Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Sommersemester 2017

11. Aufgabenblatt zur Vertiefung NWI: Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabe bis: **Freitag, 7. Juli, 11 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Daniel Ollesch PF 93, Jan Marcel Fröhlich PF 180, Dorina Koch PF 124, Matthieu Geisler PF 50*, alle Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Hausaufgabe 11.I *(12 Punkte).* Sie haben ein Tutorium im 4. OG. und warten vor dem Aufzug. Wir wollen annehmen, dass die Wartezeit X *exponentialverteilt* ist mit Erwartungswert 10 Sekunden.

a) Bestimmen Sie die Varianz $\operatorname{var}(X)$ Ihrer Wartezeit.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, länger als 5 Sekunden zu warten.

c) Sie warten schon seit N Sekunden, $N > 0$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nochmal mindestens 5 Sekunden zu warten?

Hausaufgabe 11.II *(12 Punkte).* Für beliebige Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ seien die Abbildungen f_1 und f_2 definiert durch

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{3|x|}{c_1} & \text{für } x \in [-1, 0], \\ \frac{5x^2}{c_1} & \text{für } x \in [1, 5], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad f_2(x) = \begin{cases} \frac{\exp(-4x)}{c_2} & \text{falls } x \geq 0, \\ \frac{\exp(4x)}{c_2} & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

a) Berechnen Sie c_1 und c_2 derart, dass f_1 und f_2 Dichten sind.

b) Bestimmen und skizzieren Sie die zugehörigen Verteilungsfunktionen.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert einer Zufallsgröße mit Dichte f_1.

Anmerkung: Man nennt die zu f_2 gehörige Verteilung $\int_{\cdot} f_2(x)dx$ *Laplace-Verteilung* oder *Doppelexponentialverteilung* (hier zum Parameter 4).

Hausaufgabe 11.III *(12 Punkte + 3 Bonuspunkte).* Es sei X eine reellwertige Zufallsvariable mit Dichte $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen zutreffend sind oder nicht. Beweisen Sie sie, falls sie allgemeingültig sind, und widerlegen Sie sie mithilfe eines Gegenbeispiels, falls eines existiert.

a) Die Dichte f ist nach unten beschränkt.

b) Die Dichte f ist nach oben beschränkt.

c) Es kann ein $x \in [a, b]$ geben derart, dass $P(X = x) = 0$, aber $f(x) > 0$.

d) Es kann ein $x \in [a, b]$ geben derart, dass $f(x) = 0$, aber $P(X = x) > 0$.

e) Die Zufallsvariable $Y = 2X$ besitzt ebenfalls eine Dichte, und falls X integrierbar ist, so ist auch Y integrierbar.

$\star$) Falls $f(x) = 0$ für alle $x \leq 0$, dann besitzt auch die Zufallsvariable $Z = 1/X$ eine Dichte. Ist X zusätzlich integrierbar, so ist auch Z integrierbar.

Bemerkung. Mit der Bearbeitung des Aufgabenteils $\star$) können bis zu 3 Bonuspunkte zusätzlich erhalten werden.

Hausaufgabe 11.IV *(12 Punkte).* Eine faire $\{0, 1\}$-Münze werde unabhängig voneinander n-mal hintereinander geworfen und die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ geben jeweils das Ergebnis eines Wurfes an, d.h. X_i zeigt das Ergebnis des i-ten Münzwurfs an, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

a) Wie ist die Zufallsvariable $X_1 - \mathbb{E}[X_1]$ verteilt?

b) Welche Verteilung hat die Zufallsvariable $n \cdot X_1 - n\mathbb{E}[X_1]$?

c) Es sei $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$. Wie ist die Zufallsvariable $\frac{S_n - n\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{\mathrm{var}(S_n)}}$ für $n \to \infty$ verteilt?

d) Wie ist die Zufallsvariable $\frac{n \cdot X_1 - n\mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{\mathrm{var}(n \cdot X_1)}}$ für $n \to \infty$ verteilt?

Es bezeichne Y eine $\mathcal{N}_{0,1}$- normalverteilte Zufallsvariable.

e) Wie ist die Zufallsvariable $\frac{n \cdot Y - n\mathbb{E}[Y]}{\sqrt{\mathrm{var}(n \cdot Y)}}$ verteilt?