Vertiefung NWI: 5. Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Mittwoch, 15.5.2013

5. Unabhängigkeit von Ereignissen und die Binomialverteilung

5.1 Unabhängigkeit

Beispiel: *Zweimal würfeln mit fairem Würfel*
Die Ereignisse "Eine 1 im ersten Wurf" und "Eine 6 im zweiten Wurf" sollten *unabhängig voneinander* sein. Wie kann das mathematisch modelliert werden?

$\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$, P Gleichverteilung, sowie $A = \{1\} \times \{1, \dots, 6\}$, $B = \{1, \dots, 6\} \times \{6\}$
Beachte: Es gilt $P(A \,|\, B) = 1/6 = P(B)$.

Definition: *Unabhängigkeit zweier Ereignisse*
Zwei Ereignisse $A, B \subset \Omega$ heißen *unabhängig*, wenn $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ gilt.

Satz: Für zwei Ereignisse $A, B \subset \Omega$ mit $P(B) > 0$ gilt

$$A, B \text{ unabhängig} \quad \Longleftrightarrow \quad P(A \,|\, B) = P(A)$$

Bemerkungen

- Wenn wir zweimaliges Würfeln mit $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$ und Gleichverteilung P modellieren, nehmen wir bereits an, daß die Würfe unabhängig sind.

  Seien $A = A_1 \times \{1, \dots, 6\}$ und $B = \{1, \dots, 6\} \times B_2$.

  $$P(A \cap B) = \frac{|A_1| \cdot |B_2|}{|\Omega|} = \frac{|A_1| \cdot |\{1, \dots, 6\}|}{|\Omega|} \times \frac{|\{1, \dots, 6\}| \cdot |B_2|}{|\Omega|} = P(A)P(B)$$

- Umgekehrt können wir das Hintereinanderausführen zweier unabhängiger Zufallsexperimente (Ω_1, p_1) und (Ω_2, p_2) modellieren durch (Ω, p) mit $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ und $p(\omega_1, \omega_2) = p_1(\omega_1)p_2(\omega_2)$.

  (Denken Sie an das Werfen eines fairen Würfels gefolgt vom Werfen eines nicht fairen Würfels.)

- Lotto: Viele Spieler tippen jede Woche auf dieselben Zahlen. Ist dieses Verhalten rational?
  - Ziehungen unabhängig, jeder Tipp gleichwahrscheinlich,
  - aber Auszahlungsbetrag hängt vom Tipp ab.

- Disjunkt $=$ Unabhängig?
  - Seien A und B disjunkt. Dann ist $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$, also sind A und B unabhängig genau dann, wenn $P(A) = 0$ oder $P(B) = 0$.
  - Umgekehrt zeigt das Beispiel mit dem zweimaligen Würfeln, daß unabhängige Ereignisse nicht disjunkt sein müssen.
- A, B unabhängig $\iff$ A, B^c unabhängig $\iff$ $A^\mathsf{c}, B^\mathsf{c}$ unabhängig
- Wann ist A unabhängig von sich selbst? Ist das möglich?

  $$P(A) = P(A \cap A) \stackrel{!}{=} P(A) \cdot P(A) = P(A)^2$$

  Dies gilt genau dann, wenn $P(A) \in \{0, 1\}$.

Definition: *Unabhängigkeit von n Ereignissen*
$A_1, \ldots, A_n \subset \Omega$ heißen *unabhängig*, wenn

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \cdots \cdot P(A_{i_k})$$

gilt für alle $k = 2, \ldots, n$ und alle Auswahlen $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ von k verschiedenen Indizees.

Beispiel: $n = 3$
Um zu prüfen, ob A, B, C unabhängig sind, müssen also die folgenden Bedingungen geprüft werden.

- Alle Paare:
  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$
- Alle /das Tripel: $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$

Beispiel: *Es genügt nicht, paarweise Unabhängigkeit zu prüfen.*

- Werfen eines regelmäßigen Tetraeders mit Flächen in Rot, Gelb, Blau, Bunt
- $\Omega = \{r, g, b, x\}$ mit Gleichverteilung
- Ereignisse: $R = \{r, x\}$ (untere Seite enthält Rot), $G = \{g, x\}$, $B = \{b, x\}$
- Dann sind R, G, B paarweise unabhängig, aber nicht alle drei unabhängig.

Beispiel: *Es genügt nicht, $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \ldots P(A_n)$ zu prüfen.*

- Dreifacher Münzwurf: $\Omega = \{K, Z\}^3$ mit Gleichverteilung
- Ereignisse:
  $A = \{(K, K, K), (K, K, Z), (K, Z, K), (Z, K, K)\}$ (mindestens zweimal Kopf),
  $B = \{K\} \times \{K, Z\}^2$ (Kopf im ersten Wurf),
  $C = \{(K, K, K), (Z, K, K), (K, Z, Z), (Z, Z, Z)\}$ (das gleiche Ergebnis im 2. und 3. Wurf)
- Dann gilt $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, aber A, B, C sind nicht paarweise unabhängig.

5.2 Binomialverteilung

Beispiel:
Ws. für genau drei Sechsen bei fünfmaligem Würfeln mit fairem / nicht fairem Würfel

- $\Omega_1 = \{1, \ldots, 6\}^5$ mit P_1 Gleichverteilung und $A_1 = \{\omega \in \Omega\colon \ \ldots\}$

  Dabei gebe ω_i für $\omega \in \Omega$ jeweils das Ergebnis des i-ten Wurfs an.

- $\Omega_2 = \{0, 1\}^5$ mit $P_2(\omega) = \left(\frac{1}{6}\right)^{\sum_{i=1}^5 \omega_i} \left(\frac{5}{6}\right)^{5-\sum_{i=1}^5 \omega_i}$

  Dabei bedeute $\omega_i = 1$, daß wir im i-ten Wurf eine Sechs geworfen haben.

  $A_2 = \left\{\omega \in \Omega\colon \sum_{i=1}^{5} \omega_i = 3\right\}$ und $P(A_2) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2$

- Was ändert sich, wenn der Würfel nicht fair ist?

Bernoulli-Experimente:

- Ein Zufallsexperiment, das nur "Erfolg" und "Mißerfolg" als mögliche Ausgänge hat, heißt *Bernoulli-Experiment*. Wir wählen $\Omega = \{0, 1\}$ (mit 1 für "Erfolg") sowie $p(1) = p$ (Erfolgsws.) und $p(0) = 1 - p =: q$ für die Elementarereignisse.

- Wiederholen wir ein Bernoulli-Experiment n-mal unabhängig, so wählen wir $\Omega = \{0, 1\}^n$ und

  $$p((\omega_1, \ldots, \omega_n)) = p^{\sum_{i=1}^n \omega_i} q^{n-\sum_{i=1}^n \omega_i} \ .$$

  Wir sprechen von einem *Bernoulli-Experiment der Länge* n.

Binomialverteilung:

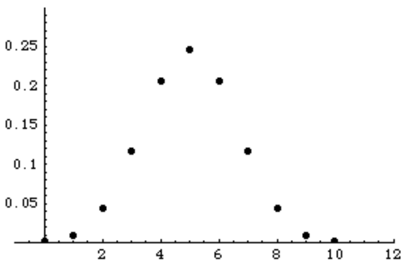
- Geg.: Ein Bernoulli-Experiment der Länge n mit Erfolgsws. $p \in [0, 1]$
- Ges.: Ws. für genau $k \in \{0, \ldots, n\}$ Erfolge
- $A_k = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \{0, 1\}^n \colon \ \sum_{i=1}^n \omega_i = k\}$
- $b(k; n, p) := P(A_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$
- Die binomische Formel zeigt, daß $k \mapsto b(k; n, p)$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $\{0, \ldots, n\}$ definiert. Diese heißt *Binomialverteilung zu den Parametern* p *und* n.

Binomial-Verteilung

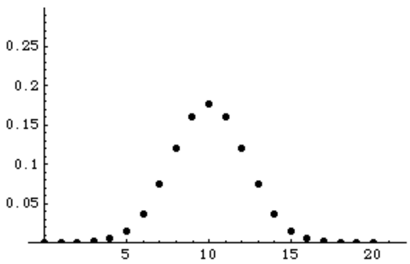
Erfolgswahrscheinlichkeit p

Anzahl Versuche n

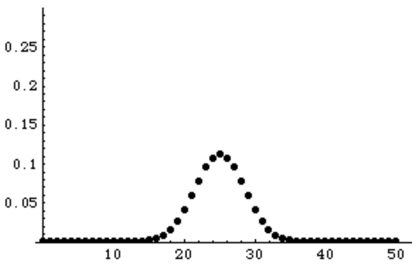
p=1/2



n=10

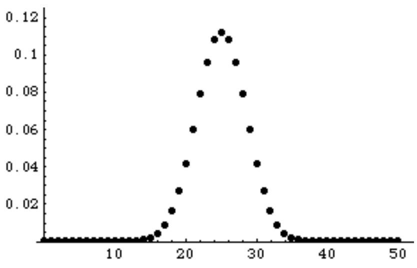


n=20

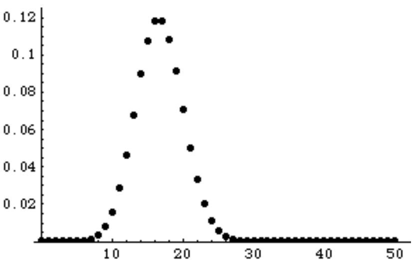


n=50

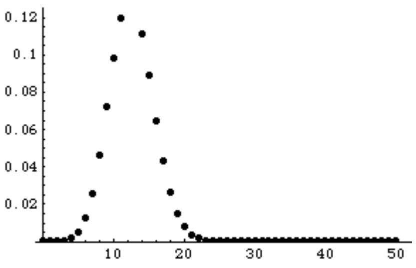
n=50



p=1/2

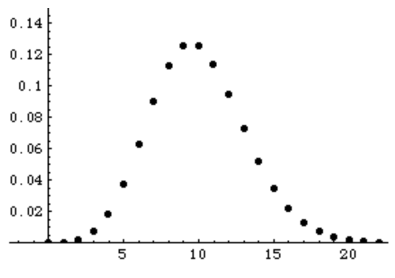


p=1/3

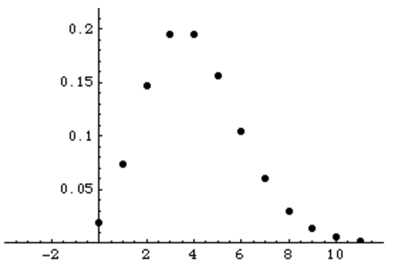


p=1/4

n=1000



p=1/100



p=1/250