Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Sommersemester 2017

4. Aufgabenblatt zur Vertiefung NWI: Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabe bis: **Freitag, 19. Mai, 11 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Daniel Ollesch PF 93, Jan Marcel Fröhlich PF 180, Dorina Koch PF 124, Matthieu Geisler PF 50*, alle Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Geben Sie zu allen Aufgaben, in denen nach Wahrscheinlichkeiten gefragt wird, einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, und geben Sie die Ereignisse als Teilmengen der Ereignismenge an. Klassifizieren Sie die auftretenden Abzählprobleme.

Hausaufgabe 4.I *(12 Punkte).* Ein 100-seitiger fairer Würfel mit den Zahlen $1, \dots, 100$ werde einmal geworfen. Das abzulesende *Ergebnis* nach dem Wurf ist eine Zahl, die aus mindestens zwei *Ziffern* aus $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ besteht.

a) Bestimmen Sie die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass die letzte Ziffer eine 3 ist, gegeben, dass mindestens einmal die Ziffer 3 im Ergebnis auftaucht.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die letzte Ziffer eine 9 ist, gegeben, dass die Summe der Ziffern mindestens 17 ist.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die letzte Ziffer eine 3 ist, gegeben, dass die zweitletzte Ziffer eine 7 ist.

Hausaufgabe 4.II *(12 Punkte).* Sie sind unter den 25 Studierenden, die sich für den begehrten Business-Englisch-Kurs angemeldet haben. Da es im Kurs nur 15 Plätze gibt, werden diese nach folgendem Verfahren verlost:
In eine Schachtel werden 25 Zettel gelegt, davon 15 mit einem lachenden gelben Smiley und 10 mit einem weinenden schwarzen Smiley. Jeder darf einmal blind ziehen. Diejenigen, die gelbe Smileys ziehen, sind zum Kurs zugelassen.
Nun wollten Sie ganz früh am Morgen los, um den allerersten Zettel ziehen zu können, aber, wegen Verzögerungen im öffentlichen Personennahverkehr, kommen Sie erst später als gehofft an der Universität an. Alle anderen waren bereits da und Ihnen bleibt nur der allerletzte Zettel, der - natürlich! - ein weinender Smiley ist.
Sie fragen sich daher, ob dieses Verfahren zur Verlosung fair ist.
Berechnen Sie nacheinander

a) die Wahrscheinlichkeit, dass der erste gezogene Zettel einen gelben Smiley zeigt,

b) die (bedingte) Wahrscheinlichkeit, dass der zweite gezogene Zettel einen gelben Smiley zeigt, gegeben der erste gezogene Zettel zeigt einen gelben Smiley,

c) die (totale) Wahrscheinlichkeit, dass der zweite gezogene Zettel einen gelben Smiley zeigt,

d) die (totale) Wahrscheinlichkeit, dass der k-te gezogene Zettel einen gelben Smiley zeigt.

Ist das Verfahren fair?

Hausaufgabe 4.III *(12 Punkte).* Ein Grippe-Schnelltest ist mit einer Wahrscheinlichkeit von $9/10$ positiv, falls die getestete Person an Grippe erkrankt ist, und mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/20$ positiv, wenn die Person nicht an Grippe erkrankt ist. Wir wollen annehmen, dass nur ein Anteil von $1/1000$ der Bevölkerung mit Grippe infiziert ist.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit eines positiven Testergebnisses.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine ausgewählte Person infiziert ist, gegeben, dass ihr Test positiv ist.

Hausaufgabe 4.IV *(12 Punkte).* Eine faire $\{0,1\}$-Münze und eine verbogene $\{0,1\}$-Münze werden geworfen. Die verbogene Münze zeigt mit Wahrscheinlichkeit 0,3 die 0 und mit Wahrscheinlichkeit 0,7 die 1. Es ist auf den ersten Blick zu erkennen, welche der beiden Münzen die verbogene ist. Es besteht also keine Verwechslungsgefahr. Für gegebene $f, v \in \{0,1\}$ nehmen Sie im Folgenden an, dass die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Werfen die faire Münze f und die verbogene Münze v zeigt, gegeben ist durch die folgende Tabelle:

	$v=0$	$v=1$
$f=0$	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{20}$
$f=1$	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{20}$

Berechnen Sie

a) die Wahrscheinlichkeit, dass beide Münzen eine 1 zeigen, gegeben mindestens eine zeigt eine 1,

b) die Wahrscheinlichkeit, dass die verbogene Münze eine 1 zeigt, gegeben, dass mindestens eine der beiden Münzen eine 1 zeigt,

c) die Wahrscheinlichkeit, dass die faire Münze eine 1 zeigt, gegeben, dass nicht beide Münzen die 1 zeigen.

Bemerkung / Ausblick Vorlesung 5 (Unabhängigkeit von Ereignissen). Der obige Wurf beider Münzen sei modelliert durch den Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p) und wie üblich $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$. Wir bezeichnen mit F das Ergebnis der fairen Münze und mit V das Ergebnis der verbogenen Münze. In diesem Kontext ist es sinnvoll anzunehmen, dass

$$P(F=x \mid V=y) = P(F=x) \quad \text{und} \quad P(V=x \mid F=y) = P(V=x) \quad \text{für alle } x,y \in \{0,1\}, \tag{1}$$

d.h. dass jeweils kein Ergebnis einer Münze die Wahrscheinlichkeit für irgendeines der Ergebnisse der anderen Münze (nicht einmal in geringster Art und Weise) beeinflussen kann. Aus der Voraussetzung (1) lässt sich ganz einfach folgern, dass

$$P(F=x, V=y) = P(F=x)P(V=y) \quad \text{für alle } x,y \in \{0,1\}. \tag{2}$$

Tatsächlich sind die Aussagen (1) und (2) sogar äquivalent, was sich durch Einsetzen der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit in einem Schritt zeigen lässt. Wenn die Aussage (2) gilt, nutzen wir folgende Bezeichnung:

Die Ereignisse $\{F=x\}$ und $\{V=y\}$ sind *unabhängig* unter P für alle $x,y \in \{0,1\}$.

Diese Unabhängig liegt der Tabelle in der Aufgabenstellung wie folgt zugrunde:

$$\begin{aligned}
P(F=0, V=0) &= P(F=0)P(V=0) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 3/20, \\
P(F=0, V=1) &= P(F=0)P(V=1) = 0{,}5 \cdot 0{,}7 = 7/20, \\
P(F=1, V=0) &= P(F=1)P(V=0) = \ldots
\end{aligned}$$