Universität Bielefeld

Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz SS 2013

Vertiefung NWI: 4. Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Mittwoch, 08.5.2013

4. Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: *Einmal würfeln mit fairem Würfel*

- Wie groß ist die Ws., daß eine 6 gewürfelt wurde?
- Wie groß ist die Ws., daß eine 6 gewürfelt wurde, wenn wir schon wissen, daß die geworfene Zahl durch 3 teilbar ist? (Welcher Einsatz erscheint Ihnen angemessen, wenn Sie auf 6 wetten wollen und Ihr Freund Ihnen sagt, er hätte eine durch drei teilbare Zahl geworfen?)

Definition: *bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B*
Für Ereignisse A und B mit $P(B) > 0$

$$P(A \,|\, B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Bei Gleichverteilung ist dies gerade der relative Anteil von A in B.

Rechenregeln: Für B mit $P(B) > 0$ sei $Q(A) := P(A \,|\, B)$ für alle Ereignisse A. Dann definiert Q eine Wahrscheinlichkeit, d.h., für Q gelten alle Rechenregeln, die wir für Wahrscheinlichkeiten kennengelernt haben.

Warnung: Es kann sowohl $P(A \,|\, B) > P(A)$ als auch $P(A \,|\, B) < P(A)$ gelten:

- $\Omega = \{1, \dots, 6\}$ mit Gleichverteilung
- $A_1 = \{6\}$, $A_2 = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 6\}$
- Dann ist $P(A_1 \,|\, B) = \frac{1}{2} > \frac{1}{6} = P(A_1)$, aber $P(A_2 \,|\, B) = \frac{1}{2} > \frac{2}{3} = P(A_2)$.

Beispiel: *Familie mit zwei Kindern*

$\Omega = \{JJ, JM, MJ, MM\}$ mit Gleichverteilung

$XY \in \Omega$ bezeichne jeweils X das Geschlecht des älteren Kindes, Y jenes des jüngeren Kindes

- Wie groß ist die Ws., daß die Familie mindestens einen Jungen hat?

  $A = \{JJ, JM, MJ\}$ mit $|A| = 3$ und $P(A) = 3/4$

- Wir wissen, daß die Familie mindestens einen Jungen hat. Wie groß ist die Ws.., daß das andere Kind auch ein Junge ist? Warum beträgt diese Ws. *nicht* $1/2$?

  $B = \{JJ\}$ mit $P(B \mid A) = |B \cap A|/|A| = 1/3$

- Wir besuchen eine Familie, von der wir wissen, daß sie zwei Kinder hat. Ein Junge öffnet die Tür. Wie groß ist die Ws., daß das andere Kind ebenfalls ein Junge ist? Warum ist diese Ws. verschieden von jener im vorigen Fall?

  In der Definition von $XY \in \Omega$ sei nun X das Geschlecht des Kindes, welches die Tür öffnet, und Y das Geschlecht des anderen Kindes.

  $C = \{JJ, JM\}$ (ein Junge öffnet die Tür)

  $D = \{JJ, MJ\}$ (das andere Kind, welches nicht die Tür öffnet, ist ein Junge)

  $P(D \mid C) = P(D \cap C)/P(C) = |\{JJ\}|/|\{JJ, JM\}| = 1/2$

Rechenregel:
Aus der Definition der bedingten Ws. folgt sofort $P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B)$. Per vollständiger Induktion läßt sich zeigen:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1) \ldots P(A_n \mid A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Beispiel: *Skat*
Wie groß ist die Ws., daß beim Skat jeder Spieler genau ein As hat?

$\Omega = \{(S_1, S_2, S_3) \colon S_i \subset \{1, \ldots, 32\},\ |S_i| = 10 \text{ für } i = 1,2,3,\ |S_1 \cup S_2 \cup S_3| = 30\}$

Spieler 1 bekommt die Kartenmenge S_1, Spieler 2 bekommt S_2, Spieler 3 bekommt S_3

P Gleichverteilung

Die Karten mit den Nummern 1–4 seien die Asse

$A_i = \{|S_i \cap \{1, \ldots, 4\}| = 1\}$ (Spieler i hat genau ein As, $i = 1,2,3$)

Gesucht: $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ (jeder Spieler hat genau ein As)

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 \cap A_2)$$

mit

$$P(A_1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{28}{9}}{\binom{32}{10}}, \qquad P(A_2 \mid A_1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{19}{9}}{\binom{22}{10}}, \qquad P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) = \frac{\binom{2}{1}\binom{10}{9}}{\binom{12}{10}}$$

also

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 0.0556\ldots$$

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

- Ω Ereignisraum
- $B_1, B_2, \ldots$ endliche oder abzählbare *Partition* von Ω
  (d.h., die B_i sind paarweise disjunkt und $\Omega = \bigcup_i B_i$)
- $P(B_i) > 0$ für alle i

Dann gilt $P(A) = \sum_i P(A \,|\, B_i)P(B_i)$ für alle Ereignisse A.

Beweis:
Schreibe A als Vereinigung der paarweise disjunkten Mengen $A \cap B_i$, verwende die Rechenregeln für Ws. und die Definition der bedingten Ws.

Beispiel/Motivation
Herr Zimperlich haßt es, naß zu werden. Wenn der Wetterbericht Regen ankündigt, nimmt er seinen Schirm mit einer Ws. von 90% mit. (Die fehlenden 10% sind seiner Vergeßlichkeit geschuldet.) Auch wenn der Wetterbericht einen trockenen Tag verheißt, nimmt Herr Zimperlich mit einer Ws. von 30% trotzdem seinen Schirm mit. Bielefeld ist bekanntlich recht regnerisch, und wir wollen daher annehmen, daß für 60% aller Tage Regen vorhergesagt wird.

- Wie groß ist die Ws., daß Herr Zimperlich das Haus ohne Schirm verläßt?

  $\Omega = \{r, nr\} \times \{s, ns\}$. Dabei sei z.B. (r, ns) das Elementarereignis, daß Regen vorhergesagt wurde und Herr Zimperlich ohne Schirm das Haus verläßt

  Ereignisse: $R = \{(r,s),(r,ns)\}$ (Regen angesagt), $S = \{(r,s),(nr,s)\}$ (Schirm dabei)

  geg.: $P(S \,|\, R) = 9/10$, $P(S \,|\, R^c) = 3/10$, $P(R) = 6/10$

  Satz von der totalen Ws.:

  $$P(S^c) = P(S^c \cap R) + P(S^c \cap R^c) = P(S^c \,|\, R)P(R) + P(S^c \,|\, R^c)P(R^c)$$

  und konkret

  $P(S^c) = [1 - P(S \,|\, R)]P(R) + [1 - P(S \,|\, R^c)][1 - P(R)] = 34/100$

- Sie haben den Wetterbericht nicht gehört, aber Sie sehen, daß Herr Zimperlich seinen Schirm dabei hat. Wie groß ist die Ws., daß für diesen Tag Regen vorhergesagt wurde?

  ges.: $P(R \,|S)$

  $$P(R \,|\, S) = \frac{P(R \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S \,|\, R)P(R)}{P(S \,|\, R)P(R) + P(S \,|\, R^c)P(R^c)}$$

  (unter Verwendung des Satzes von der totalen Ws.)

  Konkret: $P(R \,|\, S) = (9/10)(6/10)/(66/100) = 9/11$

Satz von Bayes

- Ω Ereignisraum
- $B_1, B_2, \ldots$ endliche oder abzählbare *Partition* von Ω
- $P(B_i) > 0$ für alle i
- A Ereignis mit $P(A) > 0$

Dann gilt für jedes i

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \mid B_i) P(B_i)}{\sum_j P(A \mid B_j) P(B_j)}$$

Beweis
Der Beweis kann durch die gleiche Rechnung geführt werden wie im obigen Beispiel.