Universität Bielefeld

Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz SS 2017

Vertiefung NWI: 11. Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Mittwoch, 28.6.2017

11. Zufallsgrößen mit Dichten

Erinnerung
Der Satz von de Moivre-Laplace zeigt für eine mit Parametern n und p binomialverteilte Zufallsgröße S_n, daß

$$\mathbb{P}\Big\{a < \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\Big\} \to \int_a^b \varphi(x) \,\mathrm{d}x \quad \text{für } n \to \infty$$

mit $\varphi \geq 0$ und $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \,\mathrm{d}x = 1$.

Motivation
Für große n können wir also die Wahrscheinlichkeit, daß die ZV $(S_n - np)/\sqrt{np(1-p)}$ in einem Intervall $(a, b]$ liegt, durch ein Integral approximieren. Wir möchten nun allgemeiner Zufallsgrößen mit Werten im Kontinuum (z.B. $(-\infty, \infty)$, $[a, \infty)$, (a, ∞), $[a, b]$, $[a, b)$, usw.) mit Hilfe solcher Integrale einführen.

Definition: *Dichte*
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, die stückweise stetig ist, heißt *Dichte*, sofern

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \,\mathrm{d}x = 1$$

gilt.

Erläuterung
Für eine Funktion $g \geq 0$, die auf jedem kompakten Intervall $[-N, +N]$ Riemann-integrierbar ist, ist die Folge $\{\int_{-N}^{+N} g(x) \,\mathrm{d}x\}_{N \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend in N. Ist die Folge unbeschränkt, so setzen wir $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \,\mathrm{d}x = \infty$, andernfalls

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{+N} g(x) \,\mathrm{d}x \,.$$

Beispiele von Dichten *(vgl. Bilder im Anhang)*

1. Dichte der Standardnormalverteilung, vgl. Satz von de Moivre-Laplace,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2} \quad .$$

2. Dichte der Normalverteilung mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$
(Wir werden später sehen, daß $\mu \in \mathbb{R}$ die Rolle des Erwartungswerts und $\sigma^2 > 0$ jene der Varianz spielen.)

$$\varphi(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \quad .$$

Es gilt $\varphi(x;\mu,\sigma^2) \geq 0$ für alle x. Somit zeigt die Substitution $y = (x-\mu)/\sigma$, daß $x \mapsto \varphi(x;\mu,\sigma^2)$ eine Dichte ist: Für $N \to \infty$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-N}^{N} \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{(-N-\mu)/\sigma}^{(N-\mu)/\sigma} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\sigma\,dy \to \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(y)\,dy = 1$$

3. Dichte der uniformen Verteilung auf $[a,b]$ für $-\infty < a < b < \infty$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

f ist Dichte, weil $f \geq 0$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx = 1$$

Beachte: f ist das Analogon zur Gleichverteilung im Fall diskreter Zufallsgrößen. Wie die Gleichverteilung kann auch die uniforme Verteilung nur auf beschränkten Mengen definiert werden.

4. Dichte der Exponentialverteilung zum Parameter $\alpha > 0$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

f ist Dichte, weil $f \geq 0$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\int_0^N \alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha x}\,dx = -\lim_{N\to\infty}\int_0^N \frac{d}{dx}(\mathrm{e}^{-\alpha x})\,dx = -\lim_{N\to\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x}\Big|_{x=0}^{N} = 1$$

Definition: *Dichte und Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeiten*
f sei eine Dichte. Dann heißt eine Zufallsgröße X *absolutstetig mit Dichte f*, falls die Wahrscheinlichkeit, daß $X \leq x$ gegeben ist durch

$$F_X(x) := \mathbb{P}\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f(y)\;\mathrm{d}y \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Die Funktion F_X heißt *Verteilungsfunktion* von X.

Warnung
Angenommen, wir haben eine ZV X derart, daß

$$(*) \qquad \mathbb{P}\{a < X \le b\} = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

für alle a, b mit $a < b$ (mit einer über ganz $\mathbb{R}$ integrierbaren Funktion f). Dann gilt für jedes n

$$0 \le \mathbb{P}\{X = a\} \le \mathbb{P}\{a - 1/n < X \le a\} = \int_{a-1/n}^a f(x)\ \mathrm{d}x \to 0 \quad \text{für } n \to \infty$$

Das heißt, für jedes a gilt

$$\mathbb{P}\{X = a\} = 0\,.$$

Für diskrete Zufallsgröße kann somit keine Dichte f existieren, weil $(*)$ nicht für alle $a < b$ gelten kann!

Bemerkungen

- Im Rahmen dieser Vorlesung nehmen wir einige Einschränkungen in Kauf: Wir zeigen z.B. nicht, unter welchen Voraussetzungen eine Dichte existiert. Auch spezifizieren wir den Wahrscheinlichkeitsraum nicht. Hier gilt es zu beachten, daß $\mathbb{P}\{X \in A\}$ in der Regel nicht für *alle* Teilmengen von $\mathbb{R}$ definiert werden kann. Uns soll genügen, daß alles gutgeht, wenn wir uns auf Mengen A beschränken, die durch höchstens abzählbare Vereinigungen und Schnitte von Intervallen dargestellt werden können.

- Vergleichen Sie die bekannten Eigenschaften der Verteilungsfunktion für diskrete Zufallsgrößen mit jenen der Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße mit Dichte:

  - Verteilungsfunktionen sind monoton wachsend.
  - $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$
  - Falls die Zufallsgröße X eine Dichte hat, so ist die Verteilungsfunktion F_X stetig. Für diskrete Zufallsgrößen dagegen ist die Verteilungsfunktion stückweise konstant.

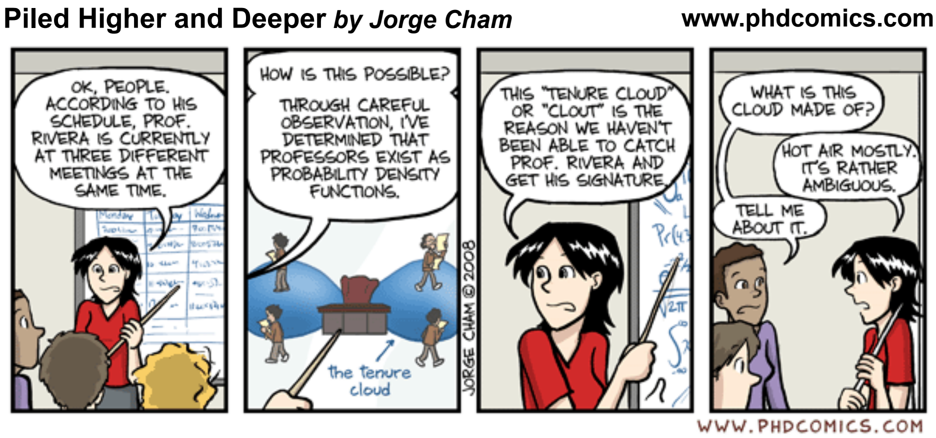
  (Machen Sie zwei Skizzen!)

- Dichten sind nicht eindeutig bestimmt.
  (Verschiedene Dichten ergeben sich, wenn wir ein Dichte in einzelnen Punkten ändern.)

- Ist die Dichte f stetig in einem Punkt a, so gilt

  $$f(a) = \left.\frac{\mathrm{d}F_X(y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=a}$$

  Dies erlaubt, aus der Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße eine Dichte zu bestimmen.



title: "The Tenure Cloud/t" - originally published 7/14/2008

Beispiele *(vgl. Bilder im Anhang)*

3. Verteilungsfunktion der uniformen Verteilung

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \displaystyle\int_a^x \frac{1}{b-a}\,dy = \frac{x-a}{b-a} & \text{für } x \in [a,b] \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy = 1 & \text{für } x > b \end{cases}$$

4. Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ \displaystyle\int_0^x \alpha\,\mathrm{e}^{-\alpha y}\,dy = -\,\mathrm{e}^{-\alpha y}\Big|_{y=0}^{x} = 1 - \mathrm{e}^{-\alpha x} & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

1. Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung *(siehe Tabelle)*

2. Verteilungsfunktion Φ_{μ,σ^2} der Normalverteilung

$$\Phi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-(z-\mu)^2/2}\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{(x-\mu)/\sigma} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,dy = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

(mit der gleichen Substitution wie oben)

Sprechweise
Eine ZG heißt normalverteilt, uniform verteilt, exponentialverteilt, etc, falls sie eine entsprechende Dichte hat.

Rechenregeln
Hat X eine Dichte f, so gelten für alle $-\infty \leq a < b \leq \infty$

- $\mathbb{P}\{a < X < b\} = \mathbb{P}\{a \leq X \leq b\} = \mathbb{P}\{a \leq X < b\} = \mathbb{P}\{a < X \leq b\}$
- $\mathbb{P}\{a < X \leq b\} = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \mathbb{P}\{X \leq b\} - \mathbb{P}\{X \leq a\} = F_X(b) - F_X(a)$
- $\mathbb{P}\{X \leq b\} = F_X(b) = \int_{-\infty}^b f(x)\ \mathrm{d}x$
- $\mathbb{P}\{a < X\} = \int_a^\infty f(x)\ \mathrm{d}x = 1 - \int_{-\infty}^a f(x)\ \mathrm{d}x = 1 - \mathbb{P}\{X \leq a\} = 1 - F_X(a)$

Beispiel
Berechnen der Wahrscheinlichkeit, daß eine exponentialverteilte Zufallsgröße mit Parameter α einen Wert größer als a annimmt bzw. einen Wert zwischen a und b.

- Direktes Ausrechnen des entsprechenden Integrals
- Erst Berechnen der Verteilungsfunktion, dann der Wahrscheinlichkeit

Definition: *Erwartungswert und Varianz*
Sei X eine Zufallsgröße mit einer Dichte f.

- Falls $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)\ \mathrm{d}x < \infty$, so sagen wir, daß *der Erwartungswert von X existiert*. Er ist in diesem Fall gegeben durch

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\ \mathrm{d}x = \lim_{N \to \infty} \int_{-N}^{N} x f(x)\ \mathrm{d}x\ .$$

  (*Warnung:* So dürfen wir nur rechnen, wenn wir bereits gezeigt haben, daß der Erwartungswert existiert, denn für Dichten f, die gerade Funktionen sind, gilt $\int_{-N}^{N} x f(x)\, dx = 0$ für alle N, auch wenn der Erwartungswert ggf. gar nicht existiert.)

- Falls der Erwartungswert von X existiert, definieren wir die *Varianz von X* als

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 f(x)\ \mathrm{d}x\ .$$

  Ist $\mathrm{Var}(X) < \infty$, so sagen wir, daß die Varianz existiert.

Bemerkung
Vergleichen Sie mit dem Fall diskreter Zufallsgrößen.

Beispiele

3. Uniforme Verteilung (direktes Ausrechnen – warum ist der Erwartungswert $(a+b)/2$?)
   Der Erwartungswert existiert, weil $f = 0$ außerhalb des kompakten Intervalls $[a, b]$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_a^b x \, \frac{1}{b-a} \, dx = \frac{1}{2(b-a)} \, x^2 \Big|_{x=a}^{b} = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} \\
\mathbb{E}[X^2] &= \int_a^b x^2 \, \frac{1}{b-a} \, dx = \frac{1}{3(b-a)} \, x^3 \Big|_{x=a}^{b} = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{1}{3}(b^2 + ab + a^2) \\
\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} = \frac{(a-b)^2}{12}
\end{aligned}
$$

4. Exponentialverteilung (verwende partielle Integration)
   Der Erwartungswert existiert genau dann, wenn die erste Zeile der folgenden Rechnung einen endlichen Wert ergibt (was der Fall ist):

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_0^\infty \underbrace{x}_{\downarrow} \, \underbrace{\alpha \, \mathrm{e}^{-\alpha x}}_{\uparrow} \, dx = - \lim_{N \to \infty} x \, \mathrm{e}^{-\alpha x} \Big|_{x=0}^{N} + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha x} \, dx = 0 + \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = \frac{1}{\alpha} \\
\mathbb{E}[X^2] &= \int_0^\infty \underbrace{x^2}_{\downarrow} \, \underbrace{\alpha \, \mathrm{e}^{-\alpha x}}_{\uparrow} \, dx = - \lim_{N \to \infty} x^2 \, \mathrm{e}^{-\alpha x} \Big|_{x=0}^{N} + 2 \int_0^\infty x \, \mathrm{e}^{-\alpha x} \, dx = 0 + \frac{2}{\alpha} \mathbb{E}[X] = \frac{2}{\alpha^2} \\
\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{2}{\alpha^2} - \left(\frac{1}{\alpha} \right)^2 = \frac{1}{\alpha^2}
\end{aligned}
$$

1. Standardnormalverteilung
   Die Existenz der Erwartungswerts folgt aus der folgenden Überlegung: Es existiert ein $x_0 > 0$ mit $x \, \mathrm{e}^{-x^2/2} \leq e^{-x^2/4}$ für alle $x \geq x_0$. Daher gilt für alle $N \geq x_0$:

$$
\int_{-N}^{N} |x| \, \varphi(x) \, dx \leq 2 \int_0^{x_0} x_0 \varphi(x) \, dx + 2 \int_{x_0}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/4} \, dx \leq 2x_0^2 + 2 \int_0^\infty e^{-x^2/4} \, dx < \infty
$$

   Wir berechnen nun Erwartungswert und Varianz:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) \, dx \\
&= \lim_{N \to \infty} \left[\int_{-N}^{0} x \varphi(x) \, dx + \int_0^N x \varphi(x) \, dx \right] = \lim_{N \to \infty} \left[- \int_0^N y \varphi(y) \, dy + \int_0^N x \varphi(x) \, dx \right] = 0 \\
\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x}_{\downarrow} \, \underbrace{x \varphi(x)}_{\uparrow} \, dx = \lim_{N \to \infty} \left[x(-\varphi(x)) \Big|_{x=-N}^{N} - \int_{-N}^{N} (-\varphi(x)) \, dx \right] = 0 + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \, dx = 1
\end{aligned}
$$

2. Normalverteilung (verwende Substitution und Wissen über Dichte, Erwartungswert und Varianz der Standardnormalverteilung)
   Existenz des Erwartungswerts: Analog zur obigen Rechnung für die Standardnormalverteilung

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-y^2/2}\ dy \\
&= \sigma \int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(y)\, dy + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\, dy = \sigma \cdot 0 + \mu \cdot 1 = \mu \\
\mathbb{E}[X^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma y + \mu)^2 \varphi(y)\, dy \\
&= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} y^2\varphi(y)\, dy + 2\mu\sigma \int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(y)\, dy + \mu^2 \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\, dy \\
&= \sigma^2 \cdot 1 + 2\mu\sigma \cdot 0 + \mu^2 \cdot 1 = \sigma^2 + \mu^2 \\
\operatorname{Var}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \sigma^2
\end{aligned}$$

Bemerkung
Die bekannten Rechenregeln gelten weiter:

- Linearität des Erwartungswerts
- $\operatorname{Var}(aX + b) = a^2 \operatorname{Var}(X)$ für $a, b \in \mathbb{R}$
- $\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$
- Tschebyscheffsche Ungleichung
- Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit

Nachtrag zur 11. Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Satz
Sei f_X eine Dichte der Zufallsgröße X. Dann gelten:

(a) Die Zufallsgröße X^2 hat die Dichte $f_{X^2}(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})] & \text{für } y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

(b) $\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx$

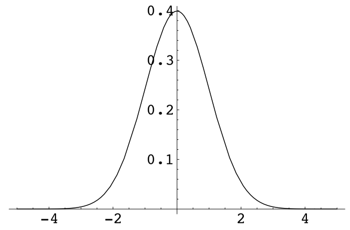
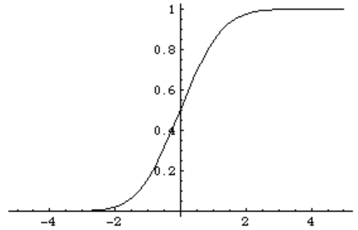
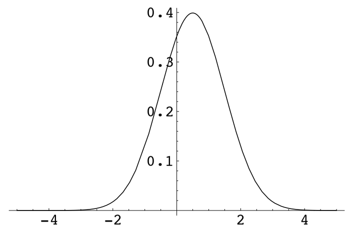
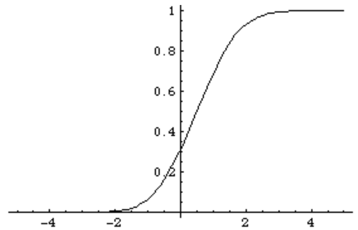
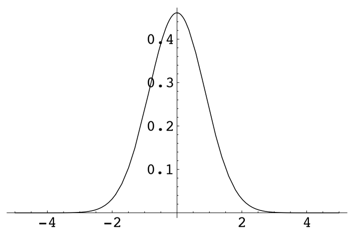
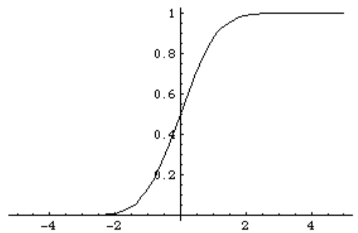
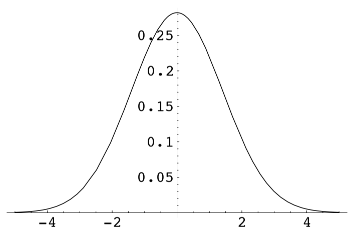
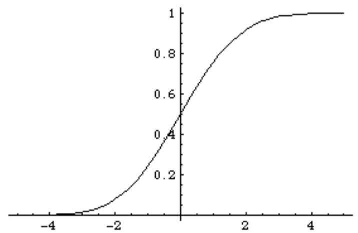
Beweis

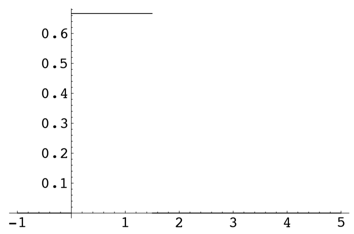
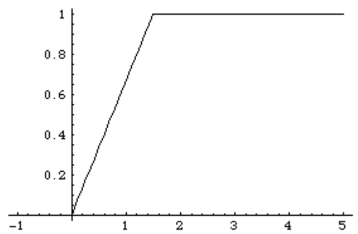
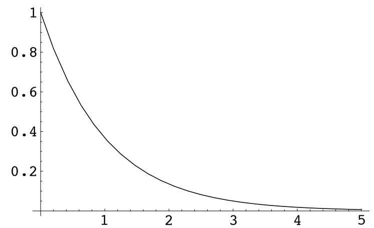
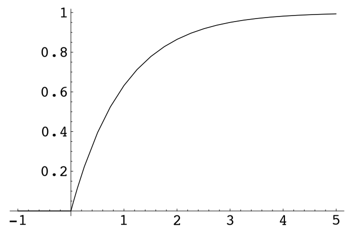
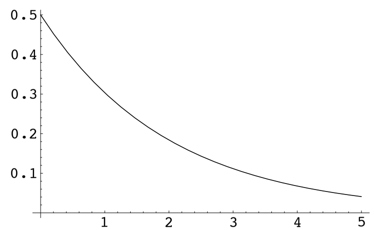
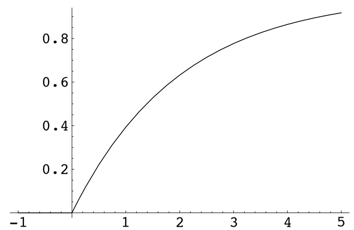
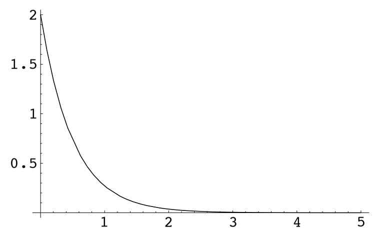
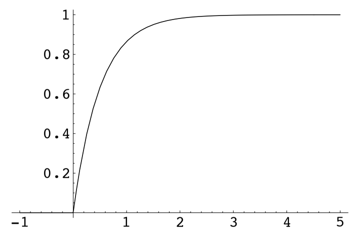
(a) Für die Verteilungsfunktion F_{X^2} von X^2 gilt $F_{X^2}(y) = \mathbb{P}\{X^2 \leq y\} = 0$ für $y \leq 0$.
Sei daher im folgenden $y > 0$. Die Substitution $z = \sqrt{x}$ zeigt:

$$\begin{aligned} F_{X^2}(y) &= \mathbb{P}\{X^2 \leq y\} = \mathbb{P}\{-\sqrt{y} < X \leq \sqrt{y}\} \\ &= \int_0^{\sqrt{y}} f_X(x)\,dx + \int_{-\sqrt{y}}^0 f_X(x)\,dx = \int_0^{\sqrt{y}} f_X(x)\,dx + \int_0^{\sqrt{y}} f_X(-x)\,dx \\ &= \int_0^y \frac{1}{2\sqrt{z}}[f_X(z) + f_X(-z)]\,dz \end{aligned}$$

(b) Die Definition des Erwartungswerts und die Substitutionen $y = x^2$ sowie $z = -x$, die die Substitutionen in Teil (a) rückgängig machen, zeigen

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{X^2}(y)\,dy &= \int_0^{\infty} \frac{y}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})]\,dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{x}{2}[f_X(x) + f_X(-x)]2x\,dx \\ &= \int_0^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx + \int_{-\infty}^0 z^2 f_X(z)\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,dx \end{aligned}$$

Verteilung	Parameter	Dichte	Verteilungsfunktion
Standardnormal-verteilung	$(\mu = 0,\, \sigma = 1)$		
Normalverteilung	$\mu = 1/2,\, \sigma = 1$		
	$\mu = 0,\, \sigma = \sqrt{3}/2$		
	$\mu = 0,\, \sigma = \sqrt{2}$		

Verteilung	Parameter	Dichte	Verteilungsfunktion
uniforme Verteilung	$a = 0,\ b = 3/2$		
Exponential-verteilung	$\alpha = 1$		
	$\alpha = 1/2$		
	$\alpha = 2$		

Zufallsgrößen mit Dichten

Verteilung	Parameter	Dichte	Verteilungsfunktion	Erwartungswert	Varianz
Standardnormalverteilung	$(\mu = 0,\ \sigma = 1)$	$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2}$	$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y)\,dy$	0	1
Normalverteilung	$\mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$	$\varphi(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$	$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(y;\mu,\sigma)\,dy$	μ	σ^2
uniforme Verteilung	$a, b \in \mathbb{R},\ a < b$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \le x \le b \\ 1 & \text{für } x > b \end{cases}$	$(a+b)/2$	$(a-b)^2/12$
Exponentialverteilung	$\alpha > 0$	$f(x) = \begin{cases} \alpha \mathrm{e}^{-\alpha x} & \text{für } x \ge 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$	$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-\alpha x} & \text{für } x \ge 0 \end{cases}$	$1/\alpha$	$1/\alpha^2$