Vertiefung NWI: 2. Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Mittwoch, 26.04.2017

2. Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Definition: (Ω, p) heißt Wahrscheinlichkeitsraum (W-Raum)

Erinnerung: Ereignisse sind Teilmengen des Ereignisraums Ω

Mengen und Mengenoperationen: Seien $A, B, A_1, A_2, \dots \subset \Omega$

- *Komplement von A:* $A^{\mathsf{c}} = \{\omega \in \Omega \colon \omega \notin A\}$
- *Schnitt von A und B:* $A \cap B = \{\omega \in \Omega \colon \omega \in A$ und $\omega \in B\}$
- *Vereinigung von A und B:* $A \cup B = \{\omega \in \Omega \colon \omega \in A$ oder $\omega \in B\}$
- *A ohne B:* $A \setminus B = \{\omega \in \Omega \colon \omega \in A$ und $\omega \notin B\} = A \cap B^{\mathsf{c}}$
- *A und B disjunkt:* $A \cap B = \emptyset$
- $A_1, A_2, A_3, \dots$ *paarweise disjunkt:* $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j$ mit $i \neq j$
- $A_1, A_2, A_3, \dots$ *disjunkt:* $\bigcap_i A_i = \emptyset$

Beispiel: Würfeln, $A = \{1,3,5\}$, $B = \{1,2,3\}$ und $C = \{2,4,5\}$
Sind die drei Ereignisse disjunkt? Welche sind paarweise disjunkt?
$A \cap B = \{1,3\} \neq \emptyset$, $A \cap C = \{5\} \neq \emptyset$, $B \cap C = \{2\} \neq \emptyset$, aber $A \cap B \cap C = \emptyset$.
D.h., A,B, C sind disjunkt, aber nicht paarweise disjunkt.

Beispiel
Die Mengen $A_i = \{j \in \mathbb{N} : j \geq i\} \subset \mathbb{N}$ sind disjunkt, aber nicht paarweise disjunkt

Rechenregeln für Mengen / Ereignisse: Seien $A, B, C \subset \Omega$

- *Transitivität:* Gelten $A \subset B$ und $B \subset C$, so folgt $A \subset C$
- *Kommutativgesetz:* $A \cup B = B \cup A$ sowie $A \cap B = B \cap A$
- *Assoziativgesetz:* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ sowie $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- *Distributivgesetz:*
  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ sowie $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- *de Morgansche Regeln:* $(A \cup B)^{\mathsf{c}} = A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}}$ sowie $(A \cap B)^{\mathsf{c}} = A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}}$

Beweis: elementweise, vgl. Bilder
Exemplarisch für die erste Variante des Distributivgesetzes:

"$\subset$": Sei $\omega \in A \cap (B \cup C)$. Dann ist $\omega \in A$. Ausserdem gilt $\omega \in B$ oder $\omega \in C$. Ist $\omega \in B$, so folgt $\omega \in A \cap B \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Analog impliziert $\omega \in C$, daß $\omega \in A \cap c \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$ gilt.

"$\supset$": Sei $\omega \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Dann ist $\omega \in A \cap B$ oder $\omega \in A \cap C$. Ist $\omega \in A \cap B$, so folgt weiter, daß $\omega \in A$ und $\omega \in B \subset B \cup C$ gelten, also $\omega \in A \cap (B \cup C)$. Ist $\omega \in A \cap C$, so folgt analog $\omega \in A \cap (B \cup C)$.

Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten: Seien $A, B, A_1, A_2, \dots \subset \Omega$

(a) Für paarweise disjunkte $A_1, A_2, \dots$ gilt: $P(\bigcup_i A_i) = \sum_i P(A_i)$
Beweis: Definition der Ws. eines Ereignisses, dann Umschreiben der Summe

(b) $P(A^{\mathsf{c}}) = 1 - P(A)$
Beweis: Mit $\Omega = A \cup A^{\mathsf{c}}$ zurückführen auf (a)

(c) $A \subset B \;\Rightarrow\; P(A) \leq P(B)$
Beweis: B disjunkt zerlegen, (a) anwenden

(d) $A \subset B \;\Rightarrow\; P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$
Beweis: wie für (c)

(e) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Beweis: Disjunktes Zerlegen von $A \cup B$ und erneutes Zusammensetzen zeigt
$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A \cap B^{\mathsf{c}}) + P(B \cap A^{\mathsf{c}}) + 2P(A \cap B) = P(A) + P(B)$

Ein- und Ausschlußprinzip: Seien $A, B, C \subset \Omega$
$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

Allgemeiner Fall: Seien $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega$

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = & \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \\ & - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned}$$

Beweis: Vollständige Induktion

Beispiel: n-mal Würfeln
Wie groß ist die Ws., mindestens eine Sechs zu werfen?

- $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}^n = \{(\omega_1,\dots,\omega_n)\colon \omega_k \in \{1,\dots,6\}$ für $k = 1,\dots,n\}$
  (alle n-Tupel mit Einträgen aus $\{1,2,3,4,5,6\}$)
- Für p wähle die Gleichverteilung auf Ω, d.h. $p(\omega) = 1/|\Omega| = 1/6^n \quad \forall\, \omega \in \Omega$
- $A = \{\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n) \in \Omega\colon \exists\, k \in \{1,\dots,n\}$ mit $\omega_k = 6\}$
  (A ist das Ereignis, mindestens eine Sechs zu würfeln)
- $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ mit $A_i = \{(\omega_1,\dots,\omega_n) \in \Omega\colon \omega_i = 6\}$
  (A_i ist das Ereignis, eine Sechs im i-ten Wurf zu würfeln)
  Beachte: Die Ereignisse A_i sind *nicht* paarweise disjunkt!

Wir wollen das Ein- und Ausschlußprinzip verwenden:

- $P(A_i) = |A_i|/|\Omega| = 6^{n-1}/6^n = 1/6$
- $P(A_i \cap A_j) = |A_i \cap A_j|/|\Omega| = 6^{n-2}/6^n = 1/6^2$ für $i < j$
- $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = |A_i \cap A_j \cap A_k|/|\Omega| = 6^{n-3}/6^n = 1/6^3$ für $i < j < k$
- Allgemein:
  $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}|/|\Omega| = 6^{n-k}/6^n = 1/6^k$ für $i_1 < i_2 < \dots < i_k$

Mit dem Ein- und Ausschlußprinzip:

$$P(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \frac{1}{6^k}$$

Der Ausdruck kann weiter vereinfacht werden mit Hilfe der binomischen Formel:

$$P(A) = -\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \frac{1}{6^k} + \binom{n}{0} \frac{1}{6^0} = 1 - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \Big(-\frac{1}{6}\Big)^k 1^{n-k} = 1 - \Big(1 - \frac{1}{6}\Big)^n = 1 - \Big(\frac{5}{6}\Big)^n$$

Beispiel: n-mal Würfeln (mit einfacherem Lösungsweg)
$A^{\mathsf{c}} = \{(\omega_1,\dots,\omega_n) \in \Omega\colon \omega_i \in \{1,\dots,5\}$ für $i = 1,\dots,n\}$ impliziert sofort

$P(A) = 1 - P(A^{\mathsf{c}}) = 1 - \dfrac{|A^{\mathsf{c}}|}{|\Omega|} = 1 - \Big(\dfrac{5}{6}\Big)^n$

Beispiel: De Méres Paradoxon
Was ist wahrscheinlicher zu erzielen?

(1) Mindestens eine Sechs bei viermaligem Würfeln eines fairen Würfels

oder

(2) mindestens ein Paar von Sechsen bei 24-maligem Würfeln von jeweils zwei fairen Würfeln?

Lösungsweg:

(1) $\Omega_1 = \{1, \ldots, 6\}^4$ mit Gleichverteilung P_1
$A_1 = (\{1, \ldots, 5\}^4)^{\mathsf{c}}$ (Komplement von "keine Sechs")
$P(A_1) = 1 - P(A_1^{\mathsf{c}}) = 1 - |A_1^{\mathsf{c}}| \,/\, |\Omega_1| = 1 - (\frac{5}{6})^4 = 0,5177\ldots$

(2) $\Omega_2 = (\{1, \ldots, 6\}^2)^{24}$ mit Gleichverteilung P_2
$A_2 = ((\{1, \ldots, 6\}^2 \setminus \{(6,6)\})^{24})^{\mathsf{c}}$ (Komplement von "keine Doppel-Sechs")
$P(A_2) = 1 - P(A_2^{\mathsf{c}}) = 1 - |A_2^{\mathsf{c}}| \,/\, |\Omega_2| = 1 - (\frac{35}{36})^{24} = 0,4914\ldots$

Knobelaufgabe
Eine Entscheidung soll durch Münzwurf gefällt werden. Wir wissen nicht, ob die einzige zur Verfügung stehende Münze fair ist bzw. mit welcher Wahrscheinlichkeit sie *Kopf* zeigt.
Wie können wir trotzdem eine faire Entscheidung treffen?
Die Aufgabe kann mit dem derzeitigen Kenntnisstand noch nicht vollständig bearbeitet werden. Was fehlt noch?