Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Sommersemester 2017

## 2. Aufgabenblatt zur Vertiefung NWI: Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabe bis: **Freitag, 5. Mai, 11 Uhr**

**Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Daniel Ollesch PF 93, Jan Marcel Fröhlich PF 180, Dorina Koch PF 124, Matthieu Geisler PF 50*, alle Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.**

**Hausaufgabe 2.I** *(12 Punkte).* Ein roter und ein grüner sechsseitiger Würfel werden gleichzeitig geworfen und die jeweiligen Augenzahlen zusammen mit der jeweiligen Würfelfarbe notiert. Beide Würfel sind fair und mit ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅ beschriftet. Die Ereignisse, die uns hier interessieren, bezeichnen wir in folgender Weise:

$A$: „Zwischen der Augenzahl des roten und der Augenzahl des grünen Würfels liegen mindestens drei Ziffern. “

$B$: „Beide Augenzahlen sind gleich.“

$C$: „Der rote Würfel zeigt eine gerade Augenzahl, der grüne eine ungerade Augenzahl.“

$D$: „Der rote Würfel zeigt eine 1.“

a) Geben Sie ein geeignetes wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell an, um die folgenden Aufgabenteile bearbeiten zu können.

b) Geben Sie die Ereignisse $A$, $B$, $C$, $D$ als Teilmengen Ihrer Ereignismenge an und bestimmen Sie deren Wahrscheinlichkeit.

c) Beschreiben Sie die folgenden Ereignisse

$$1.)\ E_1 := (A^c \backslash D)^c, \qquad 2.)\ E_2 := (A \cup D) \cap (B \cup D),$$

indem Sie

- den definierenden Ausdruck vereinfachen,
- alle Elemente angeben,
- das Ergebnis in Worten beschreiben.

**Hausaufgabe 2.II** *(12 Punkte)*. Sei $\Omega$ eine beliebige Menge und seien $A, B, C \subset \Omega$ Teilmengen. Zeigen Sie, dass gilt:

a) $(A \cup B) \cap B^c = A \backslash B$,

b) $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$.

c) $\big((A^c \cup B) \cap C\big) \cup (A \cup C^c) = \Omega$.

Geben Sie jeweils die von Ihnen genutzten Rechengeln an.

**Hausaufgabe 2.III** *(12 Punkte)*. Das Aufdecken der ersten beiden Karten aus einem gut durchmischten Kartenspiel wird modelliert durch den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, p)$, definiert durch:

$$\mathcal{Z} := \{7, 8, 9, 10\}, \quad \mathcal{B} := \{B, D, K, A\}, \quad \mathcal{F} = \{\spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit\},$$
$$\Omega := \Big\{\big((x_1, F_1), (x_2, F_2)\big) \ : \ x_i \in \mathcal{Z} \cup \mathcal{B}, \ F_i \in \mathcal{F} \ \text{ für } i \in \{1, 2\}, (x_1, F_1) \neq (x_2, F_2)\Big\}.$$

**Bezug.** Für beliebige Paare von 2-Tupeln $\big((x_1, F_1), (x_2, F_2)\big)$ aus $\Omega$ verstehe $(x_1, F_1)$ als die erste gezogene Karte. Dabei repräsentiert $x_1$ das *Bild*, d.h. entweder Bube $B$, Dame $D$, König $K$ oder Ass $A$ oder die Zahl aus $\mathcal{Z}$. Und $F_1$ wird mit der *Farbe*, d.h. Pik mit $\spadesuit$, Herz mit $\heartsuit$, Karo mit $\diamondsuit$, Kreuz mit $\clubsuit$ identifiziert. Verstehe die zweite gezogene Karte $(x_2, F_2)$ analog.

$$p : \Omega \to [0, 1], \ p(\omega) = \frac{1}{992} \text{ für alle } \omega \in \Omega,$$

und, wie üblich und deshalb hier eigentlich nicht notwendig, $P(A) := \sum_{\omega \in A} p(\omega)$ für alle $A \subset \Omega$.

**Warum** $p$? Bei einem *gut durchmischten* Kartenstapel können wir davon ausgehen, dass kein Pärchen bevorzugt wird, d.h., dass alle Pärchen (mit Berücksichtigung ihrer Reihenfolge) die gleiche Rolle spielen. Damit sollten sie auch gleichberechtigt sein in Bezug auf die Wahrscheinlichkeit, gezogen zu werden. Die überzeugende Wahl ist die Gleichverteilung auf $\Omega$.

a) Geben Sie folgende die Ereignisse $A$, $B$, $C$, $D$ als Teilmengen von $\Omega$ an:

   $A$ : „Die erste aufgedeckte Karte ist eine Dame“,

   $B$ : „Die zweite aufgedeckte Karte ist keine Dame“,

   $C$ : „Die beiden zuerst aufgedeckten Karten haben jeweils die Farbe *Herz*“,

   $D$ : „Die beiden zuerst aufgedeckten Karten sind jeweils Zahlenkarten, d.h. eine der Karten mit einer Zahl (7, 8, 9 oder 10) darauf“.

b) Verwenden Sie das Ein- und Ausschlussprinzip, um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass mindestens eines dieser Ereignisse eintritt. Bestimmen Sie zunächst alle für das Ein- und Ausschlussprinzip notwendigen Wahrscheinlichkeiten.

**Hausaufgabe 2.IV** *(12 Punkte)*. Seien $A, B \subset \Omega$ und $P$ eine Wahrscheinlichkeit von Ereignissen von $\Omega$. Es gelte $P(A) = P(B) = 2/3$. Wie groß müssen in diesem Fall die Wahrscheinlichkeiten

a) $P(A \cap B)$ b) $P(A \backslash B)$

mindestens sein? Geben Sie den minimal möglichen Wert an und rechtfertigen Sie Ihre Antwort folgendermaßen:

a) Geben Sie jeweils ein Beispiel an, das die obigen Voraussetzungen erfüllt und für das die Wahrscheinlichkeit den jeweiligen minimalen Wert annimmt,

b) Zeigen Sie, dass es kein Beispiel mit den obigen Voraussetzungen geben kann, für das ein kleinerer Wert angenommen wird.