

Vertiefung NWI: 3. Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Mittwoch, 03.05.2017

3. Kombinatorik: Geordnetes / ungeordnetes Ziehen mit/ohne Zurücklegen

1. Beispiel: Gegeben ein Alphabet mit n verschiedenen Symbolen. Wie viele verschiedene Wörter der Länge k können gebildet werden?

Klassifizierung: *geordnetes Ziehen mit Zurücklegen*

- Reihenfolge der Symbole im Wort ist relevant
- Symbole können mehrfach verwendet werden

Allgemeiner Fall

Geordnetes Ziehen mit Zurücklegen von k Kugeln aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln (die Kugeln seien numeriert von 1 bis n)

$$\Omega = \{1, \dots, n\}^k \quad \text{und} \quad |\Omega| = n^k$$

2. Beispiel: Gegeben n verschiedenfarbige Perlen. k Perlen werden ausgewählt und der Reihe nach auf eine Schnur gezogen. Wie viele verschiedene Muster sind möglich?

Klassifizierung: *geordnetes Ziehen ohne Zurücklegen*

- Reihenfolge der Perlen auf der Schnur ist relevant
- Jede Perle kann nur einmal verwendet werden

Allgemeiner Fall

Geordnetes Ziehen ohne Zurücklegen von $k \leq n$ Kugeln aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln (die Kugeln seien numeriert von 1 bis n)

$$\Omega = \{\omega \in \{1, \dots, n\}^k : \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\} \quad \text{und} \quad |\Omega| = n(n-1) \dots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Spezialfall: $k = n$

Ω ist die Menge aller Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ und $|\Omega| = n! = n \cdot (n-1) \dots 2 \cdot 1$

3. Beispiel: Wie groß ist die Anzahl der möglichen Tipps im Lotto "6 aus 49"?

Klassifizierung: *ungeordnetes Ziehen ohne Zurücklegen*

- Reihenfolge des Ankreuzens der Lottozahlen ist irrelevant
- Jede Zahl kann höchstens einmal angekreuzt werden pro Tipp

Allgemeiner Fall

Ungeordnetes Ziehen ohne Zurücklegen von $k \leq n$ Kugeln aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln (die Kugeln seien numeriert von 1 bis n)

$$\Omega = \{\{\omega_1, \dots, \omega_k\} \subset \{1, \dots, n\} : \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\}$$

ist die Menge aller k -elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$ und

$$|\Omega| = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

4. Beispiel: Wie viele Möglichkeiten gibt es, k ununterscheidbare Murmeln auf n Urnen zu verteilen?

Grundidee: Wir wählen für jede Murmel, in welche Urne wir sie legen.

Klassifizierung: *ungeordnetes Ziehen mit Zurücklegen*

- Reihenfolge ist egal, denn uns interessiert die Anzahl Murmeln in jeder Urne, aber nicht, in welcher Reihenfolge die Murmeln in die Urnen gelegt wurden
- Urnen können mehrfach gewählt werden, da mehrere Murmeln in dieselbe Urne gelegt werden können

6 Urnen mit 7 Murmeln: ooo | o | | oo | o |

Die erste Urne enthält drei Murmeln, die zweite Urne eine Murmel, die dritte Urne ist leer, ... Beachte dabei: Auch die letzte Urne ist leer.

Wir notieren dies mittels einer ein-eindeutigen Zuordnung als $(1, 1, 1, 2, 4, 4, 5)$, wobei wir die Nummern der Urnen so oft schreiben, wie es der Anzahl der Murmeln in der Urne entspricht, und die Nummern aufsteigend ordnen.¹

Wir bestimmen die Anzahl Möglichkeiten, indem wir zählen, wie viele Möglichkeiten es gibt, k ununterscheidbare Murmeln und $n - 1$ Trennwände anzuordnen. Dazu müssen wir aus den insgesamt $n - 1 + k$ unterscheidbaren, d.h. numerierten, Plätzen k Plätze für die Murmeln auswählen. (Äquivalent: Wähle $n - 1$ Plätze für die Wände.) Mit Hilfe des 3. Beispiels:

$$\binom{n + k - 1}{k} \text{ Möglichkeiten}$$

¹Dieses Vorgehen vermeidet das Notationsproblem für Multimengen aus der 1. Vorlesung.

Allgemeiner Fall

Ungeordnetes Ziehen mit Zurücklegen von k Kugeln aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln (die Kugeln seien numeriert von 1 bis n)

$$\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_k) \in \{1, \dots, n\}^k : \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_k\},$$

wobei wir alle Permutationen des k -Tupels $(\omega_1, \dots, \omega_k)$ als äquivalent betrachten und uns $(\omega_1, \dots, \omega_k)$ mit $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_k$ als Repräsentant dient. Es ist

$$|\Omega| = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

Alternativ

$$\tilde{\Omega} = \{(\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_n) \in \{0, \dots, k\}^n : \sum_{i=1}^n \tilde{\omega}_i = k\},$$

wobei $\tilde{\omega}_i$ angibt, wie oft die Kugel Nummer i gezogen wurde. Da beide Alternativen äquivalent sind, gilt $|\Omega| = |\tilde{\Omega}|$.

Weitere Beispiele

- Wie groß ist die Ws., mit vier identischen Würfeln vier verschiedenen Augenzahlen zu werfen?
- Wie groß ist die Ws., beim Lotto "6 aus 49" genau vier Richtige zu haben?
- Wie viele Möglichkeiten gibt es für zwei ununterscheidbare Spatzen, sich auf vier Stromleitungen zu verteilen?