

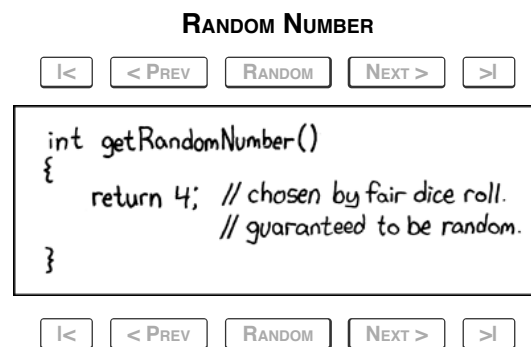
Vertiefung NWI: 1. Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Mittwoch, 19.04.2017

1. Modellieren zufälliger Ereignisse

Zufallszahlen

- Was ist eine Zufallszahl?
- Experiment vs. Pseudozufallszahl



PERMANENT LINK TO THIS COMIC: [HTTP://XKCD.COM/221/](http://xkcd.com/221/)

IMAGE URL (FOR HOTLINKING/EMBEDDING): [HTTP://IMGS.XKCD.COM/COMICS/RANDOM_NUMBER.PNG](http://imgs.xkcd.com/comics/random_number.png)

Motivation: k -maliges Werfen einer fairen Münze

- Für $k = 15$: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit ($Ws.$), mindestens $(k - 1)$ -mal das gleiche Ergebnis (d.h. $(k - 1)$ -mal Kopf oder $(k - 1)$ -mal Zahl) zu erzielen?
- Für die fleißigen Münzwerfer: Wie groß ist die $Ws.$, in $n = 1000$ Versuchen, bei denen die Münze je 15-mal geworfen wird, mindestens einmal das Ereignis aus (a) zu beobachten?

Begriffe (Bsp.: 1x Würfeln)

- *Elementarereignis* ω : ein möglicher Ausgang eines Zufallsexperiments
- *Ereignisraum* $\Omega \neq \emptyset$: Menge aller Elementarereignisse ω
Vorläufige Annahme: Ω sei eine endliche Menge
- *Ereignis* A : eine beliebige Teilmenge A von Ω , d.h. $A \subset \Omega$
Bemerkung: $A = \emptyset$ und $A = \Omega$ sind zulässig
Sprechweise: "A tritt ein" $\Leftrightarrow \omega \in A$
- *Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses* $\omega \in \Omega$: $p(\omega) \in [0, 1]$
Forderung: $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$ (Normierung)
(Bsp.: nichtfaire Münze, nichtfairer Würfel)
- *Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses* $A \subset \Omega$: $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) \in [0, 1]$
Konvention: Im Fall $A = \emptyset$ setzen wir $P(\emptyset) = 0$
- *Wahrscheinlichkeitsraum* (Ω, p)

Beobachtung

p ist eine Abbildung und ordnet jedem Elementarereignis eine Zahl zwischen 0 und 1 zu: $p : \Omega \rightarrow [0, 1]$
mit $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$

Wichtig: $P(\emptyset) = 0$ und $P(\Omega) = 1$

Beispiel: 1x Würfeln

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega \text{ (Werfen einer geraden Augenzahl)}$$

$$p(\omega) = 1/6 \text{ für alle } \omega \in \Omega$$

$$P(A) = p(2) + p(4) + p(6) = 1/2$$

Fragen: Im allgemeinen, wie wählen wir Ω ? Wie wählen wir p ?

Beispiele

- 1x Würfeln, ungeschicktes Modellieren:
 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ und $p(\omega) = 1/6$ für alle $\omega \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sowie $p(7) = 0$
- 1x Würfeln, nicht fairer Würfel:
 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $p(k) = p_k$ für alle $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit beliebiger Wahl von p_1, \dots, p_6 , sofern $p_k \geq 0$ für alle k und $p_1 + \dots + p_6 = 1$
- 2x Würfeln, gerade Augensumme gewürfelt: Verschiedene Wahlen von Ω
 - $\Omega_1 = \{1, \dots, 6\}^2$
 $\omega = (i, j) \in \Omega_1$ bedeute, daß wir im ersten Wurf i und im zweiten Wurf j geworfen haben
 $p_1((i, j)) = 1/36$ für alle $(i, j) \in \Omega_1$
 $A_1 = \{(i, j) \in \Omega_1 : i + j \text{ gerade}\}$ (wichtig: $A_1 \subset \Omega_1$!)
 $P_1(A_1) = 1/2$

- $\Omega_2 = \{\{1, 1\}, \{1, 2\}, \dots, \{1, 6\}, \{2, 2\}, \{2, 3\}, \dots, \{2, 6\}, \dots, \{3, 3\}, \dots, \{3, 6\}, \dots, \{6, 6\}\}$
 $\omega = \{i, j\} \in \Omega_2$ bedeute, daß wir in den beiden Würfeln zusammen i und j geworfen haben
 $p_2(\{i, j\}) = 1/36$ für $i = j$, aber $p_2(\{i, j\}) = 2/36$ für $i \neq j$
 $A_2 = \{\{i, j\} \in \Omega_2 : i + j \text{ gerade}\} \subset \Omega_2$
 $P_2(A_2) = ?$ (muß wieder $1/2$ sein)

- $\Omega_3 = \{2, \dots, 12\}$
 $\omega = k \in \Omega_3$ bedeute, daß die Augensumme gleich k ist
Tabelle für die Werte $p_3(k)$, $k = 2, \dots, 12$, aufstellen
 $A_3 = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \subset \Omega_3$
 $P_3(A_3) = p_3(2) + p_3(4) + p_3(6) + p_3(8) + p_3(10) + p_3(12)$ (muß wieder $1/2$ sein)

- Wie groß ist die Ws., daß eine Familie mit zwei Kindern mindestens einen Sohn hat?
Verschiedene Wahlen von Ω , Bestimmen der $p(\omega)$:

- $\Omega_1 = \{(M, M), (M, J), (J, M), (J, J)\}$
 $\omega = (x, y) \in \Omega_1$ bedeute, daß das 1. Kind das Geschlecht x hat und das 2. Kind das Geschlecht y
 $p_1(\omega) = 1/4$ für alle $\omega \in \Omega$ (idealisierend)
 $A_1 = \{(M, J), (J, M), (J, J)\}$
 $P(A_1) = 3/4$
- Nicht idealisierend: Erhebe statistische Daten für p_1
- $\Omega_2 = \{\{M, M\}, \{M, J\}, \{J, J\}\}$; beachte $\{M, J\} = \{J, M\}$ als zweielementige Mengen
Weiterhin idealisierend: $p_2(\omega) = 1/3$??? Korrekte Werte mittels Ω_1 und p_1 bestimmen

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Reißzwecke "auf dem Rücken" landet? Heuristisch bestimmen. Warum funktioniert das?

Definition: Gleichverteilung

Wir sprechen von Gleichverteilung, wenn alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind, d.h., wenn eine Konstante $p_0 \in [0, 1]$ existiert mit $p(\omega) = p_0 \quad \forall \omega \in \Omega$

Beachte: Nur für endliche Ω möglich! Berechne p_0 : $1 = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = |\Omega| p_0$, also $p_0 = 1/|\Omega|$

Bemerkung: Sinnvoll, falls Symmetrien vorhanden sind.

Folgerungen: Bei Gleichverteilung gelten

$$(a) \quad p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$(b) \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad \forall A \subset \Omega$$

Beweis

(a) Folgt direkt aus der Berechnung von p_0 .

$$(b) \quad \text{Aus (a) folgt sofort} \quad P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{|\Omega|} = \frac{|A|}{|\Omega|} .$$