Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Sommersemester 2017

7. Aufgabenblatt zur Vertiefung NWI: Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabe bis: **Freitag, 9. Juni, 11 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Daniel Ollesch PF 93, Jan Marcel Fröhlich PF 180, Dorina Koch PF 124, Matthieu Geisler PF 50*, alle Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Geben Sie zu allen Aufgaben, in denen nach Wahrscheinlichkeiten gefragt wird, einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, und geben Sie die Ereignisse als Teilmengen der Ereignismenge an. Klassifizieren Sie die auftretenden Abzählprobleme.

Hausaufgabe 7.I *(12 Punkte)*. Es sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}\backslash\{0\}$.

a) Sei $\mathbb{E}[X] < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$$

b) Sei $\mathbb{E}[X^2] < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) P\big(X \geq n\big).$$

Hinweis: Beginnen Sie mit der rechten Seite und stellen Sie $P(X \geq n)$ als Summe dar.

Hausaufgabe 7.II *(12 Punkte)*. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Modelliere (Ω, p) den n-fachen fairen Münzwurf mittels $\Omega = \{0,1\}^n$ und $p(\omega) = 2^{-n}$ für alle $\omega \in \Omega$.

a) Konstruieren Sie zwei Zufallsgrößen X und Y auf (Ω, p), deren Erwartungswarte und Varianzen existieren und für die gilt, dass $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$. Zeigen Sie die geforderten Eigenschaften und beantworten Sie folgende zwei Fragen. Begründen Sie auch dort Ihre Antwort:
   (i) Ist es in Ihrem Beispiel richtig, dass $\operatorname{var}(X + Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y)$?
   (ii) Ist es richtig, dass X und Y unabhängig sind?

b) Konstruieren Sie zwei Zufallsgrößen X und Y auf (Ω, p), deren Erwartungswarte und Varianzen existieren und für die gilt, dass $\mathbb{E}[XY] \neq \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$. Zeigen Sie die geforderten Eigenschaften und beantworten Sie folgende Fragen und begründen Sie Ihre Antwort:
   (i) Ist es in Ihrem Beispiel richtig, dass $\operatorname{var}(X + Y) = \operatorname{var}(X) + \operatorname{var}(Y)$?
   (ii) Ist es richtig, dass X und Y unabhängig sind?

Hausaufgabe 7.III *(12 Punkte)*. Ihnen wird folgendes Spiel vorgeschlagen: Es werden zwei 4-seitige Würfel geworfen. Sind die Augenzahlen gleich, so erhalten Sie das 5-fache Ihres Einsatzes. Ist die Differenz der Augenzahlen der Würfel gleich 1,2 oder 3, so verlieren Sie das entsprechende Vielfache Ihres Einsatzes. Sei der Einsatz durch $e > 0$ gegeben.

(a) Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ Ihr Gewinn (möglicherweise negativ im Falle, dass Sie verlieren). Geben Sie die Mengen $X^{-1}(k)$ für $k \in X(\Omega)$ explizit an.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X, und klären Sie die Frage, ob das Spiel vor- oder nachteilhaft ist.

Hausaufgabe 7.VI *(12 Punkte)*. Eine zerstreute Sekretärin verteilt n Briefe vollkommen zufällig auf n Umschläge, von denen jeder an eine andere Person adressiert worden ist.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle Briefe richtig einsortiert?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle Briefe falsch einsortiert?
Hinweis. Hier reicht eine Skizze der Rechnung aus.

c) Definieren Sie die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ wie folgt: Für $i \in \{1, \ldots, n\}$ nehme X_i den Wert 1 an, falls der i-te Brief richtig einsortiert wurde und 0, falls dieser falsch einsortiert wurde. Zeigen Sie, dass die Familie der X_i nicht unabhängig ist.

d) Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl korrekt einsortierter Briefe.