

Das wahrscheinlichkeitstheoretische Modell – *Spotlight* –

Daniel Altemeier

1.) **Definition** des Ereignisraums, z.B. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2.) **Bezug** des Ereignisraums zur Anschauungswelt, z.B.

Was bedeutet die 4 für die Anschauungswelt?

3.) **Definition** einer Wahrscheinlichkeit p auf dem Ereignisraum Ω , d.h. Definition von $p(\omega)$ für jedes Elementarereignis $\omega \in \Omega$, z.B.

$$p(1) := \frac{1}{10}, p(2) := \frac{2}{10}, \dots, p(6) := \frac{1}{3}.$$

4.) **Begründung der Wahl.** Es ist erwähnenswert, dass die Gleichverteilung die einzige Verteilung ist, die wir bisher mit einer gewissen Fundiertheit begründen können.

Inhaltsverzeichnis

1	Was ist ein sinnvolles Modell?	2
2	Überzeugende Übersetzung	3
3	Die Angabe eines wahrscheinlichkeitstheoretischen Modells	6

1 Was ist ein sinnvolles Modell?

Ein Modell ist eine formale Darstellung einer idealisierten (möglicherweise extrem vereinfachten) Anschauungswelt. Ein solches Modell dient als Brücke zwischen der *Anschauungswelt* und der *Welt der Mathematik*. *Sinnvoll* oder *geeignet* kann es nur in Bezug auf eine Frage- oder Aufgabenstellung sein.

- *Beispiel: Einfacher Würfelwurf*. Es ist naheliegend - oder wir sind einfach bereits ausreichend darauf trainiert - einen einfachen Würfelwurf mit dem Ereignisraum $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$ zu identifizieren. Hier wird anhand einiger Beispiele verdeutlicht, was dabei alles unberücksichtigt bleibt:
 - Größe, Gewicht und Oberflächenbeschaffenheit des Würfels sowie Größe und Oberflächenbeschaffenheit des Tisches,
 - Wird ein Würfelbecher benutzt oder wird der Würfel aus der Hand geworfen?
 - Die Uhrzeit und das Datum des Würfelvorgangs, die involvierten Personen und die aktuelle Wetterlage,
 - Ein Würfel könnte auch auf einer Kante liegen bleiben,
 - ...

Vollkommen zurecht wird der Leser diese Punkte als *unsinnig*, *unerheblich* oder gar etwas offensiver formuliert als *Schwachsinn* abtun. Sie würden unser Modell unnötig groß und damit möglicherweise unhandlich machen. Es bleibt aber die Frage, welche Informationen wir in unser Modell aufnehmen und warum wir andere Informationen nicht aufnehmen.

“Essentially, all models are wrong, but some are useful”
(George Edward Pelham Box)

Ob ein Modell geeignet ist, hängt von der zugrunde liegenden Fragestellung ab. Diese könnte zum Beispiel sein:

- *Frage 1*. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 6 fällt?
- *Frage 2*. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt der Würfel beim Werfen vom Tisch?
- *Frage 3*. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stößt der Werfende in seiner Freude über eine ☹ sein Glas vom Tisch?

Im Umkehrschluss. Wenn es nützt, die zugrunde liegende Fragestellung zu beantworten, dann erweist sich das Modell als *sinnvoll*.

Die Problematik beim Übergang zwischen realer Welt und Mathematik. In einer formal definierten Umwelt ist es möglich Aussagen oder Ergebnisse mittels mathematischer Schlussfolgerung zu erhalten. Solche Aussagen oder Ergebnisse sind über jeden Zweifel erhaben. Dazu zwei Probleme:

- Die Anschauungswelt, z.B. Kugelziehen aus einer Urne, Elfmeterschießen oder das Klicken eines Geiger-Zählers, ist keine formal definierte Umwelt. Wir müssen sie also zuerst *übersetzen*.
- Die Mathematik besitzt keinen Selbstschutzmechanismus, d.h. sie ist nicht hilfreich bei der Frage, ob irgendeine solche *Übersetzung* sinnvoll ist.

2 Überzeugende Übersetzung

1.) Damit eine Übersetzung überzeugend ist, brauchen wir eine Beschreibung des Experiments in der Anschauungswelt anhand unterscheidbarer Zustände, die sich gegenseitig ausschließen, z.B.

- Einfacher Würfelwurf
 - Nach dem Werfen bleibt der Würfel auf der Zahl \square liegen,
 - Nach dem Werfen bleibt der Würfel auf der Zahl \square liegen,
 - Nach dem Werfen bleibt der Würfel auf der Zahl \square liegen,
 - Nach dem Werfen bleibt der Würfel auf der Zahl \square liegen,
 - Nach dem Werfen bleibt der Würfel auf der Zahl \square liegen,
 - Nach dem Werfen bleibt der Würfel auf der Zahl \square liegen.
- Ziehen zweier Kugeln *mit einem Griff* aus einer Urne mit 3 roten und 4 blauen Kugeln.
 - Es wird keine rote Kugel gezogen,
 - es wird eine rote Kugel gezogen,
 - es werden zwei rote Kugeln gezogen.
- Vielfacher Münzwurf.
 - Die erste geworfene Münze zeigt *Zahl*, die zweite *Wappen*, die dritte *Wappen*,...
 - Die erste geworfene Münze zeigt *Zahl*, die zweite *Wappen*, die dritte *Zahl*,...
 - Die erste geworfene Münze zeigt *Wappen*, die zweite *Zahl*, die dritte *Zahl*,...
 - ...

Jeden dieser Zustände identifizieren wir dann mit einem Symbol.

- *Beispiel: Einmaliger Würfelwurf.*

„Nach dem Werfen liegt \square oben“	entspricht/wird identifiziert mit	1,
„Nach dem Werfen liegt \square oben“	entspricht/wird identifiziert mit	2,
„Nach dem Werfen liegt \square oben“	entspricht/wird identifiziert mit	3,
„Nach dem Werfen liegt \square oben“	entspricht/wird identifiziert mit	4,
„Nach dem Werfen liegt \square oben“	entspricht/wird identifiziert mit	5,
„Nach dem Werfen liegt \square oben“	entspricht/wird identifiziert mit	6.

Und wir setzen entsprechend $\Omega := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- *Beispiel: Ziehen zweier Kugeln mit einem Griff aus einer Urne mit 3 roten und 4 blauen Kugeln.*

Variante 1.

„Es wird keine rote Kugel gezogen“	wird identifiziert mit	0,
„Es wird eine rote Kugel gezogen“	wird identifiziert mit	1,
„Es werden zwei rote Kugeln gezogen“	wird identifiziert mit	2.

Demnach $\Omega_1 := \{0, 1, 2\}$. Diese Ereignismenge ist wunderbar einfach, aber wir werden gleich sehen, dass es trotzdem eine schlechte Wahl ist, weil die Bestimmung einer überzeugenden Wahrscheinlichkeit auf diesen Elementarereignissen im Wesentlichen ein weiteres Modell notwendig macht.

Für eine zweite Variante nummerieren wir die roten Kugeln mit den Zahlen 1, 2, 3 und die blauen Kugeln mit den Zahlen 1, 2, 3, 4 und benutzen die Symbole $r_1, r_2, r_3, b_1, b_2, b_3, b_4$:

Variante 2.

„Ziehen die rote Kugel Nr.1 und die blaue Kugel Nr.3“	wird ident. mit $\{r_1, b_3\}$,
„Ziehen die blaue Kugel Nr.1 und die blaue Kugel Nr.2“	wird ident. mit $\{b_1, b_2\}$,
...	

Und die Sammlung all dieser zwei-elementigen Mengen können wir schreiben als

$$\Omega_2 := \left\{ \{x, y\} : x, y \in \{r_1, r_2, r_3, b_1, b_2, b_3, b_4\}, x \neq y \right\}.$$

Die zweite Variante ist etwas aufwändiger, wir werden aber bei der Wahl der Wahrscheinlichkeit sehen, dass sich der Aufwand lohnt.

Entsprechend der Vorlesung verwenden wir folgende Bezeichnungen:

- Die Sammlung dieser Symbole nennen wir den *Ereignisraum* Ω ,
- Die Elemente von Ω bezeichnen wir als *Elementarereignisse*,
- Teilmengen von Ω bezeichnen wir als *Ereignisse*.

2.) Außerdem brauchen wir eine vernunftbasierte Wahl einer Wahrscheinlichkeit $p : \Omega \rightarrow [0, 1]$ aller möglichen Ergebnisse (Elementarereignisse) eines Experiments. Hierzu müssen wir jedem der im ersten Schritt ausgemachten und mit einem formalen Symbol identifizierten Zustände eine Wahrscheinlichkeit zuordnen.

- *Beispiel: Einfacher Würfelwurf*, z.B.

$$p(1) := p(2) := \dots := p(6) := \frac{1}{6},$$

oder komprimiert:

$$p(\omega) := \frac{1}{|\Omega|} \text{ für alle } \omega \in \Omega.$$

Die Wahl der Wahrscheinlichkeit legt fest, welche Ergebnisse uns die Mathematik am Ende liefert - sie muss unbedingt begründet werden, zum Beispiel so:

Es ist sinnvoll anzunehmen, dass alle Augenzahlen gleichberechtigt sind, weil alle Flächen des Würfels die gleiche Rolle spielen - man könnte die Beschriftungen der Flächen austauschen, ohne dass das Experiment dadurch tatsächlich geändert wird.

- *Beispiel: Ziehen zweier Kugeln mit einem Griff aus einer Urne mit 3 roten und 4 blauen Kugeln - Variante 1.*

$$p(0), p(1), p(2) \quad ???$$

Um die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse 0, 1, 2 zu bestimmen, müssten wir eigentlich ein ganz neues Modell anlegen, das es erlaubt, diese zu berechnen. Deshalb ist diese Art der Modellierung eine schlechte Wahl.

- *Beispiel: Ziehen zweier Kugeln mit einem Griff aus einer Urne mit 3 roten und 4 blauen Kugeln - Variante 2.*

$$p(\omega) := \frac{1}{21} \text{ für alle } \omega \in \Omega_2,$$

weil es genau 21 zwei-elementige Teilmengen der Menge $\{r_1, r_2, r_3, b_1, b_2, b_3, b_4\}$ gibt, und jedes solche Pärchen die gleiche Rolle spielt. Mit anderen Worten, keines der Pärchen wird bevorzugt behandelt, also ist es überzeugend die Gleichverteilung anzunehmen.

3 Die Angabe eines wahrscheinlichkeitstheoretischen Modells

Immer wenn ein wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell angegeben werden soll, müssen daher die vier folgenden Punkte berücksichtigt werden:

- 1.) **Definition** des Ereignisraums, z.B. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
- 2.) **Bezug** des Ereignisraums zur Anschauungswelt, z.B.

Was bedeutet die 4 für die Anschauungswelt?

- 3.) **Definition** einer Wahrscheinlichkeit p auf dem Ereignisraum Ω , d.h. Definition von $p(\omega)$ für jedes Elementarereignis $\omega \in \Omega$, z.B.

$$p(1) := \frac{1}{10}, p(2) := \frac{2}{10}, \dots, p(6) := \frac{1}{3}.$$

- 4.) **Begründung der Wahl.** Es ist erwähnenswert, dass die Gleichverteilung die einzige Verteilung ist, die wir bisher mit einer gewissen Fundiertheit begründen können.