Universität Bielefeld

Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz SS 2013

Vertiefung NWI: 7. Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Mittwoch, 29.6.2013

7. Unabhängigkeit von Zufallsgrößen, Erwartungswert und Varianz

7.1 Unabhängigkeit von Zufallsgrößen

Definition
Die Zufallsgrößen $X_1, \dots, X_n$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p) heißen *unabhängig*, wenn für *jede* Wahl $x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)$ die Ereignisse $\{X_1 = x_1\}, \dots, \{X_n = x_n\}$ unabhängig sind.

Folgerung
Die Zufallsgrößen $X_1, \dots, X_n$ sind genau dann unabhängig, wenn ihre gemeinsame Verteilung, d.h. die Verteilung P_X des Vektors $X = (X_1, \dots, X_n)$, die folgende *Produktdarstellung* hat:

$$P_X(x_1, \dots, x_n) = P_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot P_{X_n}(x_n) \quad \text{für alle } x_1, \dots, x_n$$

Folgerung
Die Zufallsgrößen $X_1, \dots, X_n$ sind genau dann unabhängig, wenn für *jede* Wahl $A_1 \subset X_1(\Omega)$,...,$A_n \subset X_n(\Omega)$ die Ereignisse $\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_n \in A_n\}$ unabhängig sind.

Beweis $(n = 2)$

"$\Leftarrow$" Wähle $A_i = \{x_i\}$, $i = 1, 2$.

"$\Rightarrow$"
$$\begin{aligned} P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) &= \sum_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) \\ &= \sum_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2} P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) = P(X_1 \in A_1) \cdot P(X_2 \in A_2) \end{aligned}$$

Dabei haben wir beim ersten Gleichheitszeichen in der zweiten Zeile die Unabhängigkeit der Zufallsgrößen verwendet.

Beispiel
Wiederholtes Werfen einer Münze oder eines Würfels, wobei X_i das Ergebnis des i-ten Wurfs sei.

7.2 Erwartungswert und Varianz einer Zufallsgröße

Beispiel: *einmal Würfeln*

- Fairer Würfel: $\mathbb{E}[X] = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$ (arithmetisches Mittel)
- Falls nicht alle Ausgänge gleichwahrscheinlich?
- Würfel mit fünf identischen Seiten mit Sechs, die letzte Seite zeige den Wert k:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{6+6+6+6+6+k}{6} = 6 \cdot \frac{5}{6} + k \cdot \frac{1}{6} = 6\,\mathbb{P}\{X=6\} + k\,\mathbb{P}\{X=k\} = \sum_{l \in X(\Omega)} l\,\mathbb{P}\{X=l\} \,.$$

Definition: *Erwartungswert und Varianz*

- Der *Erwartungswert* einer diskreten Zufallsgröße X mit Zielbereich $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}X = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}\{X = x\} \,,$$

  sofern $\sum_{x \in X(\Omega)} |x| \mathbb{P}\{X = x\} < \infty$ *(absolute Konvergenz)*. Wir sprechen in diesem Fall von der *Existenz des Erwartungswerts*.

- Falls der Erwartungswert von X existiert, definieren wir die *Varianz* von X durch

$$\operatorname{Var} X = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}[X])^2 \mathbb{P}\{X = x\} \,.$$

Mehr über Varianzen und deren Interpretation in der nächsten VL.

Bemerkungen

- Die Bedingung, daß die den Erwartungswert definierende Reihe absolut konvergent sein muß, garantiert, daß wir die Summanden beliebig umsortieren dürfen.
- Es gilt daher

$$\sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}\{X = x\} = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega) \,,$$

  sofern eine der Reihen absolut konvergent ist. (Vgl. auch obiges Beispiel zum Würfeln.)

- Wenn Ω oder auch nur $X(\Omega)$ endlich ist, so existiert der Erwartungswert. Nimmt X nur nicht-negative Werte an, können wir einfach anfangen, den Erwartungswert auszurechnen. Ist das Ergebnis endlich, so existiert der Erwartungswert.

Beispiel
Sei X eine ZV mit $\mathbb{P}\{X = -1\} = \mathbb{P}\{X = +1\} = 1/4$ und $\mathbb{P}\{X = 3\} = 1/2$.
Dann existiert $\mathbb{E}[X]$ (nur endlich viele Summanden), und es gilt

$$\mathbb{E}[X] = -1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 3\frac{1}{2} = 3/2 \notin X(\Omega) \,.$$

Beispiel: *Poisson-Verteilung*
Sei X Poisson-verteilt, d.h., es existiere ein $\lambda > 0$ mit $\mathbb{P}\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}$ für alle $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
Der Erwartungswert existiert, weil die folgende Rechung ein endliches Ergebnis hat (alle Summanden sind nichtnegativ).

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = \lambda\ .$$

Beispiel: *geometrische Verteilung*
Sei X geometrisch verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$, d.h., es gelte $\mathbb{P}\{X = k\} = (1-p)^{k-1}p$ für alle $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$.
Der Erwartungswert existiert, weil die folgende Rechung ein endliches Ergebnis hat (auch hier sind alle Summanden sind nichtnegativ).

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p = p \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^k\Big)\Big|_{x=1-p} = p\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\Big)\Big|_{x=1-p}\ ,$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen folgt, da eine Potenzreihe im Innern ihres Konvergenzradius gliedweise differenziert werden darf. Weiter folgt mit Hilfe der bekannten Formel für die Summe einer geometrischen Reihe

$$\mathbb{E}[X] = p\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{1}{1-x}\Big)\Big|_{x=1-p} = p\,\frac{1}{(1-x)^2}\Big|_{x=1-p} = \frac{1}{p}\ .$$

Satz: *Der Erwartungswert ist linear.*
Es seien $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p), deren Erwartungswerte existieren, und $a, b \in \mathbb{R}$ zwei Konstanten.

Dann ist $aX + bY$ ebenfalls eine Zufallsgröße, der Erwartungswert von $aX + bY$ existiert, und es gilt

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\,\mathbb{E}[X] + b\,\mathbb{E}[Y]\ .$$

Beweis:
Wir dürfen annehmen, daß $a, b \neq 0$.

Nehmen wir zunächst an, der Erwartungswert von $aX + Y$ existiert. Dann dürfen alle Reihen beliebig umsortiert werden:

$$\mathbb{E}[aX + bY] = \sum_{\omega\in\Omega} [aX(\omega) + bY(\omega)]p(\omega) = a \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)p(\omega) + b \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)p(\omega) = a\,\mathbb{E}[X] + b\,[Y]\ .$$

Eine analoge Rechung mit Betragszeichen und Abschätzungen zeigt die Existenz des Erwartungswerts:

$$\sum_{\omega\in\Omega} |aX(\omega) + bY(\omega)|p(\omega) \leqslant |a| \sum_{\omega\in\Omega} |X(\omega)|p(\omega) + |b| \sum_{\omega\in\Omega} |Y(\omega)|p(\omega) < \infty\ ,$$

da nach Voraussetzung $\mathbb{E}X$ und $\mathbb{E}Y$ existieren.

Beispiel: *Binomialverteilung*
Sei X binomialverteilt mit Parametern n und p. Der Erwartungswert von X existiert, da der Zielbereich von X endlich ist.

- 1. Versuch:
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \dots \qquad \text{(mit binomischer Formel und etwas Geschick)}$$

- 2. Versuch:
Wähle $\Omega = \{0,1\}^n$. Dann hat die Anzahl der Erfolge X eine Darstellung $X = \sum_{i=1}^n X_i$ mit $X_i(\omega) = \omega_i$. Aus
$$\mathbb{E}[X_i] = 0 \cdot \mathbb{P}\{X_i = 0\} + 1 \cdot \mathbb{P}\{X_i = 1\} = p$$
folgt mit der Linearität des Erwartungswerts sofort
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p = np \, .$$

Beispiel: *St. Petersburger Paradoxon (Erwartungswert muß nicht existieren)*
Ein Casino möchte folgendes Spiel anbieten: Eine faire Münze wird geworfen, bis zum ersten Mal *Kopf* erscheint. Passiert dies beim n-ten Wurf, so ist die Auszahlung $X = 2^n$. Dabei gilt natürlich $P(X = 2^n) = 2^{-n}$. Die Probe $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1$ zeigt, daß X als Zufallsvariable mit Zielbereich $\{2^n \colon n \in \mathbb{N}\}$ wohldefiniert ist.

Was wäre ein fairer Einsatz für dieses Spiel? Wir wollen den Einsatz fair nennen, wenn der Einsatz gleich dem erwarteten Gewinn ist. Wir suchen also $\mathbb{E}[X]$. Nun ist
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \mathbb{P}\{X = 2^n\} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty \, .$$

Der Erwartungswert existiert also nicht, und ein fairer Einsatz kann nicht bestimmt werden.