Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Sommersemester 2017

6. Aufgabenblatt zur Vertiefung NWI: Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabe bis: **Freitag, 2. Juni, 11 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Daniel Ollesch PF 93, Jan Marcel Fröhlich PF 180, Dorina Koch PF 124, Matthieu Geisler PF 50*, alle Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Geben Sie zu allen Aufgaben, in denen nach Wahrscheinlichkeiten gefragt wird, einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, und geben Sie die Ereignisse als Teilmengen der Ereignismenge an. Klassifizieren Sie die auftretenden Abzählprobleme.

Hausaufgabe 6.I *(12 Punkte).* Sei $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Ein fairer $2n$-seitiger Würfel, beschriftet mit den Zahlen von $1,\dots 2n$ wird so lange geworfen bis eine 1 fällt, höchstens aber $2n$-mal. Bezeichne $X^{(2n)}$ den Wurf, in dem zum ersten Mal eine 1 fällt. Falls in $2n$ Würfen keine 1 fällt, soll $X^{(2n)}$ den Wert 0 annehmen.

a) Geben Sie die Verteilung von $X^{(2n)}$ an.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\{X^{(2n)} \leq n\}$.

c) Beschreiben Sie, was mit der Wahrscheinlichkeit aus Aufgabenteil b) passiert, wenn man n sehr groß wählt.

Hausaufgabe 6.II *(12 Punkte).* Wir werfen eine faire $\{0,1\}$-Münze. Fällt eine 0, so ziehen wir eine Kugel aus einer Urne, die drei Kugeln mit den Zahlen $1,2,3$ enthält. Zeigt die geworfene Münze eine 1, so ziehen wir eine Kugel aus einer Urne, die mit sechs Kugeln befüllt ist, die mit Zahlen $1,\dots,6$ beschriftet sind. Bezeichne X das Ergebnis der Münze, Y die Zahl, die auf der anschließend gezogenen Kugel steht. Geben Sie die gemeinsame Verteilung von X und Y sowie deren Randverteilungen an.

Hausaufgabe 6.III *(12 Punkte).* Ein 6-seitiger Würfel wird so lange geworfen, bis eine 6 fällt. Es bezeichne X die Nummer des Wurfs, in dem zum ersten Mal eine 6 fällt, d.h. $X = k$, falls die 6 zum ersten Mal beim k-ten Mal werfen fällt, $k \in \mathbb{N}$.

a) Definieren Sie die Zufallsgröße X auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum und geben Sie $\{X = 3\}$ als Teilmenge der Ereignismenge an. Bestimmen Sie die Verteilung von X.

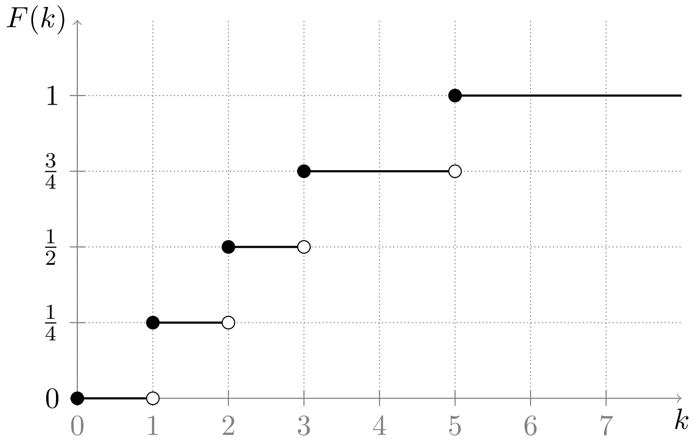
b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit mehr als k Würfe auf die erste 6 warten zu müssen, $k \in \mathbb{N}$.

c) Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass man nach dem n-ten Wurf noch mindestens k weitere Würfe warten muss, gegeben, dass in den ersten n Würfen keine 6 gefallen ist, $k, n \in \mathbb{N}$.

d) Interpretieren Sie Ihr Ergebnis aus Aufgabenteil c).

Hausaufgabe 6.IV *(12 Punkte & 4 Bonuspunkte).*

a) Sei $X : \Omega \to \mathbb{Z}$ diejenige Zufallsvariable, deren Verteilungsfunktion $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ durch den Graphen unten gegeben ist. Geben Sie $P_X(k) = P(X = k)$ für alle $k \in \{0, \dots, 7\}$ an.



b) Es bezeichne X die Anzahl von „Richtigen" beim Lotto „6 aus 49". Zudem sei Y eine binomialverteilte Zufallsgröße zur Versuchslänge $n = 49$ und Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{6}{49}$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktionen F_X und F_Y von X und Y. Zeichnen Sie außerdem die Verteilungen P_X und P_Y von X und Y über dem Definitionsbereich $\{0, \dots, 7\}$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.
(Computergestütze Lösungen sind ausdrücklich erlaubt.)

$\star$) *Bonus-Aufgabe.* Berechnen Sie zusätzlich die Verteilungsfunktion einer Poisson-verteilten zufallsgröße zum Parameter $\frac{36}{49}$ und zeichnen Sie die Verteilung über dem Definitionsbereich $\{0, \dots, 7\}$ in das Koordinatensystem von Aufgabenteil b).