Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Sommersemester 2017

9. Aufgabenblatt zur Vertiefung NWI: Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabe bis: **Freitag, 23. Juni, 11 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Daniel Ollesch PF 93, Jan Marcel Fröhlich PF 180, Dorina Koch PF 124, Matthieu Geisler PF 50*, alle Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Geben Sie zu allen Aufgaben, in denen nach Wahrscheinlichkeiten gefragt wird, einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, und geben Sie die Ereignisse als Teilmengen der Ereignismenge an. Klassifizieren Sie die auftretenden Abzählprobleme.

Hausaufgabe 9.I *(12 Punkte)*. Ein fairer 6-seitiger Würfel wird 180 mal geworfen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass zwischen (einschließlich) 28 und (einschließlich) 32 mal eine 6 fällt.
(Hinweis: Sie dürfen hier auf technische Hilfe wie den Computer zurückgreifen)

b) Finden Sie eine Schätzung für die Wahrscheinlichkeit aus a) mit Hilfe ...
- ... der Tschebyscheffschen Ungleichung
- ... des lokalen zentralen Grenzwertsatzes
- ... des Satzes von *de Moivre–Laplace*

Hausaufgabe 9.II *(12 Punkte)*. Ihre Dozentin behauptet, eine Reißzwecke lande nur in etwa 30% der Fälle auf dem Rücken, d.h. mit der Nadel senkrecht nach oben. Sie möchten die 30% nun auf die Probe stellen. Sie haben deshalb Ihr Wochenende damit verbracht, 10 000 mal eine Reißzwecke auf den Boden zu werfen und zu prüfen, ob diese auf dem Rücken landet oder nicht. Sie haben insgesamt 2 823 Landungen auf dem Rücken gezählt und konnten keinerlei Verschleißerscheinungen bei der Reißzwecke feststellen, so dass wir davon ausgehen, dass 10 000 Versuche unter den gleichen Voraussetzungen durchgeführt wurden. Nehmen Sie an, die Vermutung Ihrer Dozentin sei richtig.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 823 Landungen auf dem Rücken auftreten? Geben Sie die Wahrscheinlichkeit explizit an, ohne diese auszurechnen.

b) Nutzen Sie den lokalen Grenzwertsatz, um einen Näherungswert für die Wahrscheinlichkeit aus Aufgabenteil a) zu erhalten.

c) Verwenden Sie die Tschebyscheffsche Ungleichung, um eine Idee dafür zu bekommen, wie groß die Wahrscheinlichkeit einer solchen (oder einer größeren) Abweichung der Anzahl an Landungen auf dem Rücken vom Erwartungswert ist.

d) Benutzen Sie den Satz von *de Moivre–Laplace* um eine Näherung der Wahrscheinlichkeit zu erhalten, 2 823 oder weniger Rückenlandungen zu beobachten. Halten Sie die Vermutung Ihrer Dozentin für richtig?

Hausaufgabe 9.III *(12 Punkte).* Ein Hotel hat 218 Betten. Eine Reservierung wird erfahrungsgemäß mit Wahrscheinlichkeit 1/5 annuliert wird.

a) Wie viele Reservationen darf der Manager annehmen, wenn Überbuchungen mit Wahrscheinlichkeit 1/5 auftreten dürfen? Geben Sie ein Verfahren zur Bestimmung der genauen Lösung an. Nutzen Sie dann die Normalapproximation.

b) Warum ist der folgende Lösungsansatz des Aufgabenteils a) falsch?
(Derartige „Lösungen" traten gelegentlich in der Klausur auf, bitte sehen Sie sich diese Aufgabe gründlich an.)

$$1 - \Phi\left(\frac{N - 218 \cdot 0{,}8}{\sqrt{218 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) \approx 0{,}025$$

Hausaufgabe 9.IV *(12 Punkte).* Wir sind gegenüber den Angaben eines Obstkonservenherstellers skeptisch. Dieser behauptet, dass im Mittel nur in einer von 20 Kirschen noch der Kern enthalten ist. In der Absicht, diese Behauptung auf die Probe zu stellen, notieren wir beim Verzehr von 30 400 Kirschen des betreffenden Herstellers, ob jeweils ein Kern darin war oder nicht. Wir nehmen an, dass die Angabe des Herstellers richtig ist, d.h., dass jede Kirsche unabhängig von allen anderen Kirschen mit Wahrscheinlichkeit 1/20 noch den Kern enthält.

a) Berechnen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, genau k Kerne in den Kirschen zu finden, für alle $k \in \{1519, 1520, 1521\}$.

b) Bestimmen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, mindestens 1482 und höchstens 1558 Kerne zu finden.

c) Wir nehmen uns Zeit, unbegrenzt viele Kirschen zu testen, haben aber keine Angabe über die Wahrscheinlichkeit p eines Kerns in einer Kirsche. Nach wie vor nehmen wir an, dass jede Kirsche unabhängig von allen anderen Kirschen mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ einen Kern enthält. Es bezeichne X_n die Anzahl gefundener Kirschen bis zur n-ten getesteten Kirsche. Zeigen Sie, dass wir die unbekannte Wahrscheinlichkeit dank unseres eifrigen Kirschverzehrs, vermöge $\bar{p} = \frac{X_n}{n}$ mit Wahrscheinlichkeit beliebig nah an Eins, beliebig genau bestimmen können.