Universität Bielefeld

Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz

SS 2015

Vertiefung NWI: 6. Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Mittwoch, 13.05.2015

6. Zufallsgrößen und ihre Verteilungen

6.1 Die Verteilung einer Zufallsgröße

Ω Ereignisraum, $p(\omega)$ Wahrscheinlichkeit des Elementarereignisses $\omega \in \Omega$

Beispiel: *Dreimaliges Werfen einer fairen Münze*

- $\Omega = \{0,1\}^3$ statt $\{Z,K\}^3$ mit Gleichverteilung
- Anzahl Kopf, die der Spieler erzielt?
- $X : \Omega \to E$, $\omega \mapsto X(\omega) := \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$, mit $E := \{0,1,2,3\}$ oder $E = \mathbb{N}_0$ (oder jeder anderen Menge $E \supset \{0,1,2,3\}$)
- $X(\Omega) := \{X(\omega) \colon \omega \in \Omega\} = \{0,1,2,3\} \subset E$
- $P_X(k) := P(\{X = k\})$ für $k \in \{0,1,2,3\}$ definiert Ws. auf $\{0,1,2,3\}$ bzw. auf E:
  $P_X(0) = 1/8$, $P_X(1) = 3/8$, $P_X(2) = 3/8$, $P_X(3) = 1/8$, $P_X(k) = 0$ für alle anderen k

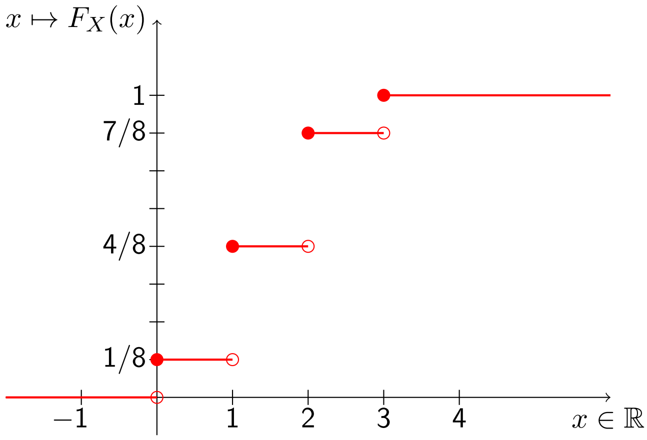
Definition

- Eine Abbildung $X : \Omega \to E$ heißt E-wertige *Zufallsgröße (ZG)* oder *Zufallsvariable ZV (ZV)*. Dabei ist $E \neq \emptyset$ eine beliebige Menge.
- $X(\Omega) := \{X(\omega) \colon \omega \in \Omega\}$ heißt *Zielbereich* der Zufallsgröße X; $X(\Omega) \subset E$.
- $P_X(x) := P(\{\omega \in \Omega \colon X(\omega) = x\})$ für $x \in X(\Omega)$ definiert eine Ws. auf $X(\Omega)$.
  Alternativ können wir $P_X(x)$ für alle $x \in E$ definieren mit $P_X(x) = 0$ für $x \notin X(\Omega)$.
- P_X heißt *Verteilung* von X.
- Ist $E \subset \mathbb{R}$, so heißt die Abbildung $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $F_X(x) := P(\{X \leq x\}) = P_X((-\infty, x])$ die *Verteilungsfunktion* von X.

Beweis, daß P_X eine Ws. ist:

$$\sum_{x \in X(\Omega)} P_X(x) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(\{\omega \in \Omega \colon X(\omega) = x\}) = P(\{\omega \in \Omega \colon X(\omega) \in X(\Omega)\}) = P(\Omega) = 1$$

Verteilungsfunktion für Anzahl Kopf bei dreimaligem Werfen einer fairen Münze



Bemerkung
Ist die Verteilungsfunktion F_X einer diskreten Zufallsgröße X gegeben, so lassen sich die Ws. $P(X = x)$ ablesen:

- $P(X = x)$ ist die Höhe $F_X(x) - \lim_{y \nearrow x} F_X(y)$ des Sprungs der Verteilungsfunktion an der Stelle x, sofern ein Sprung vorliegt;
- $P(X = x) = 0$ sonst.

Somit gilt überall $P(X = x) = F_X(x) - \lim_{y \nearrow x} F_X(y)$.

6.2 Bekannte Verteilungen / benannte Verteilungen

Binomialverteilung

- n-mal unabhängig wiederholtes Bernoulli-Experiment mit Erfolgsws. $p \in [0,1]$
- $\Omega = \{0,1\}^n$ mit $p(\omega) = p^{\sum_{i=1}^n \omega_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n \omega_i}$
- Für *jedes* n-Tupel ω mit genau k Einsen gelten $\sum_{i=1}^n \omega_i = k$ und $p(\omega) = p^k(1-p)^{n-k}$
- $S(\omega) := \sum_{i=1}^n \omega_i$ ist die Anzahl der Erfolge, S ist eine $\{0,\dots,n\}$-wertige ZV
- $S(\Omega) = \{0,\dots,n\}$
- $P_S(k) = P(\{\omega \in \Omega \colon S(\omega) = k\}) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = b(k;n,p)$ für $k \in \{0,\dots,n\}$
- Eine ZV S mit dieser Verteilung heißt *binomialverteilt mit Parametern n und p*

Abzählbare Ereignisräume

Wir lassen ab sofort zu, daß Ω abzählbar unendlich ist. Alle Rechenregeln gelten weiterhin.

Beispiel: *Würfeln bis zur ersten Sechs*

- $\Omega = \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$
- $k \in \Omega$ bedeutet, daß wir k-mal würfeln mußten bis zur ersten Sechs
- $p(k) = (\frac{5}{6})^{k-1}\frac{1}{6}$ (bei unabhängig wiederholten Würfen)

Geometrische Verteilung: *Warten auf den ersten Erfolg*

- Unabhängige Wiederholungen eines Bernoulli-Experiments mit Erfolgsws. $p \in (0,1]$ bis zum ersten Erfolg
- $\Omega = \mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ und $p(k) = (1-p)^{k-1}p$ für alle $k \in \mathbb{N}$
- Zur Kontrolle: (mit $q = 1-p$)

  $P(\Omega) = \sum_{k=1}^\infty q^{k-1}p = p\sum_{l=0}^\infty q^l = p/(1-q) = 1$ (geometrische Reihe!)

  Wir haben gerade gezeigt, daß der erste Erfolg mit Ws. 1 nach einer endlichen, wenn auch zufälligen, Zeit eintritt.
- Eine ZV X mit $P_X(k) = (1-p)^{k-1}p$ für alle $k \in \mathbb{N}$ heißt *geometrisch verteilt mit Erfolgsws. p.*
- Verteilungsfunktion: $F_X(k) = 1-(1-p)^k$ für $k \in \mathbb{N}$. Werte $F_X(x)$ für $x \notin \mathbb{N}$?
- Beweis: $F_X(k) = 1 - P(X > k) = 1 - \sum_{l=k+1}^\infty q^{l-1}p = 1 - q^k \underbrace{\sum_{l=1}^\infty q^{l-1}p}_{=P(\Omega)=1} = 1 - q^k$

Poisson-Verteilung

- $\Omega = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\lambda > 0$ Parameter
- $p(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, \mathrm{e}^{-\lambda}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$
- Zur Kontrolle: $P(\Omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}\, \mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathrm{e}^{\lambda}\, \mathrm{e}^{-\lambda} = 1$ (e-Reihe!)
- Eine ZV X mit $P_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\, \mathrm{e}^{-\lambda}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ heißt *Poisson-verteilt mit Parameter λ.*

6.3 Die gemeinsame Verteilung von Zufallsgrößen

Notation: *Indikatorfunktion*
Für eine Menge $A \subset \Omega$ definieren wir eine Abbildung $1_A : \Omega \to \{0,1\}$ durch

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } \omega \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel: *3-mal Würfeln mit einem fairen Würfel*

- Spieler A verbucht einen "Gewinn" für jede Eins, Spieler B für jede Sechs
- $\Omega = \{1, \dots, 6\}^3$ mit Gleichverteilung
- $X = \sum_{i=1}^{3} 1_{\{1\}}(\omega_i)$ zählt die Anzahl Einsen in drei Würfen

  $Y = \sum_{i=1}^{3} 1_{\{6\}}(\omega_i)$ zählt die Anzahl Sechsen in drei Würfen

  Die Zufallsgrößen X und Y haben jeweils Zielbereich $\{0,1,2,3\}$.
- $Z = (X, Y)$ ist eine neue, $\{0,1,2,3\}^2$-wertige Zufallsgröße.

  Der Zielbereich von Z ist

  $$Z(\Omega) = \{Z(\omega) \colon \omega \in \Omega\} = \{(X(\omega), Y(\omega)) \colon \omega \in \Omega\} = \{(x,y) \in \{0,1,2,3\}^2 \colon x + y \leq 3\}.$$

  Die Verteilung P_Z von Z ist gegeben durch

  $$P_Z((k,l)) = P(\{\omega \in \Omega \colon Z(\omega) = (k,l)\}) = P(\{\omega \in \Omega \colon X(\omega) = k, Y(\omega) = l\})$$

$P_Z(k,l)$	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$P_Y(l)$
$l=0$	$(\frac{4}{6})^3$	$3\frac{1}{6}(\frac{4}{6})^2$	$3(\frac{1}{6})^2\frac{4}{6}$	$(\frac{1}{6})^3$	$(\frac{5}{6})^3$
$l=1$	$3\frac{1}{6}(\frac{4}{6})^2$	$3!(\frac{1}{6})^2\frac{4}{6}$	$3(\frac{1}{6})^3$	0	$3\frac{1}{6}(\frac{5}{6})^2$
$l=2$	$3(\frac{1}{6})^2\frac{4}{6}$	$3(\frac{1}{6})^3$	0	0	$3(\frac{1}{6})^2\frac{5}{6}$
$l=3$	$(\frac{1}{6})^3$	0	0	0	$(\frac{1}{6})^3$
$P_X(k)$	$(\frac{5}{6})^3$	$3\frac{1}{6}(\frac{5}{6})^2$	$3(\frac{1}{6})^2\frac{5}{6}$	$(\frac{1}{6})^3$	1

- Zeilensummen? Spaltensummen? Summe über alle Felder?

Definition
Seien $X_1, \dots, X_d$ Zufallsgrößen, dabei sei X_i E_i-wertig für $i = 1, \dots, d$.

- Die *gemeinsame Verteilung* der Zufallsgrößen $X_1, \dots, X_d$ ist die Verteilung der $(E_1 \times \cdots \times E_d)$-wertigen Zufallsgröße $X = (X_1, \dots, X_d)$:

  $P_{(X_1,\dots,X_d)}(x_1, \dots, x_d) := P(X_1 = x_1, \dots, X_d = x_d)$ für $x_i \in E_i$, $i \in \{1, \dots, d\}$

- Die Verteilung von X_i, $i \in \{1, \dots, d\}$, heißt *i-te Randverteilung* oder *i-te Marginalverteilung*:

$$\begin{aligned}
P_{X_i}(x) &= P(X_i = x) \\
&= P(X_1 \in E_1, \dots, X_{i-1} \in E_{i-1}, X_i = x, X_{i+1} \in E_{i+1}, \dots, X_d \in E_d) \\
&= \sum_{x_1 \in E_1} \cdots \sum_{x_{i-1} \in E_{i-1}} \sum_{x_{i+1} \in E_{i+1}} \cdots \sum_{x_d \in E_d} \\
&\qquad P(X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_i = x, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_d = x_d) \\
&= \sum_{x_1 \in E_1} \cdots \sum_{x_{i-1} \in E_{i-1}} \sum_{x_{i+1} \in E_{i+1}} \cdots \sum_{x_d \in E_d} P_X(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_d)
\end{aligned}$$

Beispiel: *zweimaliges Werfen einer fairen Münze*

- Der Spieler wirft zweimal: $\Omega^{\text{echt}} = \{K, Z\}^2$ mit Gleichverteilung

  X_1, X_2 seien das Ergebnis des ersten bzw. zweiten Wurfs

  Gemeinsame Verteilung: $P_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = 1/4$ für jede Wahl von $(x_1, x_2) \in \Omega^{\text{echt}}$

  Randverteilungen: $P_{X_1}(\{K\}) = 1/2 = P_{X_1}(\{Z\})$ und $P_{X_2}(\{K\}) = 1/2 = P_{X_2}(\{Z\})$

- Der faule Spieler wirft nur einmal: $\Omega^{\text{geschummelt}} = \{(K, K), (Z, Z)\}$ mit Gleichverteilung

  Wieder seien Y_1, Y_2 das Ergebnis des ersten bzw. zweiten Wurfs

  Randverteilungen: $P_{Y_1}(\{K\}) = 1/2 = P_{Y_1}(\{Z\})$ und $P_2(\{K\}) = 1/2 = P_{Y_2}(\{Z\})$

  Gemeinsame Verteilung: $P_{(Y_1,Y_2)}(\{(K, K)\}) = 1/2 = P_{(Y_1,Y_2)}(\{(Z, Z)\})$,
  $P_{(Y_1,Y_2)}(\{(K, Z)\}) = 0 = P_{(Y_1,Y_2)}(\{(Z, K)\})$

Bei gleichen Randverteilungen muß die gemeinsame Verteilung noch lange nicht gleich sein!

Schreibe $X = (X_1, X_2)$, $x = (x_1, x_2)$ und analog $Y = (Y_1, Y_2)$, $y = (y_1, y_2)$:

$P_X(x)$	$x_2 = K$	$x_2 = Z$	$P_{X_1}(x_1)$
$x_1 = K$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$x_1 = Z$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$P_{X_2}(x_2)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

$P_Y(y)$	$y_2 = K$	$y_2 = Z$	$P_{Y_1}(y_1)$
$y_1 = K$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$y_1 = Z$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$P_{Y_2}(y_2)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1