Vertiefung NWI: 14. Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Mittwoch, 8.7.2015

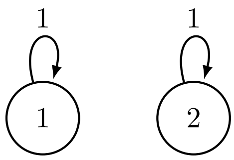
14. Markoffketten: Irreduzibilität, Periode und Gleichgewichtsverteilung

14.1 Fragen

Satz: *Existenz einer Gleichgewichtsverteilung*
Ist S endlich, so existiert mindestens eine Gleichgewichtsverteilung π.

Fragen

- Wann ist π eindeutig?
  Vgl. $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für Nichteindeutigkeit:

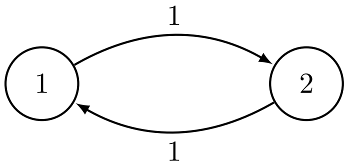
  

  Es gilt $(\nu_1, \nu_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\nu_1, \nu_2)$ für jede Startverteilung ν.
- Gilt $P(X_t = x) \to \pi(x)$ für $t \to \infty$ und alle $x \in S$?

Beobachtungen

- Bezug n-stufiger Übergangsmatrizen zu Matrixprodukten: $\mathbb{P}^n = (p^{(n)}(x,y))_{x,y \in S}$
- Gilt für die Startverteilung $\nu(x_0) = 1$ für ein $x_0 \in S$, so gilt $P(X_n = x) = p^{(n)}(x_0, x)$.
- Für beliebige Startverteilungen ν gilt $P(X_n = x) = \sum_{y \in S} \nu(y) p^{(n)}(y, x)$, das heißt, $P(X_n = x)$ ist das zu x gehörende Element von $\nu \mathbb{P}^n$.

Beispiel



- $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $\pi = (1/2, 1/2)$ ist Gleichgewichtsverteilung, denn $\pi\mathbb{P} = (1/2, 1/2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (1/2, 1/2) = \pi$
- $\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{P}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{P}^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{P}^5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbb{P}^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbb{P}^7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\ldots$
- $\mathbb{P}^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbb{P}^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- Für jede Startverteilung $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ gilt

$$(P(X_n = 1), P(X_n = 2)) = \nu\mathbb{P}^n = \begin{cases} (\nu_1, \nu_2) & \text{für } n \text{ gegrade} \\ (\nu_2, \nu_1) & \text{für } n \text{ ungegrade} \end{cases}$$

Folglich konvergiert $P(X_n = x)$ für $n \to \infty$ *nicht*, es sei denn $\nu = \pi$.

14.2 Irreduzibilität

Definition: *Erreichbarkeit*

Seien $x, y \in S$. y heißt erreichbar von x, wenn ein $n \in \mathbb{N}_0$ existiert mit $p^{(n)}(x,y) > 0$.

Schreibweise: $x \rightsquigarrow y$

Beobachtungen

- $p^{(0)}(x,x) = 1$ impliziert $x \rightsquigarrow x$
- Gelten $x \rightsquigarrow y$ und $y \rightsquigarrow z$, so gilt $x \rightsquigarrow z$, denn

$$p^{(n+m)}(x,z) = \sum_{u \in S} p^{(n)}(x,u)p^{(m)}(u,z) \geq p^{(n)}(x,y)p^{(m)}(y,z) > 0$$

- $x \rightsquigarrow y$ gilt genau dann, wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:
  - $p^{(0)}(x,y) = 1$ (nur möglich für $x = y$)
  - $p^{(1)}(x,y) > 0$
  - Es existieren $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in S$ mit

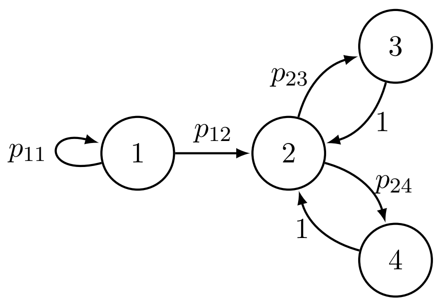
$$p(x,x_1) > 0,\ p(x_1,x_2) > 0, \ldots,\ p(x_{n-1},x_n) > 0,\ p(x_n,y) > 0$$

Definition: *irreduzible Markoffkette*

Eine Markovkette heißt irreduzibel, wenn $x \rightsquigarrow y$ gilt für alle $x, y \in S$.

Beispiele

- $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ beschreibt *nicht irreduzible* Markoffkette
- $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ beschreibt eine *irreduzible* Markoffkette
- Ein weiteres Beispiel einer nicht irreduziblen Markoffkette ($2 \not\rightsquigarrow 1$)



- Irrfahrt: irreduzibel
- Urnenschema: nicht irreduzibel, da $(r,s) \rightsquigarrow (\tilde{r},\tilde{s})$ nur gilt, wenn $\tilde{r} \geq r$ und $\tilde{s} \geq s$

Satz
Seien S endlich und $\mathbb{P} = (p(x,y))_{x,y \in S}$ eine stochastische Matrix mit $p(x,y) > 0$ für alle $x, y \in S$. Dann gelten:

- $\mathbb{P}$ hat genau eine Gleichgewichtsverteilung π.
- $\lim_{n\to\infty} p^{(n)}(x,y) = \pi(y) > 0 \quad \forall\, x, y \in S$

Bemerkung
Die Voraussetzungen können abgeschwächt werden zu irreduzibel und aperiodisch, siehe unten.

Bemerkung
Ist $X_0, X_1, \dots$ eine Markoffkette mit Start in x und stochastischer Matrix $\mathbb{P}$, so sagt der zweite Teil des Satzes

$$P(X_n = y) = p^{(n)}(x,y) \to \pi(y) > 0 \qquad \text{für } n \to \infty\ ,$$

das heißt, egal in welchem Zustand $x \in S$ die Markoffkette startet, nach hinreichend langer Zeit ist die Verteilung von X_n nahe bei π.

Beispiele, die die Voraussetzungen des Satzes nicht erfüllen

- Irrfahrt, Urnenschema und Warteschlange haben keinen endlichen Zustandsraum
- Für die Irrfahrt gilt nicht, daß $p(x,y) > 0$ für alle $x, y \in S$
- Viele Beispiele mit endlichem S erfüllen ebenfalls nicht $p(x,y) > 0$ für alle $x, y \in S$.

Frage: Welche Aussagen gelten trotzdem?

14.3 Verallgemeinerungen

Satz: *Eindeutigkeit der Gleichgewichtsverteilung*
Ist eine Markoffkette irreduzibel und existiert eine Gleichgewichtsverteilung π, so ist die Gleichgewichtsverteilung eindeutig bestimmt.

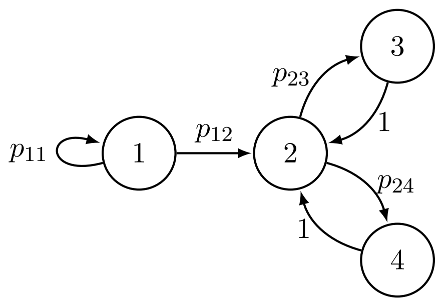
Definition
Sei $\mathbb{P}$ eine stochastische Matrix. Für $x \in S$ seien

$$N_x = \{n \in \mathbb{N} : p^{(n)}(x,x) > 0\} \qquad \text{und} \qquad d(x) = \mathsf{ggT}(N_x)$$

Dabei sei $d(x) = \infty$, falls $N_x = \emptyset$.

Beispiele

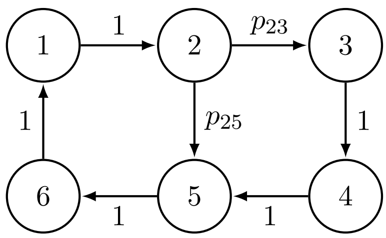
- $S = \{1,2,3,4\}$



$$\begin{aligned} N_1 &= \{1,2,3,\dots\} &\Rightarrow\quad d(1) = 1 \\ N_2 &= \{2,4,6,\dots\} &\Rightarrow\quad d(2) = 2 \\ N_3 &= \{2,4,6,\dots\} &\Rightarrow\quad d(3) = 2 \\ N_4 &= \{2,4,6,\dots\} &\Rightarrow\quad d(4) = 2 \end{aligned}$$

- $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat $d(x) = 2$ für alle $x \in S$

- $S = \{1,\dots,6\}$



$$N_x = \{4,8,12,\dots\} \cup \{6,12,18,\dots\} \cup \{10,14,16,\dots\}$$

Dabei entspricht $\{4,8,12,\dots\}$ den "kleinen Runden" (z.B. $1 \to 2 \to 5 \to 6 \to 1$);
$\{6,12,18,\dots\}$ entspricht den "großen Runden" (z.B. $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5 \to 6 \to 1$);
und $\{10,14,16,\dots\}$ entspricht gemischten Wegen, die kleine und große Runden kombinieren.

$d(x) = 2 \quad \forall x \in S$

- Zweidimensionale Irrfahrt: $p^{(2)}(x,x) = 4 \cdot 1/4 \cdot 1/4 = 1/4$ (Schritt zu einem der Nachbarn und zurück). Es gilt $p^{(2n+1)}(x,x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in S$. Somit ist $d(x) = 2$ für alle $x \in S$.

- Urnenschema: $d((r,s)) = \infty$ für alle $(r,s) \in S$.

Beobachtung für irreduzible Markoffketten

- Ist $S = \{x\}$, so ist $p(x,x) = 1$, also $1 \in N_x$ und damit $d(x) = 1$.
- Hat S mehr als ein Element und gilt $p^1(x,x) = 0$, so existiert zu x ein $y \neq x$ sowie $n, m \in \mathbb{N}$ mit $p^{(n)}(x,y) > 0$ und $p^{(m)}(y,x) > 0$. Daraus folgt $p^{(n+m)}(x,x) \geq p^{(n)}(x,y)p^{(m)}(y,x) > 0$. Also ist $n + m \in N_x$.
- In beiden Fällen gilt $1 \leq d(x) < \infty$.

Satz
Ist $\mathbb{P}$ irreduzibel, so ist $d(x)$ nicht von x abhängig.

Definition: *Periode einer Markoffkette*

- Ist $\mathbb{P}$ irreduzibel, so heißt die Zahl $d = d(x)$ die Periode der zugehörigen Markoffkette.
- Ist $d = 1$, so heißt die Markoffkette *aperiodisch*.

Satz: *Konvergenz gegen die Gleichgewichtsverteilung*
Sei die stochastische Matrix $\mathbb{P} = (p(x,y))_{x,y \in S}$ irreduzibel und aperiodisch. Existiert eine Gleichgewichtsverteilung π, so gilt für alle $x, y \in S$

$$\lim_{n \to \infty} p^{(n)}(x,y) = \pi(y) \ .$$