

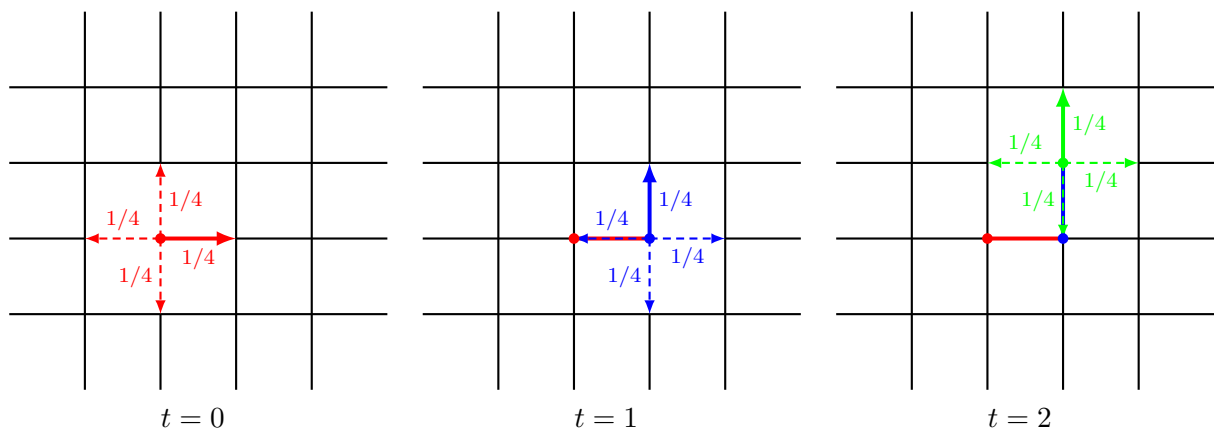
Vertiefung NWI: 13. Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Mittwoch, 2.7.2014

13. Markoffketten

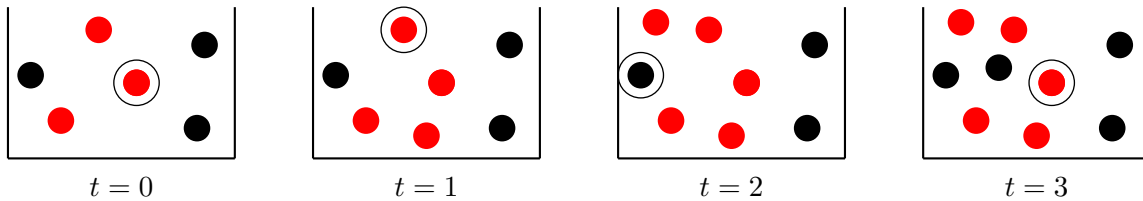
13.1 Beispiele

1. Irrfahrt auf dem zweidimensionalen Gitter



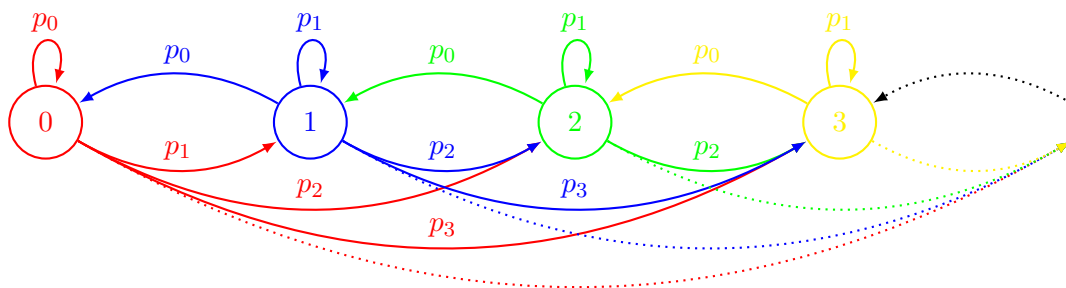
- Wanderer auf dem Gitter $\mathbb{Z}^2 = \{(i, j) : i, j \in \mathbb{Z}\}$
- Start zur Zeit $t = 0$ im Ursprung $(0, 0)$
- Zur Zeit $t = 1$ ist unser Wanderer in einen der Punkte $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$ gehüpft. Dabei wird das Ziel mit Gleichverteilung gewählt.
- Genau so wird im folgenden mit gleicher Ws. einer der vier Nachbarn gewählt: Wenn der Wanderer zur Zeit t in (i, j) ist, so ist er zur Zeit $t + 1$ mit je Ws. $1/4$ in einem der Punkte $(i + 1, j)$, $(i - 1, j)$, $(i, j + 1)$, $(i, j - 1)$.

2. Polyas Urnenschema



- Zur Zeit $t = 0$ befinden sich $r_0 > 0$ rote Kugeln und $s_0 > 0$ schwarze Kugeln in einer Urne.
- Es wird zufällig eine Kugel gewählt. Diese wird zurückgelegt zusammen mit einer weiteren Kugel gleicher Farbe, so daß zur Zeit $t = 1$
 - mit Ws. $r_0/(r_0 + s_0)$ in der Urne $r_0 + 1$ rote und s_0 schwarze Kugeln liegen
 - mit Ws. $s_0/(r_0 + s_0)$ in der Urne $s_0 + 1$ schwarze und r_0 rote Kugeln liegen
- Genau so verfahren wir zu jedem diskreten Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}$.
- Zur Zeit $t \in \mathbb{N}_0$ befinden sich also $r_0 + s_0 + t$ Kugeln in der Urne.
- Sind zur Zeit t genau r rote und s schwarze Kugeln in der Urne, so sind zur Zeit $t + 1$ mit Ws. $r/(r + s)$ genau $r + 1$ rote und s schwarze Kugeln und mit Ws. $s/(r + s)$ genau $s + 1$ schwarze und r rote Kugeln in der Urne.

3. Einfaches Warteschlangenmodell



- Eintreffende Kunden an einem Schalter
- Start mit beliebiger Anzahl an Kunden zur Zeit $t = 0$.
- Im Zeitintervall $(t - 1, t]$ treffen mit Ws. p_i genau i neue Kunden ein ($t \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}_0$).
- Wenn zur Zeit $t - 1$ mindestens ein Kunde am Schalter ansteht, so wird im Zeitintervall $(t - 1, t]$ genau ein Kunde bedient. Der Kunde, der bedient wird, verläßt die Warteschlange und tritt an den Schalter. Dieser Kunde zählt dann nicht mehr zu den wartenden Kunden.
- Wir studieren die Anzahl X_t der Kunden, die vor dem Schalter warten (und noch nicht bedient werden).

Gemeinsamkeiten dieser Beispiele

- Zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}_0$ haben wir eine Zufallsgröße X_t , die Werte in einem *Zustandsraum* S annimmt. Dabei ist S höchstens abzählbar.
 - Irrfahrt: $S = \mathbb{Z}^2$
 - Urnenschema: $S = \{(r, s) : r, s \geq 1\}$
 - Warteschlange: $S = \mathbb{N}_0$
- Der zufällige Übergang von X_t zu X_{t+1} ist gegeben durch die bedingte Ws.

$$P(X_{t+1} = y \mid X_t = x) \quad \forall x, y \in S.$$

Diese Ws. hängt in den Beispielen nicht von t ab.

$$p(x, y) := P(X_{t+1} = y \mid X_t = x)$$

Beachte: $\sum_{y \in S} p(x, y) = 1$.

- Die Verteilung von X_{t+1} hängt *nur* von X_t ab, nicht von der *gesamten Vergangenheit* X_0, X_1, \dots, X_t .

13.2 Definitionen

Definition: Stochastische Matrix

Sei S eine abzählbare Menge. Eine Matrix $\mathbb{P} = (p(x, y))_{x, y \in S}$ mit $p(x, y) \in [0, 1]$ für alle $x, y \in S$ und $\sum_{y \in S} p(x, y) = 1$ heißt *stochastische Matrix*.

Beispiele

- Irrfahrt:

$$\begin{cases} p((i, j), (k, l)) = 1/4 & \text{falls } |i - k| + |j - l| = 1 \\ p((i, j), (k, l)) = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Urnenschema:

$$\begin{cases} p((r, s), (r + 1, s)) = r/(r + s) \\ p((r, s), (r, s + 1)) = s/(r + s) \\ p((r, s), (\tilde{r}, \tilde{s})) = 0 & \text{in allen anderen Fällen} \end{cases}$$

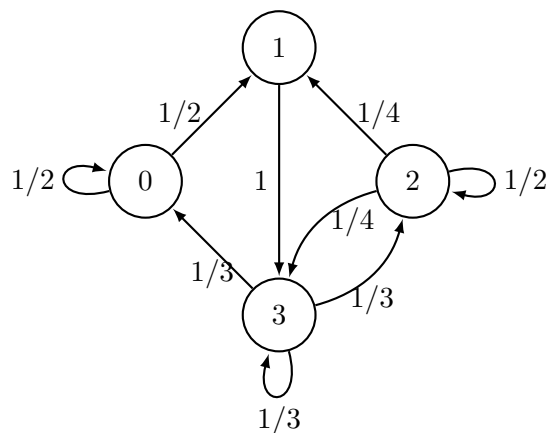
- Warteschlange:

$$\begin{cases} p(0, i) = p_i & \text{für } i \geq 0 \\ p(k, k + i - 1) = p_i & \text{für } i \geq 0, k > 0 \\ p(k, l) = 0 & \text{in allen anderen Fällen} \end{cases}$$

Graphische Darstellung: Beispiel

$$S = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\mathbb{P} = (p(x, y))_{x, y \in S} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$



Dabei haben wir jeweils genau dann einen Pfeil von x nach y gezeichnet, wenn $p(x, y) > 0$.

Definition: Markoffkette

Eine Folge von Zufallsgrößen X_0, X_1, X_2, \dots mit Werten in einer höchstens abzählbaren Menge S heißt *Markoffkette mit Zustandsraum S und stochastischer Matrix $\mathbb{P} = (p(x, y))_{x, y \in S}$* , wenn

$$P(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_t = x_t) = P(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t) = p(x_t, x_{t+1})$$

für alle $t \in \mathbb{N}_0$ and alle $x_0, \dots, x_{t+1} \in S$ gilt.

Wir nennen \mathbb{P} die Matrix der *Übergangswahrscheinlichkeiten*.

Satz

Für alle $t \in \mathbb{N}_0$ und alle $x_0, \dots, x_t \in S$ gilt

$$P(X_0 = x_0, \dots, X_t = x_t) = P(X_0 = x_0) \prod_{s=1}^t p(x_{s-1}, x_s) .$$

Beweis (per Induktion über t)

- Für $t = 0$ ist die Aussage klar.
- Gelte daher die Behauptung für $t \geq 0$. Induktionsschluß von t auf $t + 1$:
 - Falls $P(X_0 = x_0, \dots, X_t = x_t) = 0$, so gilt einerseits

$$P(X_0 = x_0, \dots, X_{t+1} = x_{t+1}) \leq P(X_0 = x_0, \dots, X_t = x_t) = 0 ,$$

andererseits ist nach Induktionsvoraussetzung

$$P(X_0 = x_0) \prod_{s=1}^t p(x_{s-1}, x_s) = 0 .$$

Daraus folgt wiederum $P(X_0 = x_0) \prod_{s=1}^{t+1} p(x_{s-1}, x_s) = 0$.

- Sei nun $P(X_0 = x_0, \dots, X_t = x_t) > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} P(X_0 = x_0, \dots, X_{t+1} = x_{t+1}) &= P(X_0 = x_0, \dots, X_t = x_t) P(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_0 = x_0, \dots, X_t = x_t) \\ &= \left[P(X_0 = x_0) \prod_{s=1}^t p(x_{s-1}, x_s) \right] p(x_t, x_{t+1}) \\ &= P(X_0 = x_0) \prod_{s=1}^{t+1} p(x_{s-1}, x_s) . \end{aligned}$$

Definition: Startverteilung

$\nu(x) = P(X_0 = x)$ heißt *Startverteilung* der Markoffkette X_0, X_1, X_2, \dots

Beispiele

- Irrfahrt: $\nu((0, 0)) = 1$ und $\nu((i, j)) = 0$ für $(i, j) \neq (0, 0)$
- Urnenschema: Gegeben sind r_0 und s_0 . Dann ist $\nu((r_0, s_0)) = 1$ und $\nu((r, s)) = 0$ für alle $(r, s) \neq (r_0, s_0)$.
- Warteschlange: Gegeben sei ein beliebige Verteilung Q auf \mathbb{N}_0 , d.h. Zahlen $q_i \geq 0$, $i \in \mathbb{N}_0$, mit $\sum q_i = 1$. Wir setzen $\nu(i) = q_i$.

Rechenregel

Aus

$$P(X_0 = x_0, \dots, X_t = x_t) = \nu(x_0) \prod_{s=1}^t p(x_{s-1}, x_s)$$

folgt durch Summation

$$P(X_t = x_t) = \sum_{x_0, x_1, \dots, x_{t-1} \in S} \nu(x_0) \prod_{s=1}^t p(x_{s-1}, x_s)$$

Notation: n -stufige Übergangswahrscheinlichkeiten

- $p^{(0)}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- $p^{(1)}(x, y) = p(x, y)$
- Für $n \geq 2$: $p^{(n)}(x, y) = \sum_{x_1, \dots, x_{n-1} \in S} p(x, x_1)p(x_1, x_2) \dots p(x_{n-1}, y)$

13.3 Gleichgewichtsverteilung

Definition: *Gleichgewichtsverteilung / stationäre Verteilung*

Sei $\mathbb{P} = (p(x, y))_{x, y \in S}$ eine stochastische Matrix und π eine Verteilung auf S . Gilt

$$\sum_{x \in S} \pi(x) p(x, y) = \pi(y) \quad \forall y \in S,$$

so heißt π *stationäre Verteilung* oder *Gleichgewichtsverteilung* für die durch \mathbb{P} und eine beliebige Startverteilung ν beschriebene Markoffkette X_0, X_1, X_2, \dots .

Wir sagen auch, daß π die Gleichgewichtsverteilung der Matrix \mathbb{P} ist.

Bemerkung

Eine Gleichgewichtsverteilung ist ein Linkseigenvektor zur Matrix \mathbb{P} . Sie kann bestimmt werden durch das Lösen eines linearen Gleichungssystems. Dabei darf nicht vergessen werden, daß die Normierung $\sum_{x \in S} \pi(x) = 1$ eine Gleichung beiträgt.

Beispiel: *Gleichgewichtsverteilung muß nicht existieren*

- Betrachte das Urnenschema.
- **Annahme:** Es ex. eine Gleichgewichtsverteilung π .
- Wir zeigen: Dann ist $\pi((r, s)) = 0$ für alle (r, s) .
- Sei $n = r + s$.
- Für $n = 2$, also $r = s = 1$, gilt $p((\tilde{r}, \tilde{s}), (1, 1)) = 0$ für alle (\tilde{r}, \tilde{s}) , also

$$\pi((1, 1)) = \sum_{(\tilde{r}, \tilde{s}) \in \mathbb{N}^2} \pi((\tilde{r}, \tilde{s})) p((\tilde{r}, \tilde{s}), (1, 1)) = 0.$$

- Induktionsschluß von n auf $n + 1$: Gelte $\pi(r, s) = 0$ für alle (r, s) mit $r + s \leq n$, und sei nun $r + s = n + 1$.
 - Für (\tilde{r}, \tilde{s}) mit $\tilde{r} + \tilde{s} \neq n$ ist immer $p((\tilde{r}, \tilde{s}), (r, s)) = 0$.
 - Daraus folgt bereits

$$\pi((r, s)) = \sum_{(\tilde{r}, \tilde{s}) \in \mathbb{N}^2} \pi((\tilde{r}, \tilde{s})) p((\tilde{r}, \tilde{s}), (r, s)) = 0,$$

weil für jeden Summanden entweder $\pi((\tilde{r}, \tilde{s})) = 0$ oder $p((\tilde{r}, \tilde{s}), (r, s)) = 0$ gilt.

Bemerkungen

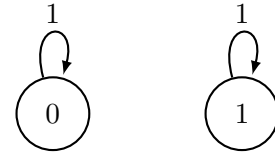
- Auch für die Irrfahrt aus unseren Beispielen existiert keine Gleichgewichtsverteilung.
- Für die Warteschlange aus unseren Beispielen mit $p_0 > 0$ und $p_0 + p_1 < 1$ existiert eine Gleichgewichtsverteilung genau dann, wenn $\sum_{i=0}^{\infty} i p_i < 1$ (erwartete Anzahl eintreffender Kunden pro Zeiteinheit).

Satz

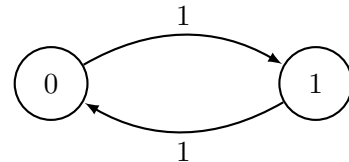
Ist der Zustandsraum S endlich, so existiert *mindestens eine* Gleichgewichtsverteilung.

Beispiele: Eindeutigkeit der Gleichgewichtsverteilung?

- Die Matrix $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat jede beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung π als Gleichgewichtsverteilung.



- Die Matrix $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat eine eindeutige Gleichgewichtsverteilung, nämlich $\pi = (1/2, 1/2)$.

**Satz**

Ist die Startverteilung ν gleich einer Gleichgewichtsverteilung π , so gilt

$$P(X_t = x) = \pi(x) \quad \forall x \in S \quad \forall t \in \mathbb{N}_0$$

(vgl. "Rechenregel")

Frage

Unter welchen Voraussetzungen gilt $P(X_t = x) \rightarrow \pi(x)$ für $t \rightarrow \infty$?