Universität Bielefeld

Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz

SS 2013

Vertiefung NWI: 9. Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Mittwoch, 12.6.2013

9. Tschebyscheffsche Ungleichung und Grenzwertsätze

9.1 Tschebyscheffsche Ungleichung

Satz *(Tschebyscheffsche Ungleichung)*
Für eine ZV X, deren Erwartungswert und Varianz existieren, gilt

$$\mathbb{P}\{|X-\mathbb{E}[X]| \geq c\} \leq \frac{\operatorname{Var}(X)}{c^2} \qquad \forall\, c>0$$

Beweis

$$\mathbb{P}\{|X-\mathbb{E}[X]| \geq c\} = \sum_{\substack{x\in X(\Omega):\\ |x-\mathbb{E}[X]|\geq c}} \mathbb{P}\{X=x\} \leq \sum_{\substack{x\in X(\Omega):\\ |x-\mathbb{E}[X]|\geq c}} \left(\frac{|x-\mathbb{E}[X]|}{c}\right)^2 \mathbb{P}\{X=x\} = \frac{1}{c^2}\operatorname{Var}(X)$$

Beispiel: *Die Tschebyscheffsche Ungleichung ist scharf*
Sei $k\in\mathbb{N}$ beliebig.
Die ZV X mit Werten in $\{-k,0,+k\}$ sei gegeben durch $\mathbb{P}\{X=\pm k\} = \frac{1}{2k^2}$
Aus $\mathbb{E}[X]=0$ und $\operatorname{Var}(X) = k^2\mathbb{P}\{x=-k\} + k^2\mathbb{P}\{X=+k\} = 1$ folgt für jedes $c\in(0,k]$.

$$\mathbb{P}\{|X-\mathbb{E}[X]| \geq c\} = \mathbb{P}\{X=k\} + \mathbb{P}\{X=-k\} = \frac{1}{k^2} = \frac{\operatorname{Var}(X)}{k^2} \leq \frac{1}{c^2}\operatorname{Var}(X)\,.$$

Die Wahl $c=k$ zeigt, daß die Tschebyscheffsche Ungleichung scharf ist.

Die Wahl $c=2k$ dagegen zeigt, daß es Situationen gibt, in denen die Tschebyscheffsche Ungleichung nicht gut ist:

$$\mathbb{P}\{|X-\mathbb{E}[X]| \geq 2k\} = \mathbb{P}\{|X|>k\} = 0 < \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\operatorname{Var}(X)}{(2k)^2}\,.$$

Beispiel:
Wie oft müssen wir mit einem fairen Würfel würfeln, bis mit Ws. $\geq 1 - 0,05$ die relative Häufigkeit einer Sechs um nicht mehr als 1/100 von 1/6 abweicht?

Ansatz

- N-mal Würfeln, $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^N$ mit Gleichverteilung
- $X_i(\omega) = 1_{\{6\}}(\omega_i)$ unabhängig und identisch verteilt (u.i.v.) mit $\mathbb{P}\{X_i = 1\} = 1/6$
- $S_N = \sum_{i=1}^N X_i$ ist die Anzahl der geworfenen Sechsen
- Relative Häufigkeit der Sechs ist $\frac{1}{N} S_N$

Gesucht
Das kleinste N derart, daß
$$\mathbb{P}\Big\{\Big|\frac{1}{N}S_N - \frac{1}{6}\Big| > \frac{1}{100}\Big\} \leq \frac{5}{100}\ .$$

Lösung
Seien $p = 1/6$, $q = 1 - p = 5/6$.
S_N ist binomialverteilt mit Paremtern N und p.
Die Tschebyscheffsche Ungleichung mit $\mathbb{E}[\frac{1}{N}S_N] = \frac{1}{N}Np = p = 1/6$, $\mathrm{Var}(\frac{1}{N}S_N) = \frac{1}{N^2}Npq = \frac{1}{N}\frac{1}{6}\frac{5}{6}$ zeigt
$$\mathbb{P}\Big\{\Big|\frac{1}{N}S_N - \frac{1}{6}\Big| > \frac{1}{100}\Big\} \leq \frac{\mathrm{Var}(S_N/N)}{(1/100)^2} = \frac{(100)^2}{N}\frac{5}{36}$$
Wir wählen also N so groß , daß
$$\frac{(100)^2}{N}\frac{5}{36} \leq \frac{5}{100}$$
Jedes $N \geq (100)^3/36 = 27\,777,7\ldots$ garantiert, daß mit Ws. $\leq 0,05$ bei N-maligem Würfeln die relative Häufigkeit einer Sechs um nicht mehr als 1/100 von 1/6 abweicht. Wenn wir $N = 27\,778$ wählen, sind wir auf der sicheren Seite. Da wir abgeschätzt haben, ist dieses N möglicherweise nicht das minimale.

Satz *(Markoffsche Ungleichung)*
Für eine ZV X mit $\mathbb{E}[|X|^k] < \infty$ für ein $k \in \mathbb{N}$ existiert der Erwartungswert, und es gilt
$$\mathbb{P}\{|X - \mathbb{E}[X]| \geq c\} \leq \frac{\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|^k]}{c^k} \qquad \forall\, c > 0$$

Bemerkung
Für $k = 2$ ist die Markoffsche Ungleichung gerade die Tschebyscheffsche Ungleichung.

9.2 Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Satz *(Schwaches Gesetz der großen Zahlen)*
Gegeben seien ZV $X_1, X_2, X_3, \ldots$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p), deren Verteilung *nicht* identisch sein muß. Wir setzen voraus:

- Alle Erwartungswerte $\mathbb{E}[X_i]$ existieren, und es gilt $\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{E}[X_1]$ für alle i
- $\mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{Var}(X_1) < \infty$ für alle i
- Die ZV sind *paarweise unkorreliert*, d.h. $\mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])] = 0$ für alle i, j mit $i \neq j$

Es sei $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{|\tfrac{1}{n} S_n - \mathbb{E}[X_1]| \geq \varepsilon\} = 0$$

Beweis
Direkte Folgerung aus der Tschebyscheffschen Ungleichung

Bemerkung
Paarweise Unabhängigkeit impliziert paarweise Unkorreliertheit.

Bemerkung
$\mathbb{E}[\frac{1}{n} S_n] = \mathbb{E}[X_1]$

Beispiel:
Ist S_n die Anzahl der Erfolge in einem n-mal unabhängig wiederholten Bernoulli-Experiment, so zeigt das Schwache Gesetz der großen Zahlen, daß die relative Häufigkeit der Erfolge gegen die Erfolgswahrscheinlichkeit konvergiert (in dem Sinne, daß die Wahrscheinlichkeit, daß die relative Häufigkeit um mindestens ε von der Erfolgswahrscheinlichkeit abweicht, gegen Null konvergiert).

9.3 Lokaler zentraler Grenzwertsatz

$0 < p < 1$, $q := 1 - p$

Abkürzende Schreibweise: $x_k^{(n)} := (k - np)/\sqrt{npq}$ für $k = 0, \dots, n$

Erinnerung
Für eine binomialverteilte ZV S_n mit Parametern n und p ist np der Erwartungswert und npq die Varianz. Wir schreiben

$$b(k; n, p) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Satz *(Lokaler zentraler Grenzwertsatz)*
Sei $A > 0$ eine beliebige Konstante. Dann gilt

$$(*) \qquad b(k; n, p) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \, \mathrm{e}^{-(x_k^{(n)})^2/2} \quad \textit{gleichmäßig} \text{ für alle } k \text{ mit } |x_k^{(n)}| \le A$$

Dabei bedeutet $\sim$:

$$f(n) \sim g(n) \iff \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1 \; .$$

Die Aussage (*) kann also geschrieben als

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{k : |x_k^{(n)}| \le A} \left| \frac{b(k; n, p)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \, \mathrm{e}^{-(x_k^{(n)})^2/2}} - 1 \right| = 0 \; .$$

Beweis

- Ausschreiben des Binomialkoeffizienten
- Approximieren der Fakultäten mit Hilfe der Stirlingschen Formel (s.h.)
- Sortieren der Terme
- Sorgfältiges Berechnen des Limes $n \to \infty$

Beispiel: *1200-mal Würfeln mit einem fairen Würfel*
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, *genau* k Sechsen zu werfen? ($k = 200$, $k = 250$)

k	b(k;1200,1/6)	Approximation gemäß lokalem zentralem Grenzwertsatz
200	0,030888...	0,030901...
250	0,0000244...	0,0000170...

Sind das wirklich die Wahrscheinlichkeiten, die uns typischerweise interessieren?

Neue Fragen

- Wie groß ist die Ws., zwischen 150 und 250 Sechsen zu werfen?
- Wie groß ist die Ws., mindestens 250 Sechsen zu werfen?

9.4 Satz von de Moivre–Laplace (Spezialfall des zentralen Grenzwertsatzes)

Satz *(Satz von de Moivre–Laplace)*
Es sei S_n die Anzahl der Erfolge in einem n-fach unabhängig wiederholten Bernoulli-Experiment mit Erfolgsws. $p \in (0,1)$. Dann gilt für jede Wahl von Konstanten a, b mit $-\infty < a < b < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big\{a < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq b\Big\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \mathrm{e}^{-x^2/2}\ \mathrm{d}x$$

Dabei verstehen wir die rechte Seite als Riemann-Integral $\int_a^b \varphi(x)\ \mathrm{d}x$ mit

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-x^2/2}\ .$$

Wir nennen φ die Dichte der Standardnormalverteilung. Die Stammfunktion

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} \varphi(x)\ \mathrm{d}x$$

heißt auch Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. (Dazu mehr in der 11. Vorlesung.)

Der Graph von φ ist die berühmte Gaußsche Glockenkurve, Φ ist die Fläche unter der Kurve φ.

Beweis
Zunächst Approximieren der Summanden $b(k; n, p)$ durch den lokalen zentralen Grenzwertsatz. Dann approximieren der Summe mit Hilfe eines Riemann-Integrals.

Rechenregeln

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\ \mathrm{d}x = 1$
- $\Phi(y) \to \begin{cases} 0 & \text{für } y \to -\infty \\ 1 & \text{für } y \to +\infty \end{cases}$
- $\Phi(0) = \dfrac{1}{2}$
- $\displaystyle\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(x)\ \mathrm{d}x = 1 - \int_{z}^{\infty} \varphi(x)\ \mathrm{d}x = 1 - \int_{-\infty}^{-z} \varphi(x)\ \mathrm{d}x = 1 - \Phi(-z)$

Beispiel
Eine Fabrik stellt Chips her mit einer Ausschußrate von 10%. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind unter 400 produzierten Chips mehr als 50 defekt?

Wir betrachten jeden defekten Chip unter den 400 Chips als "Erfolg" und modellieren das Experiment als 400-mal unabhängig wiederholtes Bernoulli-Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit $1/10$. Dabei soll die Anzahl der Erfolge S_n gerade die Anzahl defekter Chips sein.

- $\Omega = \{0,1\}^n$ mit $n = 400$
- $X_i(\omega) = \omega_i$, $X_i = 1$ bedeute einen "Erfolg" im i-ten Experiment, d.h., der i-te Chip ist defekt
- Annahme: Die Zufallsgrößen X_i sind u.i.v. mit $\mathbb{P}\{X_i = 1\} = p = 1/10$
  (Wie realistisch ist diese Annahme?)
- Unter dieser Annahme ist S_n binomialverteilt mit Parametern n und p.
- $\mathbb{E}S_n = np = 40$ und $\mathrm{Var}(S_n) = npq = 6^2$ mit $q = 1 - p = 9/10$

Gesucht ist $\mathbb{P}\{S_n > 50\}$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\{S_n > 50\} &= \mathbb{P}\{50 < S_n \leq 400\} \\
&= \mathbb{P}\Big\{\frac{50-40}{6} < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{400-40}{6}\Big\} && \text{(Standardisieren)} \\
&\approx \Phi(60) - \Phi(5/3) && \text{(Satz von de Moivre–Laplace)} \\
&\approx 1 - \Phi(1,67) \\
&\approx 1 - 0,9525 && \text{(Tabelle)} \\
&\approx 0,05
\end{aligned}
$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind zwischen 35 und 45 Chips defekt?

$$
\mathbb{P}\{34 < S_n \leq 45\} = \mathbb{P}\Big\{-1 < \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{5}{6}\Big\} \approx \Phi(5/6) - \Phi(-1) \;= \Phi(5/6) - (1 - \Phi(+1)) \approx 0,64
$$

Ergänzung: Stirlingsche Formel

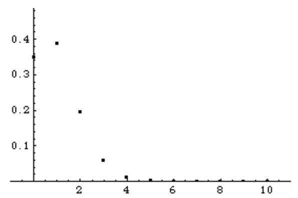
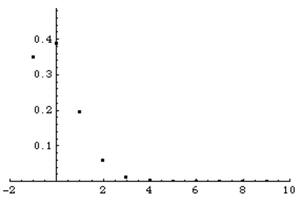
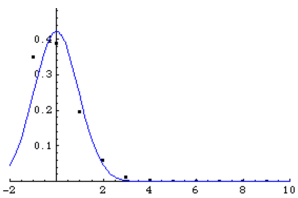
Für große n gilt

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

n	n!	Approximation
1	1	0.922
2	2	1.919
3	6	5.836
4	24	23.506
5	120	118.019
6	720	710.078
7	5040	4980.4
8	40320	39902.4
9	362880	359537
10	3628800	$3.5987 \cdot 10^6$
11	39916800	$3.96156 \cdot 10^7$
12	479001600	$4.75687 \cdot 10^8$

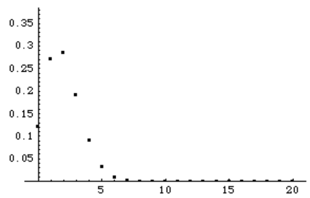
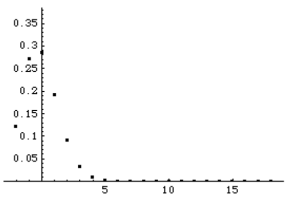
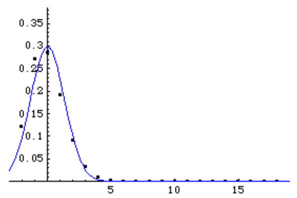
Ergänzung: Lokaler zentraler Grenzwertsatz und Satz von de Moivre–Laplace

$n = 10,\ p = 1/10$

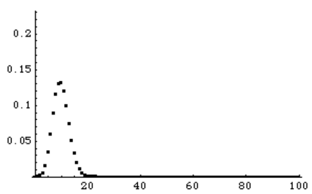
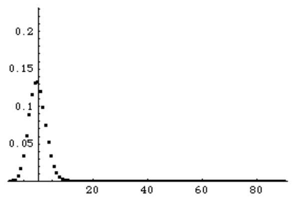
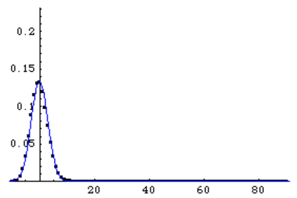
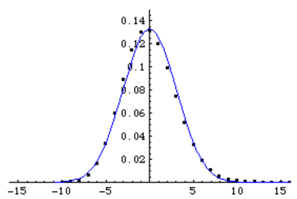
Binomialverteilung | zentrierte Binomialverteilung | approximierende Normalverteilung

$n = 20,\ p = 1/10$

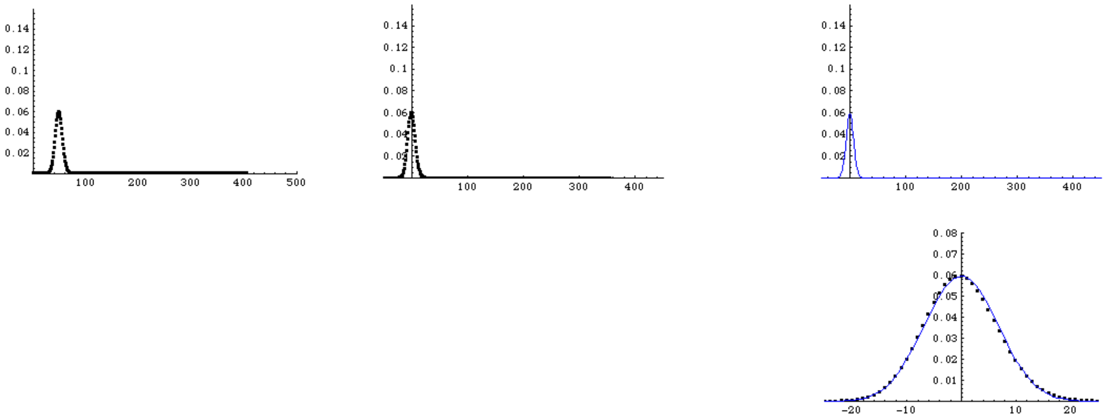
Binomialverteilung | zentrierte Binomialverteilung | approximierende Normalverteilung

$n = 100,\ p = 1/10$

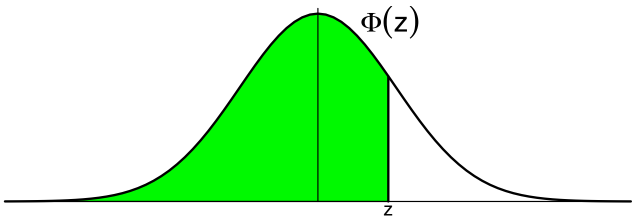
Binomialverteilung | zentrierte Binomialverteilung | approximierende Normalverteilung

$n = 500,\ p = 1/10$



Binomialverteilung　　zentrierte Binomialverteilung　　approximierende Normalverteilung

Tabelle der Kumulativen Normalverteilung $\Phi(z) = \mathrm{P}\left[Z \le z\right], \ Z \sim \mathcal{N}(0,1$



Bsp.: $\mathrm{P}\left[Z \le 1.96\right] = 0.975$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998