Universität Bielefeld

Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz — SS 2015

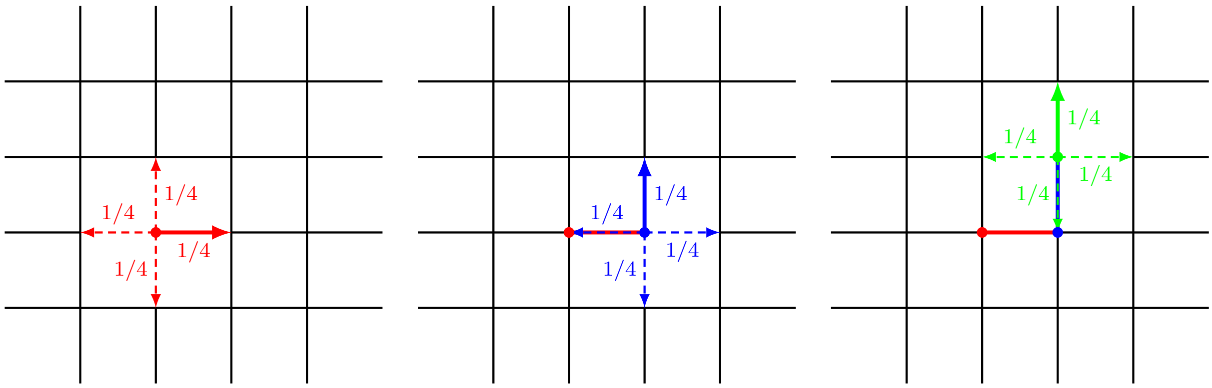
Vertiefung NWI: 13. Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Mittwoch, 1.7.2015

13. Markoffketten

13.1 Beispiele

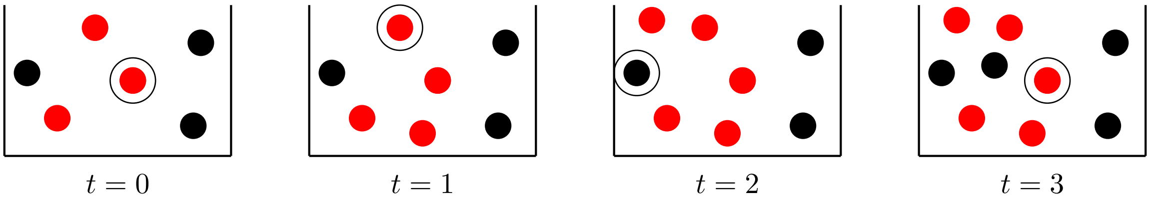
1. Irrfahrt auf dem zweidimensionalen Gitter



$t = 0$ $\qquad$ $t = 1$ $\qquad$ $t = 2$

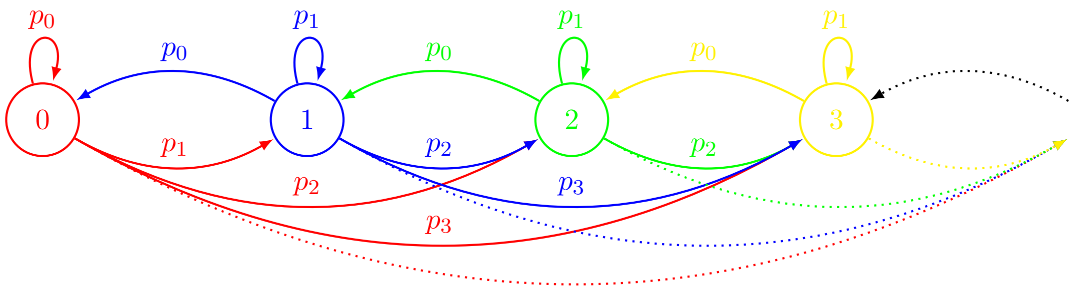
- Wanderer auf dem Gitter $\mathbb{Z}^2 = \{(i,j) \colon i,j \in \mathbb{Z}\}$
- Start zur Zeit $t = 0$ im Ursprung $(0,0)$
- Zur Zeit $t = 1$ ist unser Wanderer in einen der Punkte $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$ gehüpft. Dabei wird das Ziel mit Gleichverteilung gewählt.
- Genau so wird im folgenden mit gleicher Ws. einer der vier Nachbarn gewählt: Wenn der Wanderer zur Zeit t in (i,j) ist, so ist er zur Zeit $t+1$ mit je Ws. $1/4$ in einem der Punkte $(i+1,j)$, $(i-1,j)$, $(i,j+1)$, $(i,j-1)$.

2. Polyas Urnenschema



- Zur Zeit $t = 0$ befinden sich $r_0 > 0$ rote Kugeln und $s_0 > 0$ schwarze Kugeln in einer Urne.
- Es wird zufällig eine Kugel gewählt. Diese wird zurückgelegt zusammen mit einer weiteren Kugel gleicher Farbe, so daß zur Zeit $t = 1$
  - mit Ws. $r_0/(r_0 + s_0)$ in der Urne $r_0 + 1$ rote und s_0 schwarze Kugeln liegen
  - mit Ws. $s_0/(r_0 + s_0)$ in der Urne $s_0 + 1$ schwarze und r_0 rote Kugeln liegen
- Genau so verfahren wir zu jedem diskreten Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}$.
- Zur Zeit $t \in \mathbb{N}_0$ befinden sich also $r_0 + s_0 + t$ Kugeln in der Urne.
- Sind zur Zeit t genau r rote und s schwarze Kugeln in der Urne, so sind zur Zeit $t + 1$ mit Ws. $r/(r + s)$ genau $r + 1$ rote und s schwarze Kugeln und mit Ws. $s/(r + s)$ genau $s + 1$ schwarze und r rote Kugeln in der Urne.

3. Einfaches Warteschlangenmodell



- Eintreffende Kunden an einem Schalter
- Start mit beliebiger Anzahl an Kunden zur Zeit $t = 0$.
- Im Zeitintervall $(t - 1, t]$ treffen mit Ws. p_i genau i neue Kunden ein ($t \in \mathbb{N}$, $i \in \mathbb{N}_0$).
- Wenn zur Zeit $t - 1$ mindestens ein Kunde am Schalter ansteht, so wird im Zeitintervall $(t - 1, t]$ genau ein Kunde bedient. Der Kunde, der bedient wird, verläßt die Warteschlange und tritt an den Schalter. Dieser Kunde zählt dann nicht mehr mit zu den wartenden Kunden.
- Wir studieren die Anzahl X_t der Kunden, die vor dem Schalter warten (und noch nicht bedient werden).

Gemeinsamkeiten dieser Beispiele

- Zu jedem Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}_0$ haben wir eine Zufallsgröße X_t, die Werte in einem *Zustandsraum* S annimmt. Dabei ist S höchstens abzählbar.
  - Irrfahrt: $S = \mathbb{Z}^2$
  - Urnenschema: $S = \{(r, s)\colon r, s \geq 1\}$
  - Warteschlange: $S = \mathbb{N}_0$
- Der zufällige Übergang von X_t zu X_{t+1} ist gegeben durch die bedingte Ws.

  $$P(X_{t+1} = y \mid X_t = x) \qquad \forall x, y \in S\,.$$

  Diese Ws. hängt in den Beispielen nicht von t ab.

  $$p(x, y) := P(X_{t+1} = y \mid X_t = x)$$

  Beachte: $\sum_{y \in S} p(x, y) = 1$.
- Die Verteilung von X_{t+1} hängt *nur* von X_t ab, nicht von der *gesamten Vergangenheit* $X_0, X_1, \ldots, X_t$.

13.2 Definitionen

Definition: *Stochastische Matrix*
Sei S eine abzählbare Menge. Eine Matrix $\mathbb{P} = (p(x,y))_{x,y\in S}$ mit $p(x,y) \in [0,1]$ für alle $x, y \in S$ und $\sum_{y\in S} p(x,y) = 1$ heißt *stochastische Matrix*.

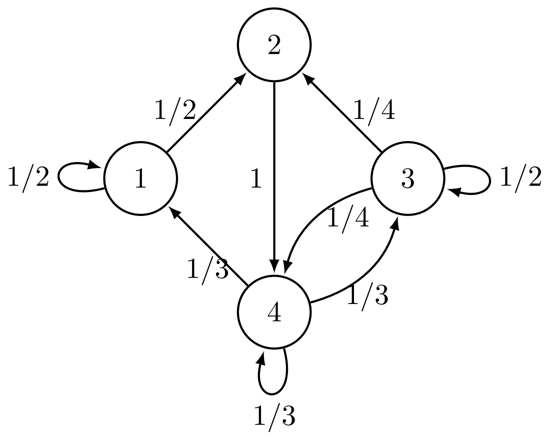
Beispiele

- Irrfahrt:
$$\begin{cases} p((i,j),(k,l)) = 1/4 & \text{falls } |i-k| + |j-l| = 1 \\ p((i,j),(k,l)) = 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
- Urnenschema:
$$\begin{cases} p((r,s),(r+1,s)) = r/(r+s) & \\ p((r,s),(r,s+1)) = s/(r+s) & \\ p((r,s),(\tilde{r},\tilde{s})) = 0 & \text{in allen anderen Fällen} \end{cases}$$
- Warteschlange:
$$\begin{cases} p(0,i) = p_i & \text{für } i \geq 0 \\ p(k,k+i-1) = p_i & \text{für } i \geq 0,\ k > 0 \\ p(k,l) = 0 & \text{in allen anderen Fällen} \end{cases}$$

Graphische Darstellung: *Beispiel*

$S = \{1,2,3,4\}$

$$\mathbb{P} = (p(x,y))_{x,y\in S} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$



Dabei haben wir jeweils genau dann einen Pfeil von x nach y gezeichnet, wenn $p(x,y) > 0$.

Definition: *Markoffkette*
Eine Folge von Zufallsgrößen $X_0, X_1, X_2, \ldots$ mit Werten in einer höchstens abzählbaren Menge S heißt *Markoffkette mit Zustandsraum S und stochastischer Matrix* $\mathbb{P} = (p(x,y))_{x,y\in S}$, wenn

$$P(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_0 = x_0, \ldots, X_t = x_t) = P(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_t = x_t) = p(x_t, x_{t+1})$$

für alle $t \in \mathbb{N}_0$ and alle $x_0, \ldots, x_{t+1} \in S$ gilt.

Wir nennen $\mathbb{P}$ die Matrix der *Übergangswahrscheinlichkeiten*.

Satz
Für alle $t \in \mathbb{N}_0$ und alle $x_0, \ldots, x_t \in S$ gilt

$$P(X_0 = x_0, \ldots, X_t = x_t) = P(X_0 = x_0) \prod_{s=1}^{t} p(x_{s-1}, x_s) \ .$$

Beweis (per Induktion über t)

- Für $t = 0$ ist die Aussage klar.
- Gelte daher die Behauptung für $t \geq 0$. Induktionsschluß von t auf $t+1$:
  - Falls $P(X_0 = x_0, \ldots, X_t = x_t) = 0$, so gilt einerseits

    $$P(X_0 = x_0, \ldots, X_{t+1} = x_{t+1}) \leq P(X_0 = x_0, \ldots, X_t = x_t) = 0 \ ,$$

    andererseits ist nach Induktionsvoraussetzung

    $$P(X_0 = x_0) \prod_{s=1}^{t} p(x_{s-1}, x_s) = 0 \ .$$

    Daraus folgt wiederum $P(X_0 = x_0) \prod_{s=1}^{t+1} p(x_{s-1}, x_s) = 0$.
  - Sei nun $P(X_0 = x_0, \ldots, X_t = x_t) > 0$. Dann gilt

    $$\begin{aligned} &P(X_0 = x_0, \ldots, X_{t+1} = x_{t+1}) \\ &\quad = P(X_0 = x_0, \ldots, X_t = x_t) P(X_{t+1} = x_{t+1} \mid X_0 = x_0, \ldots, X_t = x_t) \\ &\quad = \left[P(X_0 = x_0) \prod_{s=1}^{t} p(x_{s-1}, x_s) \right] p(x_t, x_{t+1}) \\ &\quad = P(X_0 = x_0) \prod_{s=1}^{t+1} p(x_{s-1}, x_s) \ . \end{aligned}$$

Definition: *Startverteilung*
$\nu(x) = P(X_0 = x)$ heißt *Startverteilung* der Markoffkette $X_0, X_1, X_2, \ldots$.

Beispiele

- Irrfahrt: $\nu((0,0)) = 1$ und $\nu((i,j)) = 0$ für $(i,j) \neq (0,0)$
- Urnenschema: Gegeben sind r_0 und s_0. Dann ist $\nu((r_0, s_0)) = 1$ und $\nu((r,s)) = 0$ für alle $(r,s) \neq (r_0, s_0)$.
- Warteschlange: Gegeben sei ein beliebige Verteilung Q auf $\mathbb{N}_0$, d.h. Zahlen $q_i \geq 0$, $i \in \mathbb{N}_0$, mit $\sum q_i = 1$. Wir setzen $\nu(i) = q_i$.

Rechenregel
Aus

$$P(X_0 = x_0, \dots, X_t = x_t) = \nu(x_0) \prod_{s=1}^{t} p(x_{s-1}, x_s)$$

folgt durch Summation

$$P(X_t = x_t) = \sum_{x_0, x_1, \dots, x_{t-1} \in S} \nu(x_0) \prod_{s=1}^{t} p(x_{s-1}, x_s)$$

Notation: *n-stufige Übergangswahrscheinlichkeiten*

- $p^{(0)}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
- $p^{(1)}(x, y) = p(x, y)$
- Für $n \geq 2$: $p^{(n)}(x, y) = \sum_{x_1, \dots, x_{n-1} \in S} p(x, x_1) p(x_1, x_2) \dots p(x_{n-1}, y)$

13.3 Gleichgewichtsverteilung

Definition: *Gleichgewichtsverteilung / stationäre Verteilung*
Sei $\mathbb{P} = (p(x,y))_{x,y\in S}$ eine stochastische Matrix und π eine Verteilung auf S. Gilt

$$\sum_{x\in S} \pi(x)p(x,y) = \pi(y) \qquad \forall y \in S\ ,$$

so heißt π *stationäre Verteilung* oder *Gleichgewichtsverteilung* für die durch $\mathbb{P}$ und eine beliebige Startverteilung ν beschriebene Markoffkette $X_0, X_1, X_2, \ldots$.
Wir sagen auch, daß π die Gleichgewichtsverteilung der Matrix $\mathbb{P}$ ist.

Bemerkung
Eine Gleichgewichtsverteilung ist ein Linkseigenvektor zur Matrix $\mathbb{P}$. Sie kann bestimmt werden durch das Lösen eines linearen Gleichungssystems. Dabei darf nicht vergessen werden, daß die Normierung $\sum_{x\in S}\pi(x) = 1$ eine Gleichung beiträgt.

Beispiel: *Gleichgewichtsverteilung muß nicht existieren*

- Betrachte das Urnenschema.
- **Annahme:** Es ex. eine Gleichgewichtsverteilung π.
- Wir zeigen: Dann ist $\pi((r,s)) = 0$ für alle (r,s).
- Sei $n = r + s$.
- Für $n = 2$, also $r = s = 1$, gilt $p((\tilde r,\tilde s),(1,1)) = 0$ für alle $(\tilde r,\tilde s)$, also
$$\pi((1,1)) = \sum_{(\tilde r,\tilde s)\in\mathbb{N}^2} \pi((\tilde r,\tilde s))p((\tilde r,\tilde s),(1,1)) = 0\ .$$
- Induktionsschluß von n auf $n+1$: Gelte $\pi(r,s) = 0$ für alle (r,s) mit $r+s \le n$, und sei nun $r+s = n+1$.
  - Für $(\tilde r,\tilde s)$ mit $\tilde r + \tilde s \ne n$ ist immer $p((\tilde r,\tilde s),(r,s)) = 0$.
  - Daraus folgt bereits
$$\pi((r,s)) = \sum_{(\tilde r,\tilde s)\in\mathbb{N}^2} \pi((\tilde r,\tilde s))p((\tilde r,\tilde s),(r,s)) = 0\ ,$$
    weil für jeden Summanden entweder $\pi((\tilde r,\tilde s)) = 0$ oder $p((\tilde r,\tilde s),(r,s)) = 0$ gilt.

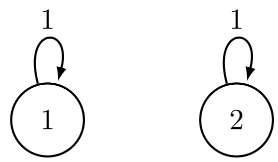
Bemerkungen

- Auch für die Irrfahrt aus unseren Beispielen existiert keine Gleichgewichtsverteilung.
- Für die Warteschlange aus unseren Beispielen mit $p_0 > 0$ und $p_0 + p_1 < 1$ existiert eine Gleichgewichtsverteilung genau dann, wenn $\sum_{i=0}^{\infty} ip_i < 1$ (erwartete Anzahl eintreffender Kunden pro Zeiteinheit).

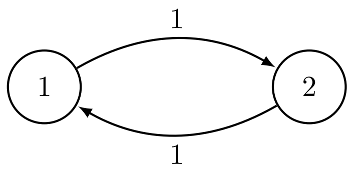
Satz
Ist der Zustandsraum S endlich, so existiert *mindestens eine* Gleichgewichtsverteilung.

Beispiele: *Eindeutigkeit der Gleichgewichtsverteilung?*

- Die Matrix $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hat jede beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung π als Gleichgewichtsverteilung.



- Die Matrix $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat eine eindeutige Gleichgewichtsverteilung, nämlich $\pi = (1/2, 1/2)$.



Satz
Ist die Startverteilung ν gleich einer Gleichgewichtsverteilung π, so gilt

$$P(X_t = x) = \pi(x) \qquad \forall x \in S \;\; \forall t \in \mathbb{N}_0$$

(vgl. "Rechenregel")

Frage
Unter welchen Voraussetzungen gilt $P(X_t = x) \to \pi(x)$ für $t \to \infty$?