Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Sommersemester 2017

## 8. Aufgabenblatt zur Vertiefung NWI: Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabe bis: **Freitag, 16. Juni, 11 Uhr**

**Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Daniel Ollesch PF 93, Jan Marcel Fröhlich PF 180, Dorina Koch PF 124, Matthieu Geisler PF 50*, alle Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.**

Geben Sie zu allen Aufgaben, in denen nach Wahrscheinlichkeiten gefragt wird, einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, und geben Sie die Ereignisse als Teilmengen der Ereignismenge an. Klassifizieren Sie die auftretenden Abzählprobleme.

**Hausaufgabe 8.I** *(12 Punkte)*. Eine Urne sei mit $r$ unterscheidbaren Kugeln bestückt. Wir ziehen aus der Urne mit Zurücklegen, bis wir jede Kugel mindestens einmal gezogen haben. Es bezeichne $X$ die Anzahl der benötigten Versuche. Sei $T_i$ der Zeitpunkt, zu dem wir die $i$-te neue Kugel ziehen, mit $T_1 = 1$ und $T_r = X$.

a) Bestimmen Sie die Verteilung von $T_{i+1} - T_i$.

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert von $T_{i+1} - T_i$,

c) Zeigen Sie schließlich

$$\mathbb{E}[X] = 1 + r\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{r-1}\right).$$

**Hausaufgabe 8.II** *(12 Punkte)*. Eine Rohrleitung bestehe aus 20 Segmenten. Es wird festgestellt, dass die Ausflussmenge kleiner ist als die Zuflussmenge. Es muss also ein Leck bestehen. Wir nehmen an, dass es genau ein Leck gibt, und dass dieses mit Wahrscheinlichkeit 1/20 in einem bestimmten Segment liegt.

a) Wir fangen am Abfluss an und testen sukzessive jedes Segment auf das Leck. Bezeichne $X$ die Anzahl getesteter Segmente, die wir brauchen, bis das Leck gefunden ist. Bestimmen Sie die Verteilung von $X$, den Erwartungswert und die Standardabweichung $S(X) = \sqrt{\mathbb{V}[X]}$.

b) Wir möchten nun das defekte Segment mit möglichst wenigen Messungen ausfindig machen. Wir können dazu beliebig große Teilstücke (Anzahlen zusammenhängender Segmente) separat überprüfen. Suchen Sie nach einer günstigeren Strategie (als der in a)), und bestimmen Sie wieder die Verteilung der Anzahl an Messungen, deren Erwartungswert und Standardabweichung.

**Hausaufgabe 8.III** *(12 Punkte).* Sei $n \in \{1, 2, \ldots\}$, und die Zufallsgröße $X$ sei auf der Menge $\{-2n, -2(n-1), -2(n-2), \ldots, -4, -2, 2, 4, 6, \ldots, 2n\}$ gleichverteilt.

a) Berechnen Sie $P\{|X| \geq n\}$ exakt.

b) Verwenden Sie die Markoffsche Ungleichung für $k = 1, k = 2$ und $k = 3$, um die Wahrscheinlichkeit aus $a$) abzuschätzen.

c) Vergleichen Sie die Resultate aus a) und b) in den Fällen $n = 1, n = 3, n = 10$ und für $n \to \infty$. Sind die Abschätzungen sinnvoll?
*Hinweis.* Folgende Summenformeln dürfen Sie ohne Nachweis verwenden:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

**Hausaufgabe 8.IV** *(12 Punkte).* Eine Urne enthalte 10 weiße und 10 schwarze Kugeln. Wir ziehen 6-mal blind ohne Zurücklegen. Bestimmen Sie mit Hilfe der Tschebyscheffschen eine obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit, nur weiße Kugeln zu ziehen. Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit auch exakt.
*Anmerkung:* Der Vergleich der Ergebnisse in dieser Aufgabe zeigt, dass die Abschätzungen der Tschebyscheffschen Ungleichung weit weg liegen können von der exakten Wahrscheinlichkeit.