

Vertiefung NWI: 2. Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Mittwoch, 15.04.2015

2. Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Definition: (Ω, p) heißt Wahrscheinlichkeitsraum (W-Raum)

Erinnerung: Ereignisse sind Teilmengen des Ereignisraums Ω

Mengen und Mengenoperationen: Seien $A, B, A_1, A_2, \dots \subset \Omega$

- Komplement von A : $A^c = \{\omega \in \Omega: \omega \notin A\}$
- Schnitt von A und B : $A \cap B = \{\omega \in \Omega: \omega \in A \text{ und } \omega \in B\}$
- Vereinigung von A und B : $A \cup B = \{\omega \in \Omega: \omega \in A \text{ oder } \omega \in B\}$
- A ohne B : $A \setminus B = \{\omega \in \Omega: \omega \in A \text{ und } \omega \notin B\} = A \cap B^c$
- A und B disjunkt: $A \cap B = \emptyset$
- A_1, A_2, A_3, \dots paarweise disjunkt: $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j \text{ mit } i \neq j$
- A_1, A_2, A_3, \dots disjunkt: $\bigcap_i A_i = \emptyset$

Beispiel: Würfeln, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ und $C = \{2, 4, 5\}$

Sind die drei Ereignisse disjunkt? Welche sind paarweise disjunkt?

$A \cap B = \{1, 3\} \neq \emptyset$, $A \cap C = \{5\} \neq \emptyset$, $B \cap C = \{2\} \neq \emptyset$, aber $A \cap B \cap C = \emptyset$.

D.h., A, B, C sind disjunkt, aber nicht paarweise disjunkt.

Beispiel

Die Mengen $A_i = \{j \in \mathbb{N} : j \geq i\} \subset \mathbb{N}$ sind disjunkt, aber nicht paarweise disjunkt

Rechenregeln für Mengen / Ereignisse: Seien $A, B, C \subset \Omega$

- *Transitivität:* Gelten $A \subset B$ und $B \subset C$, so folgt $A \subset C$
- *Kommutativgesetz:* $A \cup B = B \cup A$ sowie $A \cap B = B \cap A$
- *Assoziativgesetz:* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ sowie $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- *Distributivgesetz:*
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ sowie $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- *de Morgansche Regeln:* $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ sowie $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Beweis: elementweise, vgl. Bilder

Exemplarisch für die erste Variante des Distributivgesetzes:

" \subset ": Sei $\omega \in A \cap (B \cup C)$. Dann ist $\omega \in A$. Ausserdem gilt $\omega \in B$ oder $\omega \in C$. Ist $\omega \in B$, so folgt $\omega \in A \cap B \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Analog impliziert $\omega \in C$, daß $\omega \in A \cap C \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ gilt.

" \supset ": Sei $\omega \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Dann ist $\omega \in A \cap B$ oder $\omega \in A \cap C$. Ist $\omega \in A \cap B$, so folgt weiter, daß $\omega \in A$ und $\omega \in B \subset B \cup C$ gelten, also $\omega \in A \cap (B \cup C)$. Ist $\omega \in A \cap C$, so folgt analog $\omega \in A \cap (B \cup C)$.

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten: Seien $A, B, A_1, A_2, \dots \subset \Omega$

- Für paarweise disjunkte A_1, A_2, \dots gilt: $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$
Beweis: Definition der Ws. eines Ereignisses, dann Umschreiben der Summe
- $P(A^c) = 1 - P(A)$
Beweis: Mit $\Omega = A \cup A^c$ zurückführen auf (a)
- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
Beweis: B disjunkt zerlegen, (a) anwenden
- $A \subset B \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$
Beweis: wie für (c)
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Beweis: Disjunktes Zerlegen von $A \cup B$ und erneutes Zusammensetzen zeigt
 $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A \cap B^c) + P(B \cap A^c) + 2P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

Ein- und Ausschlußprinzip: Seien $A, B, C \subset \Omega$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Allgemeiner Fall: Seien $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_i P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

Beweis: Vollständige Induktion

Beispiel: n -mal Würfeln

Wie groß ist die Ws., mindestens eine Sechs zu werfen?

- $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^n = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_k \in \{1, \dots, 6\} \text{ für } k = 1, \dots, n\}$
(alle n -Tupel mit Einträgen aus $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$)
- Für p wähle die Gleichverteilung auf Ω , d.h. $p(\omega) = 1/|\Omega| = 1/6^n \quad \forall \omega \in \Omega$
- $A = \{\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega : \exists k \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } \omega_k = 6\}$
(A ist das Ereignis, mindestens eine Sechs zu würfeln)
- $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ mit $A_i = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega : \omega_i = 6\}$
(A_i ist das Ereignis, eine Sechs im i -ten Wurf zu würfeln)
Beachte: Die Ereignisse A_i sind *nicht* paarweise disjunkt!

Wir wollen das Ein- und Ausschlußprinzip verwenden:

- $P(A_i) = |A_i|/|\Omega| = 6^{n-1}/6^n = 1/6$
- $P(A_i \cap A_j) = |A_i \cap A_j|/|\Omega| = 6^{n-2}/6^n = 1/6^2$ für $i < j$
- $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = |A_i \cap A_j \cap A_k|/|\Omega| = 6^{n-3}/6^n = 1/6^3$ für $i < j < k$
- Allgemein:
 $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|/|\Omega| = 6^{n-k}/6^n = 1/6^k$ für $i_1 < i_2 < \dots < i_k$

Mit dem Ein- und Ausschlußprinzip:

$$P(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{1}{6^k}$$

Der Ausdruck kann weiter vereinfacht werden mit Hilfe der binomischen Formel:

$$P(A) = - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{6^k} + \binom{n}{0} \frac{1}{6^0} = 1 - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{6}\right)^k 1^{n-k} = 1 - \left(1 - \frac{1}{6}\right)^n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Beispiel: n -mal Würfeln (mit einfacherem Lösungsweg)

$A^c = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega : \omega_i \in \{1, \dots, 5\} \text{ für } i = 1, \dots, n\}$ impliziert sofort

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Knobelaufgabe

Eine Entscheidung soll durch Münzwurf gefällt werden. Wir wissen nicht, ob die einzige zur Verfügung stehende Münze fair ist bzw. mit welcher Wahrscheinlichkeit sie *Kopf* zeigt.

Wie können wir trotzdem eine faire Entscheidung treffen?

Die Aufgabe kann mit dem derzeitigen Kenntnisstand noch nicht vollständig bearbeitet werden. Was fehlt noch?