

Vertiefung NWI: 7. Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Mittwoch, 21.5.2014

7. Unabhängigkeit von Zufallsgrößen, Erwartungswert und Varianz

7.1 Unabhängigkeit von Zufallsgrößen

Definition: *Unabhängigkeit von Zufallsgrößen*

Die Zufallsgrößen X_1, \dots, X_n auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p) heißen *unabhängig*, wenn für jede Wahl $x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)$ die Ereignisse $\{X_1 = x_1\}, \dots, \{X_n = x_n\}$ unabhängig sind.

Beispiel: *Wiederholtes Werfen eines Würfels*

- $\Omega = \{1, \dots, 6\}^n$ mit Gleichverteilung
- $X_i((\omega_1, \dots, \omega_n)) := \omega_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ (Ergebnis des i -ten Wurfs sei)

Verifizieren Sie, daß X_1, \dots, X_n unabhängig sind.

Folgerung

Die Zufallsgrößen X_1, \dots, X_n sind genau dann unabhängig, wenn ihre gemeinsame Verteilung, d.h., wenn die Verteilung P_X des Vektors $X = (X_1, \dots, X_n)$, die folgende *Produktdarstellung* hat:

$$P_X(x_1, \dots, x_n) = P_{X_1}(x_1) \cdots P_{X_n}(x_n) \quad \text{für alle } x_1, \dots, x_n$$

Folgerung

Die Zufallsgrößen X_1, \dots, X_n sind genau dann unabhängig, wenn für jede Wahl $A_1 \subset X_1(\Omega), \dots, A_n \subset X_n(\Omega)$ die Ereignisse $\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_n \in A_n\}$ unabhängig sind.

Beispiel

Betrachten Sie das Beispiel des n -fachen Würfels.

Beweis der Folgerung ($n = 2$)

" \Leftarrow " Wähle $A_i = \{x_i\}$, $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned} \text{"}\Rightarrow\text{" } P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2) &= \sum_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) \\ &= \sum_{x_1 \in A_1, x_2 \in A_2} P(X_1 = x_1) \cdot P(X_2 = x_2) = P(X_1 \in A_1) \cdot P(X_2 \in A_2) \end{aligned}$$

Dabei haben wir beim ersten Gleichheitszeichen in der zweiten Zeile die Unabhängigkeit der Zufallsgrößen verwendet.

7.2 Erwartungswert und Varianz einer Zufallsgröße

Beispiel: einmal Würfeln mit fairem Würfel

- $\Omega = \{1, \dots, 6\}$ mit Gleichverteilung
- $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, X(\omega) = \omega, X(\Omega) = \Omega \subset \mathbb{R}$
- Fairer Würfel: erwartete Augenzahl ist $\mathbb{E}[X] = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$ (arithmetisches Mittel)

Beispiel: Spiel, bei dem nicht alle Ausgänge gleichwahrscheinlich sind

- Fairer Würfel, Auszahlung sei 6 Euro, falls 2, ..., 6 gewürfelt, sonst k Euro
- $\Omega = \{1, \dots, 6\}$ mit Gleichverteilung
- Auszahlung $Y(\omega) = 6$ für $\omega \in \{2, \dots, 6\}, Y(1) = k$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)p(\omega) = \frac{6 + 6 + 6 + 6 + 6 + k}{6} \\ &= 6 \cdot \frac{5}{6} + k \cdot \frac{1}{6} = 6 \mathbb{P}\{Y = 6\} + k \mathbb{P}\{Y = k\} = \sum_{l \in Y(\Omega)} l \mathbb{P}\{Y = l\}.\end{aligned}$$

Definition: Erwartungswert und Varianz

- Der Erwartungswert einer diskreten Zufallsgröße X mit Zielbereich $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}X = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}\{X = x\},$$

sofern $\sum_{x \in X(\Omega)} |x| \mathbb{P}\{X = x\} < \infty$ (absolute Konvergenz).

Wir sprechen in diesem Fall von der Existenz des Erwartungswerts.

- Falls der Erwartungswert von X existiert, definieren wir die Varianz von X durch

$$\text{Var}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}[X])^2 \mathbb{P}\{X = x\}.$$

Mehr über Varianzen und deren Interpretation in der nächsten VL.

Bemerkungen

- Die Bedingung, daß die den Erwartungswert definierende Reihe absolut konvergent sein muß, garantiert, daß wir die Summanden beliebig umsortieren dürfen.
- Es gilt daher

$$\sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}\{X = x\} = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)p(\omega),$$

sofern eine der Reihen absolut konvergent ist. (Vgl. auch obiges Beispiel mit dem Spiel.)

- Wenn Ω oder auch nur $X(\Omega)$ endlich ist, so existiert der Erwartungswert. Nimmt X nur nicht-negative Werte an, können wir einfach anfangen, den Erwartungswert auszurechnen. Ist das Ergebnis endlich, so existiert der Erwartungswert.
- In der Regel liegt $\mathbb{E}[X]$ nicht in $X(\Omega)$, vgl. erwartete Augenzahl beim einmaligen Würfeln: $\mathbb{E}[X] = 3,5 \notin \{1, \dots, 6\} = X(\Omega)$

Beispiel: Poisson-Verteilung

Sei X Poisson-verteilt, d.h., es existiere ein $\lambda > 0$ mit $\mathbb{P}\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ für alle $k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$. Der Erwartungswert existiert, weil die folgende Rechnung ein endliches Ergebnis hat (alle Summanden sind nichtnegativ).

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda .$$

Beispiel: geometrische Verteilung

Wie lange müssen wir im Mittel warten, bis der erste Erfolg eintritt? Zum Beispiel bis zur ersten Sechse beim Werfen eines fairen Würfels?

Sei X geometrisch verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$, d.h., es gelte $\mathbb{P}\{X = k\} = (1 - p)^{k-1} p$ für alle $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$.

Der Erwartungswert existiert, weil die folgende Rechnung ein endliches Ergebnis hat (auch hier sind alle Summanden nichtnegativ).

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} k(1 - p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} x^k \right) \Big|_{x=1-p} = p \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) \Big|_{x=1-p} ,$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen folgt, da eine Potenzreihe im Innern ihres Konvergenzradius gliedweise differenziert werden darf. Weiter folgt mit Hilfe der bekannten Formel für die Summe einer geometrischen Reihe

$$\mathbb{E}[X] = p \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1 - x} \right) \Big|_{x=1-p} = p \frac{1}{(1 - x)^2} \Big|_{x=1-p} = \frac{1}{p} .$$

Satz: Der Erwartungswert ist linear.

Es seien $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p) , deren Erwartungswerte existieren, und $a, b \in \mathbb{R}$ zwei Konstanten.

Dann ist $aX + bY$ ebenfalls eine Zufallsgröße, der Erwartungswert von $aX + bY$ existiert, und es gilt

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a \mathbb{E}[X] + b \mathbb{E}[Y] .$$

Beispiel: Augensumme bei mehrfachem Würfeln

- $\Omega = \{1, \dots, 6\}^n$ mit Gleichverteilung, $X_i(\omega) = \omega_i$, $X = \sum_{i=1}^n X_i$
- Berechne erwartete Augensumme bei zweimaligem Würfeln ($n = 2$):

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=2}^{12} iP(X_1 + X_2 = i) = \dots \quad (\text{aufwendig})$$

Alternativ

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{\omega \in \Omega} [X_1(\omega) + X_2(\omega)]p(\omega) \\ &= \sum_{\omega_1, \omega_2=1}^6 [\omega_1 + \omega_2] \frac{1}{36} = \frac{1}{36} [6(1 + \dots + 6) + 6(1 + \dots + 6)] = \frac{6 \cdot 2 \cdot 21}{36} = 7 \end{aligned}$$

- Mit Satz

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] = 2 \cdot 3,5 = 7$$

- Leicht zu verallgemeinern: Bei n -maligem Würfeln gilt $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \dots + \mathbb{E}[X_n] = n \frac{7}{2}$

Beweis des Satzes:

Nehmen wir zunächst an, der Erwartungswert von $aX + bY$ existiert. Dann dürfen alle Reihen beliebig umsortiert werden:

$$\mathbb{E}[aX + bY] = \sum_{\omega \in \Omega} [aX(\omega) + bY(\omega)]p(\omega) = a \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)p(\omega) + b \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)p(\omega) = a \mathbb{E}[X] + b \mathbb{E}[Y].$$

Eine analoge Rechnung mit Betragszeichen und Abschätzungen zeigt die Existenz des Erwartungswerts:

$$\sum_{\omega \in \Omega} |aX(\omega) + bY(\omega)|p(\omega) \leq |a| \sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|p(\omega) + |b| \sum_{\omega \in \Omega} |Y(\omega)|p(\omega) < \infty,$$

da nach Voraussetzung $\mathbb{E}X$ und $\mathbb{E}Y$ existieren.

Beispiel: Binomialverteilung

Sei X binomialverteilt mit Parametern n und p . Der Erwartungswert von X existiert, da der Zielbereich von X endlich ist.

- 1. Versuch:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \dots \quad (\text{mit binomischer Formel und etwas Geschick})$$

- 2. Versuch:

Wähle $\Omega = \{0, 1\}^n$. Dann hat die Anzahl der Erfolge X eine Darstellung $X = \sum_{i=1}^n X_i$ mit $X_i(\omega) = \omega_i$. Aus

$$\mathbb{E}[X_i] = 0 \cdot \mathbb{P}\{X_i = 0\} + 1 \cdot \mathbb{P}\{X_i = 1\} = p$$

folgt mit der Linearität des Erwartungswerts sofort

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^n p = np.$$

Beispiel: *St. Petersburg Paradoxon (Erwartungswert muß nicht existieren)*

Ein Casino möchte folgendes Spiel anbieten: Eine faire Münze wird geworfen, bis zum ersten Mal *Kopf* erscheint. Passiert dies beim n -ten Wurf, so sei die Auszahlung $X = 2^n$. Dabei soll natürlich $P(X = 2^n) = 2^{-n}$ gelten.

Wähle $\Omega = \mathbb{N}$ und $p(n) = (1-p)^{n-1}p = 2^{-n}$ für $p = 1/2$ and alle $n \in \Omega$. Die Zufallsgröße $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch $X(n) = 2^n$ für alle $n \in \Omega$.

Was wäre ein fairer Einsatz für dieses Spiel? Wir wollen den Einsatz fair nennen, wenn der Einsatz gleich dem erwarteten Gewinn ist. Wir suchen daher $\mathbb{E}[X]$. Nun ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n P(X = 2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n p(n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty .$$

Der Erwartungswert existiert also nicht, und ein fairer Einsatz kann nicht bestimmt werden.