Universität Bielefeld

Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz

Vertiefung NWI: 3. Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Mittwoch, 22.04.2015

3. Kombinatorik: Geordnetes / ungeordnetes Ziehen mit/ohne Zurücklegen

1. Beispiel: Gegeben ein Alphabet mit n verschiedenen Symbolen. Wie viele verschiedene Wörter der Länge k können gebildet werden?

Klassifizierung: *geordnetes Ziehen mit Zurücklegen*

- Reihenfolge der Symbole im Wort ist relevant
- Symbole können mehrfach verwendet werden

Allgemeiner Fall
Geordnetes Ziehen mit Zurücklegen von k Kugeln aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln (die Kugeln seien numeriert von 1 bis n)

$$\Omega = \{1, \dots, n\}^k \quad \text{und} \quad |\Omega| = n^k$$

2. Beispiel: Gegeben n verschiedenfarbige Perlen. k Perlen werden ausgewählt und der Reihe nach auf eine Schnur gezogen. Wie viele verschiedene Muster sind möglich?

Klassifizierung: *geordnetes Ziehen ohne Zurücklegen*

- Reihenfolge der Perlen auf der Schnur ist relevant
- Jede Perle kann nur einmal verwendet werden

Allgemeiner Fall
Geordnetes Ziehen ohne Zurücklegen von $k \leq n$ Kugeln aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln (die Kugeln seien numeriert von 1 bis n)

$$\Omega = \{\omega \in \{1, \dots, n\}^k \colon \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\} \quad \text{und} \quad |\Omega| = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Spezialfall: $k = n$
Ω ist die Menge aller Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ und $|\Omega| = n! = n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1$

3. Beispiel: Wie groß ist die Anzahl der möglichen Tipps im Lotto "6 aus 49"?

Klassifizierung: *ungeordnetes Ziehen ohne Zurücklegen*

- Reihenfolge des Ankreuzens der Lottozahlen ist irrelevant
- Jede Zahl kann höchstens einmal angekreuzt werden pro Tipp

Allgemeiner Fall
Ungeordnetes Ziehen ohne Zurücklegen von $k \leq n$ Kugeln aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln (die Kugeln seien numeriert von 1 bis n)

$$\Omega = \{\{\omega_1, \ldots, \omega_k\} \subset \{1, \ldots, n\} : \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\}$$

ist die Menge aller k-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ und

$$|\Omega| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

4. Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es, k ununterscheidbare Murmeln auf n Urnen zu verteilen?

Grundidee: Wir wählen für jede Murmel, in welche Urne wir sie legen.

Klassifizierung: *ungeordnetes Ziehen mit Zurücklegen*

- Reihenfolge ist egal, denn uns interessiert die Anzahl Murmeln in jeder Urne, aber nicht, in welcher Reihenfolge die Murmeln in die Urnen gelegt wurden
- Urnen können mehrfach gewählt werden, da mehrere Murmeln in dieselbe Urne gelegt werden können

6 Urnen mit 7 Murmeln: ooo | o | | oo | o |

Die erste Urne enthält drei Murmeln, die zweite Urne eine Murmel, die dritte Urne ist leer, ... Beachte dabei: Auch die letzte Urne ist leer.

Wir notieren dies mittels einer ein-eindeutigen Zuordnung als $(1, 1, 1, 2, 4, 4, 5)$, wobei wir die Nummern der Urnen so oft schreiben, wie es der Anzahl der Murmeln in der Urne entspricht, und die Nummern aufsteigend ordnen.[1]

Wir bestimmen die Anzahl Möglichkeiten, indem wir zählen, wie viele Möglichkeiten es gibt, k ununterscheidbare Murmeln und $n-1$ Trennwände anzuordnen. Dazu müssen wir aus den insgesamt $n-1+k$ unterscheidbaren, d.h. numerierten, Plätzen k Plätze für die Murmeln auswählen. (Äquivalent: Wähle $n-1$ Plätze für die Wände.) Mit Hilfe des 3. Beispiels:

$$\binom{n+k-1}{k} \quad \text{Möglichkeiten}$$

[1] Dieses Vorgehen vermeidet das Notationsproblem für Multimengen aus der 1. Vorlesung.

Allgemeiner Fall

Ungeordnetes Ziehen mit Zurücklegen von k Kugeln aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln (die Kugeln seien numeriert von 1 bis n)

$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_k) \in \{1, \dots, n\}^k \colon \omega_1 \le \omega_2 \le \dots \le \omega_k\} ,$$

wobei wir alle Permutationen des k-Tupels $(\omega_1, \dots, \omega_k)$ als äquivalent betrachten und uns $(\omega_1, \dots, \omega_k)$ mit $\omega_1 \le \omega_2 \le \dots \le \omega_k$ als Repräsentant dient. Es ist

$$|\Omega| = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

Alternativ

$$\widetilde{\Omega} = \{(\widetilde{\omega}_1, \dots, \widetilde{\omega}_n) \in \{0, \dots, k\}^n \colon \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\omega}_i = k\} ,$$

wobei $\widetilde{\omega}_i$ angibt, wie oft die Kugel Nummer i gezogen wurde. Da beide Alternativen äquivalent sind, gilt $|\Omega| = \left|\widetilde{\Omega}\right|$.

Weitere Beispiele

(a) Wie groß ist die Ws., mit vier identischen Würfeln vier verschiedenen Augenzahlen zu werfen?

(b) Wie groß ist die Ws., beim Lotto “6 aus 49” genau vier Richtige zu haben?

(c) Wie viele Möglichkeiten gibt es für zwei ununterscheidbare Spatzen, sich auf vier Stromleitungen zu verteilen?