

5. Aufgabenblatt zur Vertiefung NWI: Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabe bis: **Freitag, 26. Mai, 11 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Daniel Ollesch PF 93, Jan Marcel Fröhlich PF 180, Dorina Koch PF 124, Matthieu Geisler PF 50*, alle Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Geben Sie zu allen Aufgaben, in denen nach Wahrscheinlichkeiten gefragt wird, einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, und geben Sie die Ereignisse als Teilmengen der Ereignismenge an. Klassifizieren Sie die auftretenden Abzählprobleme.

Hausaufgabe 5.I (12 Punkte). Sei (Ω, p) ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, C \subset \Omega$ Ereignisse über Ω .

- a) Die Ereignisse A, B, C seien unabhängig. Zeigen Sie die beiden folgenden Aussagen:
 - (i) die Ereignisse A und $B \cap C$ sind unabhängig,
 - (ii) Die Ereignisse A und $B \cup C$ sind unabhängig.
- b) Es seien $A, B \cup C$ unabhängig und es seien $A, B \cap C$ unabhängig. Folgt daraus im Allgemeinen, dass A, B, C unabhängig sind? Rechtfertigen Sie Ihre Antwort durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

Hinweis. Wir wissen aus der Vorlesung bereits: Falls E_1 und E_2 unabhängige Ereignisse sind, dann sind auch E_1 und E_2^c unabhängig.

Hausaufgabe 5.II (12 Punkte). Sei (Ω, p) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Es seien zudem $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega$ Ereignisse über Ω .

- a) Wie viele Gleichheiten müssen gezeigt werden, um zu zeigen, dass A_1, \dots, A_n unabhängig sind?
- b) Es seien A_1, \dots, A_n unabhängig. Zeigen Sie, dass die Ereignisse $A_1 \cup A_2$ und A_3, \dots, A_n unabhängig sind. Verwenden Sie in Ihrem Beweis keine Formulierungen wie „analog zu“, „genau so wie“ oder dergleichen.

Hausaufgabe 5.III (12 Punkte). Bei einem *gezinkten* sechsseitigen Würfel liegt nach dem Werfen jede Seite mit gleicher Wahrscheinlichkeit oben. Allerdings sind die Seiten anders als üblich mit III , \square , \square , \square , \square , III beschriftet, also zweimal die III und keine \square .

- Wie viel größer ist die Chance des *Rauskommens beim ersten Wurf* beim *Mensch-ärger-Dich-nicht*, d.h., die Wahrscheinlichkeit bei dreimaligem Werfen mindestens eine III zu erhalten mit dem gezinkten Würfel gegenüber einem normalen fairen Würfel?
- Wie viel größer ist die Wahrscheinlichkeit eines *Paschs* bei zweimaligem Werfen des gezinkten Würfels gegenüber dem Werfen eines normalen fairen Würfels?
Anmerkung. Einen *Pasch* zu werfen bedeutet, dass der erste und zweite Wurf die gleiche Augenzahl zeigen.
- Wie viel größer ist die Wahrscheinlichkeit bei n -maligem Werfen genau k -mal die III zu werfen, $k \in \{0, \dots, n\}$, mit dem gezinkten Würfel gegenüber dem Werfen mit einem normalen fairen Würfel?

Hausaufgabe 5.IV (12 Punkte). Eine fairer dreiseitiger Würfel (\square , \square , \square) wird dreimal geworfen und die jeweiligen Ergebnisse in der Reihenfolge des Werfens notiert. Definieren Sie folgende Ereignisse:

- A: Wurf Nummer 1 und Wurf Nummer 3 zeigen nicht die gleiche Augenzahl.
 - B: Die Summe der Augenzahlen der ersten beiden Würfe ist 4,
 - C: Wurf Nummer 2 und Nummer 3 zeigen die gleiche Augenzahl.
- Prüfen Sie für alle Paare A, B und A, C sowie B, C , ob diese unabhängig sind.
 - Sind A, B, C paarweise unabhängig?
 - Sind A, B, C unabhängig?