Vertiefung NWI: 3. Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Mittwoch, 24.4.2013

3. Kombinatorik: Geordnetes / ungeordnetes Ziehen mit/ohne Zurücklegen

1. Beispiel: Gegeben ein Alphabet mit n verschiedenen Symbolen. Wie viele verschiedene Wörter der Länge k können gebildet werden?

Klassifizierung: *geordnetes Ziehen mit Zurücklegen*

- Reihenfolge der Symbole im Wort ist relevant
- Symbole können mehrfach verwendet werden

Allgemeiner Fall:
Geordnetes Ziehen mit Zurücklegen von k Kugeln aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln (die Kugeln seien numeriert von 1 bis n)

$$\Omega = \{1, \dots, n\}^k \quad \text{und} \quad |\Omega| = n^k$$

2. Beispiel: Gegeben n verschiedenfarbige Perlen. k Perlen werden ausgewählt und auf eine Schnur gezogen. Wie viele verschiedene Muster sind möglich?

Klassifizierung: *geordnetes Ziehen ohne Zurücklegen*

- Reihenfolge der Perlen auf der Schnur ist relevant
- Jede Perle kann nur einmal verwendet werden

Allgemeiner Fall:
Geordnetes Ziehen ohne Zurücklegen von $k \leq n$ Kugeln aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln (die Kugeln seien numeriert von 1 bis n)

$$\Omega = \{\omega \in \{1, \dots, n\}^k \colon \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\} \quad \text{und} \quad |\Omega| = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Spezialfall: $k = n$
Ω ist die Menge aller Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ und $|\Omega| = n! = n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1$

3. Beispiel: Wie groß ist die Anzahl der möglichen Tipps im Lotto "6 aus 49"?

Klassifizierung: *ungeordnetes Ziehen ohne Zurücklegen*

- Reihenfolge des Ankreuzens der Lottozahlen ist irrelevant
- Jede Zahl kann höchstens einmal angekreuzt werden pro Tipp

Allgemeiner Fall:
Ungeordnetes Ziehen ohne Zurücklegen von $k \leq n$ Kugeln aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln (die Kugeln seien numeriert von 1 bis n)

$$\Omega = \{\{\omega_1, \ldots, \omega_k\} \subset \{1, \ldots, n\} \colon \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\}$$

ist die Menge aller k-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ und

$$|\Omega| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

4. Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es, k ununterscheidbare Murmeln auf n Urnen zu verteilen?

Idee: Wir wählen für jede Murmel, in welche Urne wir sie legen.

Klassifizierung: *ungeordnetes Ziehen mit Zurücklegen*

- Reihenfolge ist egal, denn uns interessiert die Anzahl Murmeln in jeder Urne, aber nicht, in welcher Reihenfolge die Murmeln in die Urnen gelegt wurden
- Urnen können mehrfach gewählt werden, da mehrere Murmeln in dieselbe Urne gelegt werden können

6 Urnen mit 7 Murmeln: ooo | o | | oo | o |

Die erste Urne enthält drei Murmeln, die zweite Urne eine Murmel, die dritte Urne ist leer, ... Auch die letzte Urne ist leer.

Wir notieren dies als $(1, 1, 1, 2, 4, 4, 5)$, wobei wir die Nummern der Urnen so oft schreiben, wie es Murmeln in der Urne gibt, und die Nummern aufsteigend ordnen.

Wir bestimmen die Anzahl Möglichkeiten, indem wir zählen, wie viele Möglichkeiten es gibt, k ununterscheidbare Murmeln und $n-1$ Trennwände anzuordnen. Dazu müssen wir aus den insgesamt $n-1+k$ unterscheidbaren, d.h. numerierten, Plätzen k Plätze für die Murmeln auswählen. (Äquivalent: Wähle $n-1$ Plätze für die Wände.) Mit Hilfe des 3. Beispiels:

$$\binom{n+k-1}{k} \quad \text{Möglichkeiten}$$

Allgemeiner Fall:
Ungeordnetes Ziehen mit Zurücklegen von k Kugeln aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln (die Kugeln seien numeriert von 1 bis n)

$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_k) \in \{1, \dots, n\}^k \colon \omega_1 \le \omega_2 \le \dots \le \omega_k\}\ ,$$

wobei wir alle Permutationen des k-Tupels $(\omega_1, \dots, \omega_k)$ als äquivalent betrachten und uns $(\omega_1, \dots, \omega_k)$ mit $\omega_1 \le \omega_2 \le \dots \le \omega_k$ als Repräsentant dient. Es ist

$$|\Omega| = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

Alternativ

$$\widetilde{\Omega} = \{(\widetilde{\omega}_1, \dots, \widetilde{\omega}_n) \in \{0, \dots, k\}^n \colon \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\omega}_i = k\}\ ,$$

wobei $\widetilde{\omega}_i$ angibt, wie oft die Kugel Nummer i gezogen wurde. Da beide Alternativen äquivalent sind, gilt $|\Omega| = \left|\widetilde{\Omega}\right|$.

Weitere Beispiele

(a) Wie groß ist die Ws., mit vier identischen Würfeln vier verschiedenen Augenzahlen zu werfen?

(b) Wie groß ist die Ws., beim Lotto "6 aus 49" genau vier Richtige zu haben?

(c) Wie viele Möglichkeiten gibt es für zwei ununterscheidbare Spatzen, sich auf vier Stromleitungen zu verteilen?

Weitere Beispiele

(a) Wie groß ist die Ws., mit vier identischen Würfeln vier verschiedenen Augenzahlen zu werfen?

Betrachte die Würfel als unterscheidbar: *geordnetes Ziehen mit Zurücklegen*

$$\Omega = \{1, \ldots, 6\}^4, \ |\Omega| = 6^4, \ \text{mit Gleichverteilung } P$$

Günstige Ausgänge (vier verschiedene Augenzahlen): *geordnetes Ziehen ohne Zurücklegen*

$$A = \{\omega \in \Omega \colon \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\} \subset \Omega \text{ und } |A| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{5}{18} = 0.2\overline{7}$$

(b) Wie groß ist die Ws., beim Lotto “6 aus 49” genau vier Richtige zu haben?

Unser Tipp seien die sechs verschiedenen Zahlen $\{\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_6\} \subset \{1, \ldots, 49\}$.

Ziehung der Lottozahlen, vgl. 3. Beispiel: *ungeordnetes Ziehen ohne Zurücklegen*

$$\Omega = \{\{\omega_1, \ldots, \omega_6\} \subset \{1, \ldots, 49\} \colon \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\}, \ |\Omega| = \binom{49}{6}, \ \text{mit Gleichverteilung } P$$

Günstige Ausgänge (genau vier Richtige):

$$A = \{\{\omega_1, \ldots, \omega_6\} \in \Omega \colon |\{\omega_1, \ldots, \omega_6\} \cap \{\overline{\omega}_1, \ldots, \overline{\omega}_6\}| = 4\} \subset \Omega \text{ mit } |A| = \binom{6}{4}\binom{49-6}{2}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\,\frac{43\cdot 42}{2\cdot 1}}{\frac{49\cdot\ldots 44}{6\cdot 1}} = 0.00096862\ldots$$

(c) Wie viele Möglichkeiten gibt es für zwei ununterscheidbare Spatzen, sich auf vier Stromleitungen zu verteilen?

Verteile Spatzen auf die Leitungen wie Murmeln in Urnen: *ungeordnetes Ziehen mit Zurücklegen*

$$\binom{4+2-1}{2} = 10 \text{ Möglichkeiten}$$

-oo-	-o-	-o-	-o-	—	—	—	—	—	—
—	-o-	—	—	-oo-	-o-	-o-	—	—	—
—	—	-o-	—	—	-o-	—	-oo-	-o-	—
—	—	—	-o-	—	—	-o-	—	-o-	-oo-