

## Vertiefung NWI: 8. Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Mittwoch, 5.6.2013

### 8. Unabhängigkeit von Zufallsgrößen, Erwartungswert und Varianz

#### 8.1 Erwartungswert und Unabhängigkeit

Aus der Linearität des Erwartungswerts folgen:

$$\mathbb{E}[aX] = a \mathbb{E}[X] \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$$

für  $a \in \mathbb{R}$  und  $\mathbb{R}$ -wertige Zufallsgrößen  $X, Y$ , deren Erwartungswerte existieren.

Gilt auch  $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$ ?

**Beispiel:** Es gibt  $X, Y$  mit  $\mathbb{E}[X \cdot Y] \neq \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$ .

Es seien  $\mathbb{P}\{X = +1\} = \mathbb{P}\{X = -1\} = 1/2$  und  $Y = -X$ . Dann gelten

$$\mathbb{E}[X] = -\mathbb{E}[Y] = 0 \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[-1] = -1.$$

#### Satz

Seien  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  und  $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  zwei *unabhängige* Zufallsgrößen, deren Erwartungswerte existieren. Dann existiert der Erwartungswert von  $X \cdot Y$ , und es gilt  $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$ .

#### Beweis

Wir nehmen wiederum zunächst an, daß der Erwartungswert von  $X \cdot Y$  existiert. Wir beginnen mit der folgenden Darstellung: Für  $z \neq 0$  gilt

$$\mathbb{P}\{XY = z\} = \sum_{y \neq 0} \mathbb{P}\{XY = z \mid Y = y\} \mathbb{P}\{Y = y\} = \sum_{y \neq 0} \mathbb{P}\{X = \frac{z}{y} \mid Y = y\} \mathbb{P}\{Y = y\}.$$

Mit Hilfe der Unabhängigkeit von  $X$  und  $Y$  folgt  $\mathbb{P}\{X = \frac{z}{y} \mid Y = y\} = \mathbb{P}\{X = \frac{z}{y}\}$ , also

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \sum_z z \mathbb{P}\{XY = z\} = \sum_{z \neq 0} \sum_{y \neq 0} \frac{z}{y} y \mathbb{P}\{X = \frac{z}{y}\} \mathbb{P}\{Y = y\} = \sum_{x \neq 0} \sum_{y \neq 0} xy \mathbb{P}\{X = x\} \mathbb{P}\{Y = y\},$$

und Sortieren der Terme zeigt

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] = \left( \sum_{y \neq 0} y \mathbb{P}\{Y = y\} \right) \left( \sum_{x \neq 0} x \mathbb{P}\{X = x\} \right) = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].$$

Eine analoge Rechnung zeigt die Existenz des Erwartungswerts.

**Beispiel:**  $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$  impliziert nicht, daß  $X$  und  $Y$  unabhängig sind.

Die Hilfszufallsgrößen  $X_1$  und  $Y_1$  seien unabhängig mit

$$\mathbb{P}\{X_1 = 0\} = \mathbb{P}\{X_1 = 1\} = \frac{1}{2} = \mathbb{P}\{Y_1 = 0\} = \mathbb{P}\{Y_1 = 1\}.$$

Definiere  $X = X_1 + Y_1$  und  $Y = |X_1 - Y_1|$ . Dann sind  $X$  und  $Y$  *nicht* unabhängig, und aber  $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$  gilt, denn

- $\mathbb{P}\{X = 1, Y = 0\} = 0$ , da  $\{X = 1, Y = 0\} = \emptyset$ , während  $\mathbb{P}\{X = 1\} = 2 \cdot \frac{1}{4} > 0$  und  $\mathbb{P}\{Y = 0\} = 2 \cdot \frac{1}{4} > 0$ ;
- $\mathbb{E}[X \cdot Y] = 0 \cdot \mathbb{P}\{\dots\} + 1 \cdot \mathbb{P}\{X \cdot Y = 1\} + 2 \mathbb{P}\{X \cdot Y = 2\} = 0 + \mathbb{P}\{X = 1, Y = 1\} + 0 = \frac{1}{2}$   
und  $\mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .

## 8.2 Varianz

### Zur Erinnerung

Die Varianz einer Zufallsgröße  $X$  mit existierendem Erwartungswert ist gegeben durch

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}[X])^2 \mathbb{P}\{X = x\}$$

(gewichtete quadratische Abweichung vom Erwartungswert)

### Bemerkung

$$\text{Var}(X) \geq 0$$

### Beispiel

Zufallsgrößen  $X, Y$  mit

$$\mathbb{P}\{X = +1\} = \frac{1}{2} = \mathbb{P}\{X = -1\} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\{Y = +100\} = \frac{1}{2} = \mathbb{P}\{Y = -100\}$$

Dann ist  $\mathbb{E}[X] = 0 = \mathbb{E}[Y]$ , aber

$$\text{Var}(X) = (+1)^2 \frac{1}{2} + (-1)^2 \frac{1}{2} = 1 \quad \text{und} \quad \text{Var}(Y) = (+100)^2 \frac{1}{2} + (-100)^2 \frac{1}{2} = 10\,000$$

### Beispiel: Bernoulli-Variable (Spezialfall der Binomialverteilung mit $n = 1$ )

Zufallsgröße  $X$  mit  $\mathbb{P}\{X = +1\} = p = 1 - \mathbb{P}\{X = 0\}$

$$\mathbb{E}[X] = p \quad \text{und} \quad \text{Var}(X) = (1 - \mathbb{E}[X])^2 p + (0 - \mathbb{E}[X])^2 (1 - p) = (1 - p)^2 p + p^2 (1 - p) = p(1 - p)$$

### Beispiel: gleichverteilte Zufallsgröße

Zufallsgröße  $X$  mit  $\mathbb{P}\{X = k\} = 1/n$  für  $k = 1, \dots, n$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^n k \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2} \quad \text{und} \quad \text{Var}(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$$

### Lemma

Für alle  $a \in \mathbb{R}$  gilt  $\mathbb{E}[(X - a)^2] = \text{Var}(X) + (\mathbb{E}[X] - a)^2$

### Beweis

$$\mathbb{E}[(X - a)^2] = \mathbb{E}[((X - \mathbb{E}[X]) + (\mathbb{E}[X] - a))^2] = \dots = \text{Var}(X) + (\mathbb{E}[X] - a)^2$$

### Folgerung

$\mathbb{E}[(X - a)^2]$  wird minimal für  $a = \mathbb{E}[X]$ . In diesem Fall ist  $\mathbb{E}[(X - a)^2] = \text{Var}(X)$ .

### Folgerungen und wichtige Rechenregel

Die Wahl  $a = 0$  zeigt

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Es gilt daher stets  $(\mathbb{E}[X])^2 \leq \mathbb{E}[X^2]$ .

**Satz**

$X, Y$  diskrete Zufallsgrößen mit existierendem Erwartungswert,  $a, b \in \mathbb{R}$

- (a)  $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$
- (b)  $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$ ,  
wobei  $\text{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$
- (c) Wenn  $X$  und  $Y$  unabhängig sind, dann gilt  $\text{Var}(X + Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ .
- (d) Für diskrete Zufallsgrößen gilt: Wenn  $\text{Var}(X) = 0$ , dann ex. eine Konstante  $c$  mit  $\mathbb{P}\{X = c\} = 1$ .  
Diese Konstante muß  $c = \mathbb{E}[X]$  sein.

**Beweis**

(a)–(c)

Verwende  $\text{Var}(Z) = \mathbb{E}[(Z - \mathbb{E}[Z])^2]$  und die Rechenregeln für den Erwartungswert.

(d)

$$0 = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}[X])^2 \mathbb{P}\{X = x\}$$

Alle Summanden sind  $\geq 0$ , folglich impliziert  $\mathbb{P}\{X = x\} > 0$  sofort  $x = \mathbb{E}[X]$ . Damit ist gezeigt, daß  $\mathbb{P}\{X = \mathbb{E}[X]\} = 1$ .

**Beispiel: binomialverteilte Zufallsgröße**

$$\Omega = \{0, 1\}^n$$

$X = \sum_{i=1}^n X_i$  mit  $X_i(\omega) = \omega_i$  für alle  $\omega \in \Omega$ , mit unabhängigen ZV  $X_i$

$\mathbb{P}\{X_i = 1\} = p$  und  $q = 1 - p = \mathbb{P}\{X_i = 0\}$  für alle  $i$

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = npq$$

(unter Verwendung der Unabhängigkeit der  $X_i$ )

**Beispiel: Poisson-verteilte Zufallsgröße**

Für eine Poisson-verteilte ZV  $X$  mit Parameter  $\lambda > 0$  gilt

$$\mathbb{E}[X] = \lambda = \text{Var}(X)$$

**Beweis**

*Trick:*  $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[X(X - 1)] + \mathbb{E}[X] - (\mathbb{E}[X])^2$

Wir wissen bereits, daß  $\mathbb{E}[X] = \lambda$  und daher  $(\mathbb{E}[X])^2 = \lambda^2$ . Die Behauptung folgt daher aus

$$\mathbb{E}[X(X - 1)] = \sum_{k=2}^{\infty} k(k - 1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda} = \lambda^2.$$

**Beispiel: geometrisch verteilte Zufallsgröße**

Für eine geometrisch verteilte ZV  $X$  mit Erfolgsws.  $p$  gelten

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p} \quad \text{und} \quad \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

## Ergänzung: Erwartungswert und Varianz der geometrischen Verteilung

**Gegeben:**  $p \in (0, 1]$  und eine Zufallsgröße  $X$  mit  $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$ ,  $k \in \mathbb{N}$

$X$  beschreibt den Zeitpunkt des ersten Erfolgs in einem beliebig oft unabhängig wiederholten Bernoulliexperiment.

**Behauptung:**  $\mathbb{E}X = 1/p$  und  $\text{Var } X = (1 - p)/p^2$

**Beweis Erwartungswert:** Da alle Summanden in  $\sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k)$  nichtnegativ sind, existiert der Erwartungswert genau dann, wenn die unendliche Reihe einen endlichen Wert hat.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) &= \sum_{k=1}^{\infty} kp(1 - p)^{k-1} \\ &= p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d}{dx} x^k && \text{an der Stelle } x = 1 - p \\ &= p \frac{d}{dx} \left( \sum_{k=1}^{\infty} x^k \right).\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir zwei Grenzwerte vertauscht: Differentiation und unendliche Reihe. Dies ist hier erlaubt, weil die geometrische Reihe  $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$  für alle  $x$  mit  $|x| < 1$  konvergiert, und  $x = 1 - p \in [0, 1)$  im Innern des Konvergenzbereichs der Potenzreihe liegt (*Regel für das gliedweise Differenzieren von Potenzreihen*).

Wir berechnen die Reihe, indem wir den Summationsindex verschieben und die bekannte Formel für die geometrische Reihe anwenden:

$$\sum_{k=1}^{\infty} x^k = x \sum_{k=0}^{\infty} x^k = x \frac{1}{1 - x}.$$

Berechnen der Ableitung und Einsetzen von  $x = 1 - p$ :

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{k=1}^{\infty} x^k \right) = \frac{d}{dx} \frac{x}{1 - x} = \frac{(1 - x) \cdot 1 - x \cdot (-1)}{(1 - x)^2} = \frac{1}{(1 - x)^2} = \frac{1}{p^2}.$$

Damit ergibt sich der Erwartungswert zu

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = p \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}.$$

**Beweis Varianz:** Um die Varianz zu berechnen, schreiben wir zunächst den gesuchten Ausdruck um:  
Aus

$$\mathbb{E}(X(X - 1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}X$$

folgt

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(X(X - 1)) + \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2.$$

Wir haben schon  $\mathbb{E}X = 1/p$  berechnet, so daß  $\mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2 = 1/p - 1/p^2$  folgt, und wir nur noch  $\mathbb{E}(X(X - 1))$  berechnen müssen:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X(X - 1)) &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k - 1)P(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k - 1)p(1 - p)^{k-1} \\ &= p \sum_{k=2}^{\infty} k(k - 1)(1 - p)^{k-1} && \text{(der Summand für } k = 1 \text{ ist Null)} \\ &= p(1 - p) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d^2}{dx^2} x^k && \text{an der Stelle } x = 1 - p \\ &= p(1 - p) \frac{d^2}{dx^2} \left( \sum_{k=2}^{\infty} x^k \right), \end{aligned}$$

wobei wir unendliche Reihe und Differentiation wieder mit der gleichen Begründung vertauschen dürfen.

Wir erzeugen die Standardform der geometrischen Reihe:

$$\sum_{k=2}^{\infty} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k - 1 - x = \frac{1}{1 - x} - 1 - x.$$

Sukzessives Differenzieren ergibt

$$\frac{d}{dx} \left( \sum_{k=2}^{\infty} x^k \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{1 - x} - 1 - x \right) = \frac{1}{(1 - x)^2} - 1,$$

sowie

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \sum_{k=2}^{\infty} x^k \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{(1 - x)^2} - 1 \right) = \frac{2}{(1 - x)^3}.$$

Einsetzen von  $x = 1 - p$  ergibt nun

$$\mathbb{E}(X(X - 1)) = p(1 - p) \frac{2}{p^3} = \frac{2(1 - p)}{p^2},$$

und somit

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X(X - 1)) + \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2 = \frac{2(1 - p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2 - 2p + p - 1}{p^2} = \frac{1 - p}{p^2}.$$