

Vertiefung NWI: 14. Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Mittwoch, 9.7.2014

14. Markoffketten: Irreduzibilität, Periode und Gleichgewichtsverteilung

14.1 Fragen

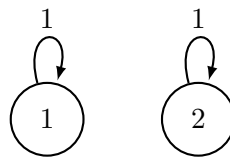
Satz: *Existenz einer Gleichgewichtsverteilung*

Ist S endlich, so existiert mindestens eine Gleichgewichtsverteilung π .

Fragen

- Wann ist π eindeutig?

Vgl. $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für Nichteindeutigkeit:



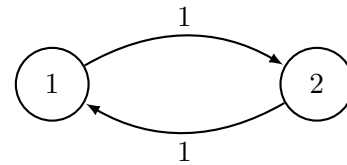
Es gilt $(\nu_1, \nu_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\nu_1, \nu_2)$ für jede Startverteilung ν .

- Gilt $P(X_t = x) \rightarrow \pi(x)$ für $t \rightarrow \infty$ und alle $x \in S$?

Beobachtungen

- Bezug n -stufiger Übergangsmatrizen zu Matrixprodukten: $\mathbb{P}^n = (p^{(n)}(x, y))_{x, y \in S}$
- Gilt für die Startverteilung $\nu(x_0) = 1$ für ein $x_0 \in S$, so gilt $P(X_n = x) = p^{(n)}(x_0, x)$.
- Für beliebige Startverteilungen ν gilt $P(X_n = x) = \sum_{y \in S} \nu(y) p^{(n)}(y, x)$, das heißt, $P(X_n = x)$ ist das zu x gehörende Element von $\nu \mathbb{P}^n$.

Beispiel



- $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\pi = (1/2, 1/2)$ ist Gleichgewichtsverteilung, denn $\pi\mathbb{P} = (1/2, 1/2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1/2, 1/2) = \pi$
- $\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{P}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{P}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{P}^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{P}^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{P}^7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, \dots
- $\mathbb{P}^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbb{P}^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Für jede Startverteilung $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ gilt

$$(P(X_n = 1), P(X_n = 2)) = \nu\mathbb{P}^n = \begin{cases} (\nu_1, \nu_2) & \text{für } n \text{ gerade} \\ (\nu_2, \nu_1) & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Folglich konvergiert $P(X_n = x)$ für $n \rightarrow \infty$ *nicht*, es sei denn $\nu = \pi$.

14.2 Irreduzibilität

Definition: Erreichbarkeit

Seien $x, y \in S$. y heißt erreichbar von x , wenn ein $n \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $p^{(n)}(x, y) > 0$.

Schreibweise: $x \rightsquigarrow y$

Beobachtungen

- $p^{(0)}(x, x) = 1$ impliziert $x \rightsquigarrow x$
- Gelten $x \rightsquigarrow y$ und $y \rightsquigarrow z$, so gilt $x \rightsquigarrow z$, denn

$$p^{(n+m)}(x, z) = \sum_{u \in S} p^{(n)}(x, u) p^{(m)}(u, z) \geq p^{(n)}(x, y) p^{(m)}(y, z) > 0$$

- $x \rightsquigarrow y$ gilt genau dann, wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:
 - $p^{(0)}(x, y) = 1$ (nur möglich für $x = y$)
 - $p^{(1)}(x, y) > 0$
 - Es existieren $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_n \in S$ mit

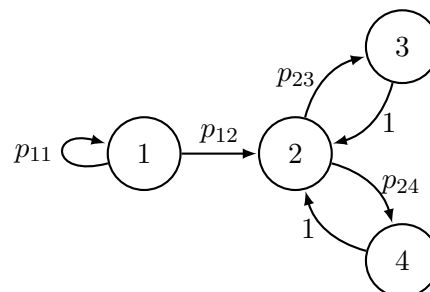
$$p(x, x_1) > 0, p(x_1, x_2) > 0, \dots, p(x_{n-1}, x_n) > 0, p(x_n, y) > 0$$

Definition: irreduzible Markoffkette

Eine Markovkette heißt irreduzibel, wenn $x \rightsquigarrow y$ gilt für alle $x, y \in S$.

Beispiele

- $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ beschreibt *nicht irreduzible* Markoffkette
- $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ beschreibt eine *irreduzible* Markoffkette
- Ein weiteres Beispiel einer nicht irreduziblen Markoffkette ($2 \not\rightsquigarrow 1$)



- Irrfahrt: irreduzibel
- Urnenschema: nicht irreduzibel, da $(r, s) \rightsquigarrow (\tilde{r}, \tilde{s})$ nur gilt, wenn $\tilde{r} \geq r$ und $\tilde{s} \geq s$

Satz

Seien S endlich und $\mathbb{P} = (p(x, y))_{x, y \in S}$ eine stochastische Matrix mit $p(x, y) > 0$ für alle $x, y \in S$. Dann gelten:

- \mathbb{P} hat genau eine Gleichgewichtsverteilung π .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(x, y) = \pi(y) > 0 \quad \forall x, y \in S$

Bemerkung

Die Voraussetzungen können abgeschwächt werden zu irreduzibel und aperiodisch, siehe unten.

Bemerkung

Ist X_0, X_1, \dots eine Markoffkette mit Start in x und stochastischer Matrix \mathbb{P} , so sagt der zweite Teil des Satzes

$$P(X_n = y) = p^{(n)}(x, y) \rightarrow \pi(y) > 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty,$$

das heißt, egal in welchem Zustand $x \in S$ die Markoffkette startet, nach hinreichend langer Zeit ist die Verteilung von X_n nahe bei π .

Beispiele, die die Voraussetzungen des Satzes nicht erfüllen

- Irrfahrt, Urnschema und Warteschlange haben keinen endlichen Zustandsraum
- Für die Irrfahrt gilt nicht, daß $p(x, y) > 0$ für alle $x, y \in S$
- Viele Beispiele mit endlichem S erfüllen ebenfalls nicht $p(x, y) > 0$ für alle $x, y \in S$.

Frage: Welche Aussagen gelten trotzdem?

14.3 Verallgemeinerungen

Satz: Eindeutigkeit der Gleichgewichtsverteilung

Ist eine Markoffkette irreduzibel und existiert eine Gleichgewichtsverteilung π , so ist die Gleichgewichtsverteilung eindeutig bestimmt.

Definition

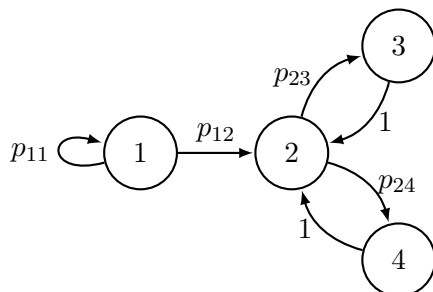
Sei \mathbb{P} eine stochastische Matrix. Für $x \in S$ seien

$$N_x = \{n \in \mathbb{N} : p^{(n)}(x, x) > 0\} \quad \text{und} \quad d(x) = \text{ggT}(N_x)$$

Dabei sei $d(x) = \infty$, falls $N_x = \emptyset$.

Beispiele

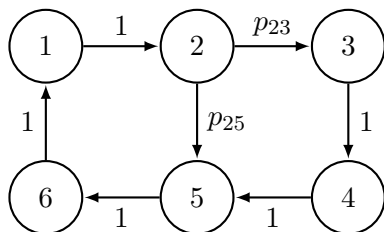
- $S = \{1, 2, 3, 4\}$



$$\begin{aligned} N_1 &= \{1, 2, 3, \dots\} &\Rightarrow d(1) &= 1 \\ N_2 &= \{2, 4, 6, \dots\} &\Rightarrow d(2) &= 2 \\ N_3 &= \{2, 4, 6, \dots\} &\Rightarrow d(3) &= 2 \\ N_4 &= \{2, 4, 6, \dots\} &\Rightarrow d(4) &= 2 \end{aligned}$$

- $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat $d(x) = 2$ für alle $x \in S$
- $S = \{1, \dots, 6\}$

$$N_x = \{4, 8, 12, \dots\} \cup \{6, 12, 18, \dots\} \cup \{10, 14, 16, \dots\}$$



Dabei entspricht $\{4, 8, 12, \dots\}$ den "kleinen Runden" (z.B. $1 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 1$);
 $\{6, 12, 18, \dots\}$ entspricht den "großen Runden" (z.B. $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 1$);
 und $\{10, 14, 16, \dots\}$ entspricht gemischten Wegen, die kleine und große Runden kombinieren.

$$d(x) = 2 \quad \forall x \in S$$

- Zweidimensionale Irrfahrt: $p^{(2)}(x, x) = 4 \cdot 1/4 \cdot 1/4 = 1/4$ (Schritt zu einem der Nachbarn und zurück). Es gilt $p^{(2n+1)}(x, x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in S$. Somit ist $d(x) = 2$ für alle $x \in S$.
- Urnenschema: $d((r, s)) = \infty$ für alle $(r, s) \in S$.

Beobachtung für irreduzible Markoffketten

- Ist $S = \{x\}$, so ist $p(x, x) = 1$, also $1 \in N_x$ und damit $d(x) = 1$.
- Hat S mehr als ein Element und gilt $p^1(x, x) = 0$, so existiert zu x ein $y \neq x$ sowie $n, m \in \mathbb{N}$ mit $p^{(n)}(x, y) > 0$ und $p^{(m)}(y, x) > 0$. Daraus folgt $p^{(n+m)}(x, x) \geq p^{(n)}(x, y)p^{(m)}(y, x) > 0$. Also ist $n + m \in N_x$.
- In beiden Fällen gilt $1 \leq d(x) < \infty$.

Satz

Ist \mathbb{P} irreduzibel, so ist $d(x)$ nicht von x abhängig.

Definition: Periode einer Markoffkette

- Ist \mathbb{P} irreduzibel, so heißt die Zahl $d = d(x)$ die Periode der zugehörigen Markoffkette.
- Ist $d = 1$, so heißt die Markoffkette *aperiodisch*.

Satz: Konvergenz gegen die Gleichgewichtsverteilung

Sei die stochastische Matrix $\mathbb{P} = (p(x, y))_{x, y \in S}$ irreduzibel und aperiodisch. Existiert eine Gleichgewichtsverteilung π , so gilt für alle $x, y \in S$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(x, y) = \pi(y) .$$