

## Vertiefung NWI: 11. Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Mittwoch, 17.6.2015

### 11. Zufallsgrößen mit Dichten

#### Erinnerung

Der Satz von de Moivre-Laplace zeigt für eine mit Parametern  $n$  und  $p$  binomialverteilte Zufallsgröße  $S_n$ , daß

$$\mathbb{P}\left\{a < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right\} \rightarrow \int_a^b \varphi(x) dx \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

mit  $\varphi \geq 0$  und  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1$ .

#### Motivation

Für große  $n$  können wir also die Wahrscheinlichkeit, daß die ZV  $(S_n - np)/\sqrt{np(1-p)}$  in einem Intervall  $(a, b]$  liegt, durch ein Integral approximieren. Wir möchten nun allgemeiner Zufallsgrößen mit Werten im Kontinuum (z.B.  $(-\infty, \infty)$ ,  $[a, \infty)$ ,  $(a, \infty)$ ,  $[a, b]$ ,  $[a, b)$ , usw.) mit Hilfe solcher Integrale einführen.

#### Definition: Dichte

Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ , die stückweise stetig ist, heißt *Dichte*, sofern

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

gilt.

#### Erläuterung

Für eine Funktion  $g \geq 0$ , die auf jedem kompakten Intervall  $[-N, +N]$  Riemann-integrierbar ist, ist die Folge  $\{\int_{-N}^{+N} g(x) dx\}_{N \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend in  $N$ . Ist die Folge unbeschränkt, so setzen wir  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = \infty$ , andernfalls

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^{+N} g(x) dx .$$

**Beispiele von Dichten** (vgl. Bilder im Anhang)

1. Dichte der Standardnormalverteilung, vgl. Satz von de Moivre-Laplace,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} .$$

2. Dichte der Normalverteilung mit den Parametern  $\mu \in \mathbb{R}$  und  $\sigma > 0$   
 (Wir werden später sehen, daß  $\mu \in \mathbb{R}$  die Rolle des Erwartungswerts und  $\sigma^2 > 0$  jene der Varianz spielen.)

$$\varphi(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} .$$

Es gilt  $\varphi(x; \mu, \sigma^2) \geq 0$  für alle  $x$ . Somit zeigt die Substitution  $y = (x-\mu)/\sigma$ , daß  $x \mapsto \varphi(x; \mu, \sigma^2)$  eine Dichte ist: Für  $N \rightarrow \infty$  gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-N}^N e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{(-N-\mu)/\sigma}^{(N-\mu)/\sigma} e^{-y^2/2} \sigma dy \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy = 1$$

3. Dichte der uniformen Verteilung auf  $[a, b]$  für  $-\infty < a < b < \infty$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$f$  ist Dichte, weil  $f \geq 0$  und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = 1$$

Beachte:  $f$  ist das Analogon zur Gleichverteilung im Fall diskreter Zufallsgrößen. Wie die Gleichverteilung kann auch die uniforme Verteilung nur auf beschränkten Mengen definiert werden.

4. Dichte der Exponentialverteilung zum Parameter  $\alpha > 0$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \alpha e^{-\alpha x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

$f$  ist Dichte, weil  $f \geq 0$  und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \alpha e^{-\alpha x} dx = - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \frac{d}{dx} (e^{-\alpha x}) dx = - \lim_{N \rightarrow \infty} e^{-\alpha x} \Big|_{x=0}^N = 1$$

**Definition:** Dichte und Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeiten

$f$  sei eine Dichte. Dann heißt eine Zufallsgröße  $X$  *absolutstetig mit Dichte  $f$* , falls die Wahrscheinlichkeit, daß  $X \leq x$  gegeben ist durch

$$F_X(x) := \mathbb{P}\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^x f(y) dy \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Die Funktion  $F_X$  heißt *Verteilungsfunktion* von  $X$ .

## Warnung

Angenommen, wir haben eine ZV  $X$  derart, daß

$$(*) \quad \mathbb{P}\{a < X \leq b\} = \int_a^b f(x) \, dx$$

für alle  $a, b$  mit  $a < b$  (mit einer über ganz  $\mathbb{R}$  integrierbaren Funktion  $f$ ). Dann gilt für jedes  $n$

$$0 \leq \mathbb{P}\{X = a\} \leq \mathbb{P}\{a - 1/n < X \leq a\} = \int_{a-1/n}^a f(x) \, dx \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Das heißt, für jedes  $a$  gilt

$$\mathbb{P}\{X = a\} = 0.$$

Für diskrete Zufallsgröße kann somit keine Dichte  $f$  existieren, weil  $(*)$  nicht für alle  $a < b$  gelten kann!

## Bemerkungen

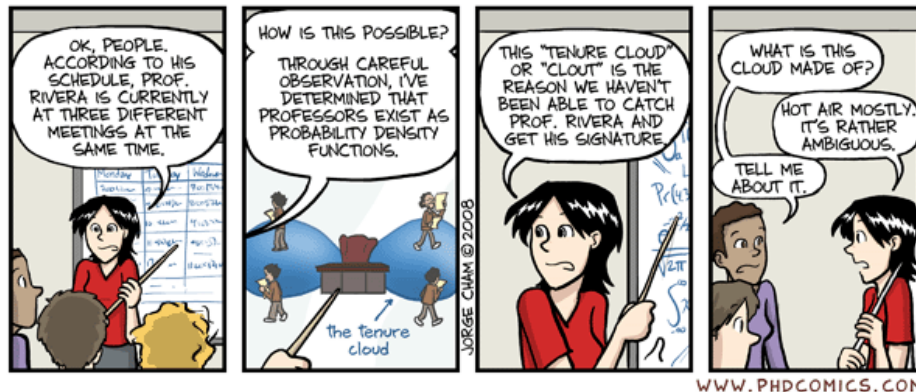
- Im Rahmen dieser Vorlesung nehmen wir einige Einschränkungen in Kauf: Wir zeigen z.B. nicht, unter welchen Voraussetzungen eine Dichte existiert. Auch spezifizieren wir den Wahrscheinlichkeitsraum nicht. Hier gilt es zu beachten, daß  $\mathbb{P}\{X \in A\}$  in der Regel nicht für *alle* Teilmengen von  $\mathbb{R}$  definiert werden kann. Uns soll genügen, daß alles gutgeht, wenn wir uns auf Mengen  $A$  beschränken, die durch höchstens abzählbare Vereinigungen und Schnitte von Intervallen dargestellt werden können.
- Vergleichen Sie die bekannten Eigenschaften der Verteilungsfunktion für diskrete Zufallsgrößen mit jenen der Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße mit Dichte:
  - Verteilungsfunktionen sind monoton wachsend.
  - $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  und  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$
  - Falls die Zufallsgröße  $X$  eine Dichte hat, so ist die Verteilungsfunktion  $F_X$  stetig. Für diskrete Zufallsgrößen dagegen ist die Verteilungsfunktion stückweise konstant.

(Machen Sie zwei Skizzen!)

- Dichten sind nicht eindeutig bestimmt.  
(Verschiedene Dichten ergeben sich, wenn wir ein Dichte in einzelnen Punkten ändern.)
- Ist die Dichte  $f$  stetig in einem Punkt  $a$ , so gilt

$$f(a) = \left. \frac{dF_X(y)}{dy} \right|_{y=a}$$

Dies erlaubt, aus der Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße eine Dichte zu bestimmen.



title: "The Tenure Cloud/t" - originally published 7/14/2008

### Beispiele (vgl. Bilder im Anhang)

#### 3. Verteilungsfunktion der uniformen Verteilung

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \int_a^x \frac{1}{b-a} dy = \frac{x-a}{b-a} & \text{für } x \in [a, b] \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = 1 & \text{für } x > b \end{cases}$$

#### 4. Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \int_0^x \alpha e^{-\alpha y} dy = -e^{-\alpha y} \Big|_{y=0}^x = 1 - e^{-\alpha x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

#### 1. Verteilungsfunktion $\Phi$ der Standardnormalverteilung (siehe Tabelle)

#### 2. Verteilungsfunktion $\Phi_{\mu, \sigma^2}$ der Normalverteilung

$$\Phi_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x e^{-(z-\mu)^2/2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} e^{-y^2/2} dy = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

(mit der gleichen Substitution wie oben)

### Sprechweise

Eine ZG heißt normalverteilt, uniform verteilt, exponentialverteilt, etc, falls sie eine entsprechende Dichte hat.

## Rechenregeln

Hat  $X$  eine Dichte  $f$ , so gelten für alle  $-\infty \leq a < b \leq \infty$

- $\mathbb{P}\{a < X < b\} = \mathbb{P}\{a \leq X \leq b\} = \mathbb{P}\{a \leq X < b\} = \mathbb{P}\{a < X \leq b\}$
- $\mathbb{P}\{a < X \leq b\} = \int_a^b f(x) dx = \mathbb{P}\{X \leq b\} - \mathbb{P}\{X \leq a\} = F_X(b) - F_X(a)$
- $\mathbb{P}\{X \leq b\} = F_X(b) = \int_{-\infty}^b f(x) dx$
- $\mathbb{P}\{a < X\} = \int_a^{\infty} f(x) dx = 1 - \int_{-\infty}^a f(x) dx = 1 - \mathbb{P}\{X \leq a\} = 1 - F_X(a)$

## Beispiel

Berechnen der Wahrscheinlichkeit, daß eine exponentialverteilte Zufallsgröße mit Parameter  $\alpha$  einen Wert größer als  $a$  annimmt bzw. einen Wert zwischen  $a$  und  $b$ .

- Direktes Ausrechnen des entsprechenden Integrals
- Erst Berechnen der Verteilungsfunktion, dann der Wahrscheinlichkeit

## Definition: Erwartungswert und Varianz

Sei  $X$  eine Zufallsgröße mit einer Dichte  $f$ .

- Falls  $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x) dx < \infty$ , so sagen wir, daß *der Erwartungswert von  $X$  existiert*. Er ist in diesem Fall gegeben durch

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N x f(x) dx .$$

(*Warnung*: So dürfen wir nur rechnen, wenn wir bereits gezeigt haben, daß der Erwartungswert existiert, denn für Dichten  $f$ , die gerade Funktionen sind, gilt  $\int_{-N}^N x f(x) dx = 0$  für alle  $N$ , auch wenn der Erwartungswert ggf. gar nicht existiert.)

- Falls der Erwartungswert von  $X$  existiert, definieren wir die *Varianz von  $X$*  als

$$\text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 f(x) dx .$$

Ist  $\text{Var}(X) < \infty$ , so sagen wir, daß die Varianz existiert.

## Bemerkung

Vergleichen Sie mit dem Fall diskreter Zufallsgrößen.

## Beispiele

3. Uniforme Verteilung (direktes Ausrechnen – warum ist der Erwartungswert  $(a + b)/2$ ?)  
 Der Erwartungswert existiert, weil  $f = 0$  außerhalb des kompakten Intervalls  $[a, b]$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{2(b-a)} x^2 \Big|_{x=a}^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} \\ \mathbb{E}[X^2] &= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{3(b-a)} x^3 \Big|_{x=a}^b = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{1}{3}(b^2 + ab + a^2) \\ \text{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}\end{aligned}$$

4. Exponentialverteilung (verwende partielle Integration)

Der Erwartungswert existiert genau dann, wenn die erste Zeile der folgenden Rechnung einen endlichen Wert ergibt (was der Fall ist):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_0^\infty \underbrace{x}_{\downarrow} \underbrace{\alpha e^{-\alpha x}}_{\uparrow} dx = - \lim_{N \rightarrow \infty} x e^{-\alpha x} \Big|_{x=0}^N + \int_0^\infty e^{-\alpha x} dx = 0 + \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty f(x) dx = \frac{1}{\alpha} \\ \mathbb{E}[X^2] &= \int_0^\infty \underbrace{x^2}_{\downarrow} \underbrace{\alpha e^{-\alpha x}}_{\uparrow} dx = - \lim_{N \rightarrow \infty} x^2 e^{-\alpha x} \Big|_{x=0}^N + 2 \int_0^\infty x e^{-\alpha x} dx = 0 + \frac{2}{\alpha} \mathbb{E}[X] = \frac{2}{\alpha^2} \\ \text{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{2}{\alpha^2} - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}\end{aligned}$$

1. Standardnormalverteilung

Die Existenz der Erwartungswerts folgt aus der folgenden Überlegung: Es existiert ein  $x_0 > 0$  mit  $x e^{-x^2/2} \leq e^{-x^2/4}$  für alle  $x \geq x_0$ . Daher gilt für alle  $N \geq x_0$ :

$$\int_{-N}^N |x| \varphi(x) dx \leq 2 \int_0^{x_0} x \varphi(x) dx + 2 \int_{x_0}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/4} dx \leq 2x_0^2 + 2 \int_0^\infty e^{-x^2/4} dx < \infty$$

Wir berechnen nun Erwartungswert und Varianz:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^\infty x \varphi(x) dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \int_{-N}^0 x \varphi(x) dx + \int_0^N x \varphi(x) dx \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ - \int_0^N y \varphi(y) dy + \int_0^N x \varphi(x) dx \right] = 0 \\ \text{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] \\ &= \int_{-\infty}^\infty \underbrace{x}_{\downarrow} \underbrace{x \varphi(x)}_{\uparrow} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ x(-\varphi(x)) \Big|_{x=-N}^N - \int_{-N}^N (-\varphi(x)) dx \right] = 0 + \int_{-\infty}^\infty \varphi(x) dx = 1\end{aligned}$$

2. Normalverteilung (verwende Substitution und Wissen über Dichte, Erwartungswert und Varianz der Standardnormalverteilung)

Existenz des Erwartungswerts: Analog zur obigen Rechnung für die Standardnormalverteilung

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy \\ &= \sigma \int_{-\infty}^{\infty} y \varphi(y) dy + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy = \sigma \cdot 0 + \mu \cdot 1 = \mu \\ \mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y + \mu)^2 \varphi(y) dy \\ &= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \varphi(y) dy + 2\mu\sigma \int_{-\infty}^{\infty} y \varphi(y) dy + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y) dy \\ &= \sigma^2 \cdot 1 + 2\mu\sigma \cdot 0 + \mu^2 \cdot 1 = \sigma^2 + \mu^2 \\ \text{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \sigma^2\end{aligned}$$

### Bemerkung

Die bekannten Rechenregeln gelten weiter:

- Linearität des Erwartungswerts
- $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$  für  $a, b \in \mathbb{R}$
- $\text{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$
- Tschebyscheffsche Ungleichung
- Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit

## Nachtrag zur 11. Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie

### Satz

Sei  $f_X$  eine Dichte der Zufallsgröße  $X$ . Dann gelten:

(a) Die Zufallsgröße  $X^2$  hat die Dichte  $f_{X^2}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} [f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})] & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(b)  $\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx$

### Beweis

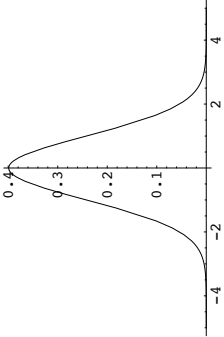
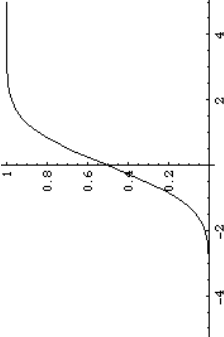
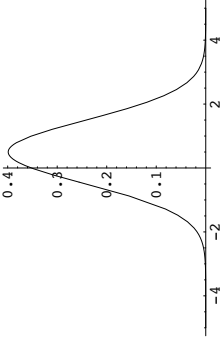
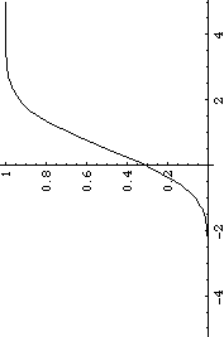
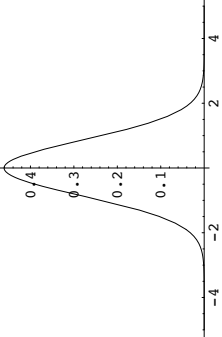
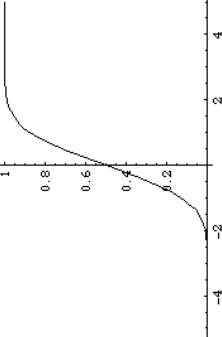
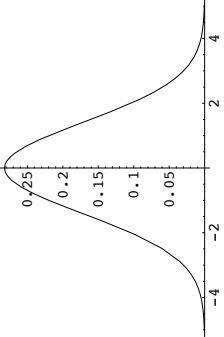
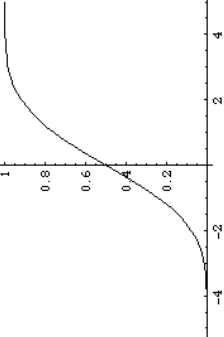
- (a) Für die Verteilungsfunktion  $F_{X^2}$  von  $X^2$  gilt  $F_{X^2}(y) = \mathbb{P}\{X^2 \leq y\} = 0$  für  $y \leq 0$ . Sei daher im folgenden  $y > 0$ . Die Substitution  $z = \sqrt{x}$  zeigt:

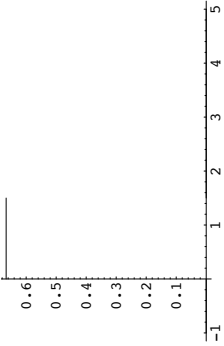
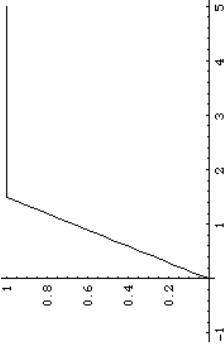
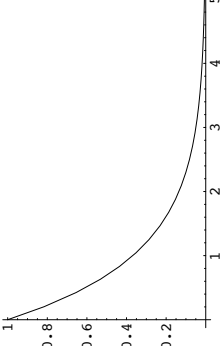
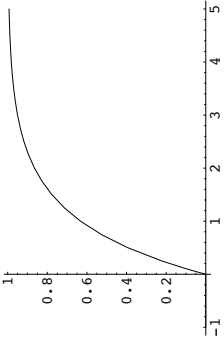
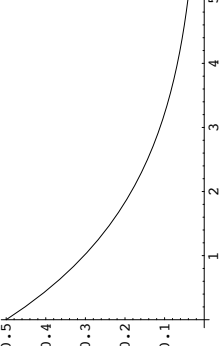
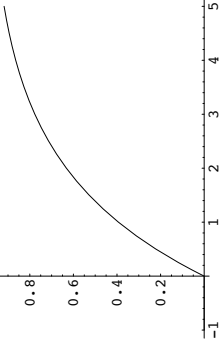
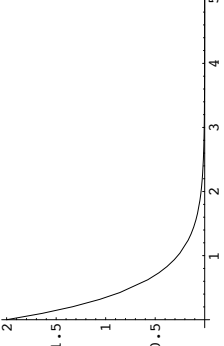
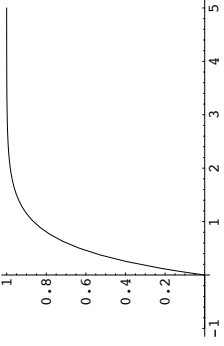
$$\begin{aligned} F_{X^2}(y) &= \mathbb{P}\{X^2 \leq y\} = \mathbb{P}\{-\sqrt{y} < X \leq \sqrt{y}\} \\ &= \int_0^{\sqrt{y}} f_X(x) dx + \int_{-\sqrt{y}}^0 f_X(x) dx = \int_0^{\sqrt{y}} f_X(x) dx + \int_0^{\sqrt{y}} f_X(-x) dx \\ &= \int_0^y \frac{1}{2\sqrt{z}} [f_X(z) + f_X(-z)] dz \end{aligned}$$

- (b) Die Definition des Erwartungswerts und die Substitutionen  $y = x^2$  sowie  $z = -x$ , die die Substitutionen in Teil (a) rückgängig machen, zeigen

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_{X^2}(y) dy = \int_0^{\infty} \frac{y}{2\sqrt{y}} [f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})] dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{x}{2} [f_X(x) + f_X(-x)] 2x dx \\ &= \int_0^{\infty} x^2 f_X(x) dx + \int_{-\infty}^0 z^2 f_X(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx \end{aligned}$$



Verteilung	Parameter	Dichte	Verteilungsfunktion
Standardnormal- verteilung	$(\mu = 0, \sigma = 1)$		
Normalverteilung	$\mu = 1/2, \sigma = 1$		
	$\mu = 0, \sigma = \sqrt{3}/2$		
	$\mu = 0, \sigma = \sqrt{2}$		

Verteilung	Parameter	Dichte	Verteilungsfunktion
<p>uniforme Verteilung</p>	<p><math>a = 0, b = 3/2</math></p>		
<p>Exponential- verteilung</p>	<p><math>\alpha = 1</math></p>		
	<p><math>\alpha = 1/2</math></p>		
	<p><math>\alpha = 2</math></p>		

## Zufallsgrößen mit Dichten

Verteilung	Parameter	Dichte	Verteilungsfunktion	Erwartungswert	Varianz
Standardnormalverteilung	$(\mu = 0, \sigma = 1)$	$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$	$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(y) dy$	0	1
Normalverteilung	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$	$\varphi(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$	$F(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(y; \mu, \sigma) dy$	$\mu$	$\sigma^2$
uniforme Verteilung	$a, b \in \mathbb{R}, a < b$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{für } x > b \end{cases}$	$(a+b)/2$	$(a-b)^2/12$
Exponentialverteilung	$\alpha > 0$	$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \text{für } x \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 - e^{-\alpha x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$	$1/\alpha$	$1/\alpha^2$