normalverteilung (verwende Substitution)
- Exponentialverteilung (verwende partielle Integration)

Bemerkung
Die bekannten Rechenregeln gelten weiter:

- Linearität des Erwartungswerts
- $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\,\mathrm{Var}(X)$ für $a, b \in \mathbb{R}$
- $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$
- Tschebyscheffsche Ungleichung

Verteilung	**Parameter**	**Dichte**	**Verteilungsfunktion**
Standardnormal-verteilung	$(\mu = 0,\, \sigma = 1)$		
Normalverteilung	$\mu = 1/2,\, \sigma = 1$		
	$\mu = 0,\, \sigma = \sqrt{3}/2$		
	$\mu = 0,\, \sigma = \sqrt{2}$		

Verteilung	Parameter	Dichte	Verteilungsfunktion
uniforme Verteilung	$a = 0,\ b = 3/2$		
Exponential-verteilung	$\alpha = 1$		
	$\alpha = 1/2$		
	$\alpha = 2$		

Zufallsgrößen mit Dichten

Verteilung	Parameter	Dichte	Verteilungsfunktion	Erwartungswert	Varianz
Standardnormalverteilung	$(\mu = 0,\ \sigma = 1)$	$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}$	$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\,dy$	0	1
Normalverteilung	$\mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$	$\varphi(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$	$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y;\mu,\sigma)\,dy$	μ	σ^2
uniforme Verteilung	$a, b \in \mathbb{R},\ a < b$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \le x \le b \\ 1 & \text{für } x > b \end{cases}$	$(a+b)/2$	$(a-b)^2/12$
Exponentialverteilung	$\alpha > 0$	$f(x) = \begin{cases} \alpha \mathrm{e}^{-\alpha x} & \text{für } x \ge 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\alpha x} & \text{für } x \ge 0 \end{cases}$	$1/\alpha$	$1/\alpha^2$