

Vertiefung NWI: 6. Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Mittwoch, 14.05.2014

6. Zufallsgrößen und ihre Verteilungen

6.1 Die Verteilung einer Zufallsgröße

Ω Ereignisraum, $p(\omega)$ Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses $\omega \in \Omega$

Beispiel: *Dreimaliges Werfen einer fairen Münze*

- $\Omega = \{0, 1\}^3$ statt $\{Z, K\}^3$ mit Gleichverteilung
- Anzahl Kopf, die der Spieler erzielt?
- $X : \Omega \rightarrow E, \omega \mapsto X(\omega) := \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$, mit $E := \{0, 1, 2, 3\}$ oder $E = \mathbb{N}_0$
(oder jeder anderen Menge $E \supset \{0, 1, 2, 3\}$)
- $X(\Omega) := \{X(\omega) : \omega \in \Omega\} = \{0, 1, 2, 3\} \subset E$
- $P_X(k) := P(\{X = k\})$ für $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ definiert Ws. auf $\{0, 1, 2, 3\}$ bzw. auf E :
 $P_X(0) = 1/8, P_X(1) = 3/8, P_X(2) = 3/8, P_X(3) = 1/8, P_X(k) = 0$ für alle anderen k

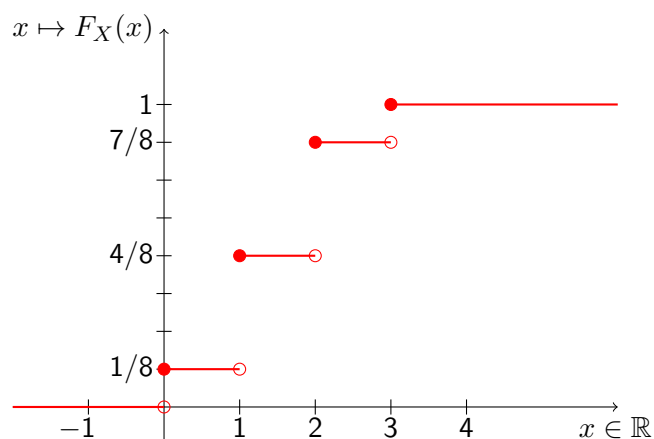
Definition

- Eine Abbildung $X : \Omega \rightarrow E$ heißt *E-wertige Zufallsgröße (ZG) oder Zufallsvariable ZV (ZV)*.
Dabei ist $E \neq \emptyset$ eine beliebige Menge.
- $X(\Omega) := \{X(\omega) : \omega \in \Omega\}$ heißt *Zielbereich* der Zufallsgröße X ; $X(\Omega) \subset E$.
- $P_X(x) := P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$ für $x \in X(\Omega)$ definiert eine Ws. auf $X(\Omega)$.
Alternativ können wir $P_X(x)$ für alle $x \in E$ definieren mit $P_X(x) = 0$ für $x \notin X(\Omega)$.
- P_X heißt *Verteilung* von X .
- Ist $E \subset \mathbb{R}$, so heißt die Abbildung $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ mit $F_X(x) := P(\{X \leq x\}) = P_X((-\infty, x])$ die *Verteilungsfunktion* von X .

Beweis, daß P_X eine Ws. ist:

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P_X(x) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in X(\Omega)\}) = P(\Omega) = 1$$

Verteilungsfunktion für Anzahl Kopf bei dreimaligem Werfen einer fairen Münze



Bemerkung

Ist die Verteilungsfunktion F_X einer diskreten Zufallsgröße X gegeben, so lassen sich die Ws. $P(X = x)$ ablesen:

- $P(X = x)$ ist die Höhe $F_X(x) - \lim_{y \nearrow x} F_X(y)$ des Sprungs der Verteilungsfunktion an der Stelle x , sofern ein Sprung vorliegt;
- $P(X = x) = 0$ sonst.

Somit gilt überall $P(X = x) = F_X(x) - \lim_{y \nearrow x} F_X(y)$.

6.2 Bekannte Verteilungen

Binomialverteilung

- n -mal unabhängig wiederholtes Bernoulli-Experiment mit Erfolgsws. $p \in [0, 1]$
- $\Omega = \{0, 1\}^n$ mit $p(\omega) = p^{\sum_{i=1}^n \omega_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n \omega_i}$
- $S(\omega) := \sum_{i=1}^n \omega_i$ ist die Anzahl der Erfolge, S ist eine $\{0, \dots, n\}$ -wertige ZV
- $S(\Omega) = \{0, \dots, n\}$
- $P_S(k) = P(\{\omega \in \Omega : S(\omega) = k\}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = b(k; n, p)$ für $k \in \{0, \dots, n\}$
- Eine ZV S mit dieser Verteilung heißt *binomialverteilt mit Parametern n und p*

Abzählbare Ereignisräume

Wir lassen zu, daß Ω abzählbar unendlich ist. Alle Rechenregeln gelten weiterhin.

Beispiel: Würfeln bis zur ersten Sechs

- $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
- $k \in \Omega$ bedeutet, daß wir k -mal würfeln mußten bis zur ersten Sechs
- $p(k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \frac{1}{6}$

Geometrische Verteilung: Warten auf den ersten Erfolg

- Unabhängige Wiederholungen eines Bernoulli-Experiments mit Erfolgsws. $p \in (0, 1]$ bis zum ersten Erfolg
- $\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ und $p(k) = (1-p)^{k-1} p$ für alle $k \in \mathbb{N}$
- Zur Kontrolle: (mit $q = 1-p$)
 $P(\Omega) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p = p \sum_{l=0}^{\infty} q^l = p/(1-q) = 1$ (geometrische Reihe!)
- Eine ZV X mit $P_X(k) = (1-p)^{k-1} p$ für alle $k \in \mathbb{N}$ heißt *geometrisch verteilt mit Erfolgsws. p* .
- Verteilungsfunktion: $F_X(k) = 1 - (1-p)^k$ für $k \in \mathbb{N}$. Werte $F_X(x)$ für $x \notin \mathbb{N}$?

Poisson-Verteilung

- $\Omega = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\lambda > 0$ Parameter
- $p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$
- Zur Kontrolle: $P(\Omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda} e^{-\lambda} = 1$ (e-Reihe!)
- Eine ZV X mit $P_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ heißt *Poisson-verteilt mit Parameter λ* .

6.3 Die gemeinsame Verteilung von Zufallsgrößen

Notation: Indikatorfunktion

Für eine Menge $A \subset \Omega$ definieren wir eine Abbildung $1_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ durch

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } \omega \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel: 3-mal Würfeln mit einem fairen Würfel

- Spieler A verbucht einen "Gewinn" für jede Eins, Spieler B für jede Sechs
- $\Omega = \{1, \dots, 6\}^3$ mit Gleichverteilung
- $X = \sum_{i=1}^3 1_{\{1\}}(\omega_i)$ zählt die Anzahl Einsen in drei Würfeln
 $Y = \sum_{i=1}^3 1_{\{6\}}(\omega_i)$ zählt die Anzahl Sechsen in drei Würfeln
 Die Zufallsgrößen X und Y haben jeweils Zielbereich $\{0, 1, 2, 3\}$.
- $Z = (X, Y)$ ist eine neue, $\{0, 1, 2, 3\}^2$ -wertige Zufallsgröße.

Der Zielbereich von Z ist

$$Z(\Omega) = \{Z(\omega) : \omega \in \Omega\} = \{(X(\omega), Y(\omega)) : \omega \in \Omega\} = \{(x, y) \in \{0, 1, 2, 3\}^2 : x + y \leq 3\}.$$

Die Verteilung P_Z von Z ist gegeben durch

$$P_Z((k, l)) = P(\{\omega \in \Omega : Z(\omega) = (k, l)\}) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = k, Y(\omega) = l\})$$

$P_Z(k, l)$	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$P_Y(l)$
$l = 0$	$(\frac{4}{6})^3$	$3 \frac{1}{6} (\frac{4}{6})^2$	$3 (\frac{1}{6})^2 \frac{4}{6}$	$(\frac{1}{6})^3$	$(\frac{5}{6})^3$
$l = 1$	$3 \frac{1}{6} (\frac{4}{6})^2$	$3! (\frac{1}{6})^2 \frac{4}{6}$	$3 (\frac{1}{6})^3$	0	$3 \frac{1}{6} (\frac{5}{6})^2$
$l = 2$	$3 (\frac{1}{6})^2 \frac{4}{6}$	$3 (\frac{1}{6})^3$	0	0	$3 (\frac{1}{6})^2 \frac{5}{6}$
$l = 3$	$(\frac{1}{6})^3$	0	0	0	$(\frac{1}{6})^3$
$P_X(k)$	$(\frac{5}{6})^3$	$3 \frac{1}{6} (\frac{5}{6})^2$	$3 (\frac{1}{6})^2 \frac{5}{6}$	$(\frac{1}{6})^3$	1

- Zeilensummen? Spaltensummen? Summe über alle Felder?

Definition

Seien X_1, \dots, X_d Zufallsgrößen, dabei sei X_i E_i -wertig für $i = 1, \dots, d$.

- Die *gemeinsame Verteilung* der Zufallsgrößen X_1, \dots, X_d ist die Verteilung der $(E_1 \times \dots \times E_d)$ -wertigen Zufallsgröße $X = (X_1, \dots, X_d)$:

$$P_{(X_1, \dots, X_d)}(x_1, \dots, x_d) := P(X_1 = x_1, \dots, X_d = x_d) \text{ für } x_i \in E_i, i \in \{1, \dots, d\}$$

- Die Verteilung von $X_i, i \in \{1, \dots, d\}$, heißt *i-te Randverteilung* oder *i-te Marginalverteilung*:

$$\begin{aligned} P_{X_i}(x) &= P(X_i = x) \\ &= P(X_1 \in E_1, \dots, X_{i-1} \in E_{i-1}, X_i = x, X_{i+1} \in E_{i+1}, \dots, X_d \in E_d) \\ &= \sum_{x_1 \in E_1} \dots \sum_{x_{i-1} \in E_{i-1}} \sum_{x_{i+1} \in E_{i+1}} \dots \sum_{x_d \in E_d} \\ &\quad P(X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_i = x, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_d = x_d) \\ &= \sum_{x_1 \in E_1} \dots \sum_{x_{i-1} \in E_{i-1}} \sum_{x_{i+1} \in E_{i+1}} \dots \sum_{x_d \in E_d} P_X(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_d) \end{aligned}$$

Beispiel: zweimaliges Werfen einer fairen Münze

- Der Spieler wirft zweimal: $\Omega = \{K, Z\}^2$ mit Gleichverteilung

X, Y seien das Ergebnis des ersten bzw. zweiten Wurfs

Gemeinsame Verteilung: $P_{(X,Y)}(x, y) = 1/4$ für jede Wahl von $(x, y) \in \Omega$

Randverteilungen: $P_X(\{K\}) = 1/2 = P_X(\{Z\})$ und $P_Y(\{K\}) = 1/2 = P_Y(\{Z\})$

- Der faule Spieler wirft nur einmal: $\Omega = \{(K, K), (Z, Z)\}$ mit Gleichverteilung

Wieder seien X, Y das Ergebnis des ersten bzw. zweiten Wurfs

Randverteilungen: $P_X(\{K\}) = 1/2 = P_X(\{Z\})$ und $P_Y(\{K\}) = 1/2 = P_Y(\{Z\})$

Gemeinsame Verteilung: $P_{(X,Y)}(\{(K, K)\}) = 1/2 = P_{(X,Y)}(\{(Z, Z)\})$,

$$P_{(X,Y)}(\{(K, Z)\}) = 0 = P_{(X,Y)}(\{(Z, K)\})$$

Bei gleichen Randverteilungen muß die gemeinsame Verteilung noch lange nicht gleich sein!