Universität Bielefeld

Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Barbara Gentz SS 2017

Vertiefung NWI:
Ergänzung zur 3. Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Hypergeometrische Verteilung

Beispiel: *Wie groß ist die Ws., daß beim Skat jeder Spieler genau ein As hat?*

Wir betrachten hier nur die Ws., daß ein vorab gewählter ("der erste") Spieler genau ein As hat.

- $\Omega = \{S_1 \subset \{1, \ldots, 32\} : |S_1| = 10\}$ (10-elementige Teilmengen von $\{1, \ldots, 32\}$)
- Die Karten mit den Nummern 1–4 seien die Asse, und S_1 seien die Karten, die Spieler 1 bekommt.
- P Gleichverteilung
- $A_1 = \{S_1 \in \Omega : |S_1 \cap \{1, \ldots, 4\}| = 1\}$ (Spieler 1 erhält genau ein As)
- Dann ist $P(A_1) = \dfrac{\binom{4}{1}\binom{28}{9}}{\binom{32}{10}}$

Allgemeiner Fall: *Hypergeometrische Verteilung*

- $N = S + W$ Kugeln in einer Urne, davon S schwarze und W weiße Kugeln
- Ziehen ohne Zurücklegen von n Kugeln
- ges.: Ws., daß genau s der gezogenen Kugeln schwarz sind
- $n = s + w$, wobei w Anzahl der gezogenen weißen Kugeln ist

1. Lösung

- Wähle Ω als Menge aller n-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, N\}$
- Die Kugeln $1, \ldots, S$ seien schwarz, die Kugeln $S + 1, \ldots, S + W$ seien weiß

- $|\Omega| = \binom{N}{n}$
- $A \subset \Omega$ sei die Menge aller n-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, N\}$ mit $|A \cap \{1, \dots, S\}| = s$ und $|A \cap \{S+1, \dots, S+W\}| = w$
- $|A| = \binom{S}{s}\binom{W}{w}$

  weil wir $\binom{S}{s}$ Möglichkeiten haben, die schwarzen Kugeln zu wählen und jede dieser Möglichkeiten mit jeder der $\binom{W}{w}$ Möglichkeiten, die weißen Kugeln zu wählen, kombiniert werden kann.
- Also ist $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{S}{s}\binom{W}{w}}{\binom{N}{n}}$

2. Lösung

- Wähle Ω als Menge aller Permutationen der Zahlen von 1 bis N. Wir stellen uns also geordnetes Ziehen ohne Zurücklegen *aller* Kugeln vor.
- Wieder seien die Kugeln $1, \dots, S$ schwarz, die Kugeln $S+1, \dots, S+W$ weiß
- P Gleichverteilung
- $|\Omega| = N!$
- $A \subset \Omega$ wählen wir als

  $$A = \{\omega \in \Omega : \exists\, i_1, \dots, i_s \in \{1, \dots, n\} \text{ mit } i_l \neq i_k \text{ für } l \neq k,\ \omega_i \in \{1, \dots S\} \text{ für } i \in \{i_1, \dots, i_s\}$$
  $$\text{und } \omega_i \in \{S+1, \dots S+W\} \text{ für } i \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_s\}\}$$

  Dabei sind die i_l die Nummern der Plätze, an denen die schwarzen Kugeln liegen.
- $|A| = \binom{n}{s} \cdot S \cdot \dots \cdot (S-s+1) \cdot W \cdot \dots \cdot (W-w+1) \cdot (S+W-s-w)!$ Dabei ist
  - $\binom{n}{s}$ die Anzahl Möglichkeiten, Plätze für die schwarzen Kugeln zu wählen. Berücksichtigen wir diesen Faktor, so dürfen wir danach annehmen, daß die ersten s Kugeln schwarz sind, die folgenden w Kugeln weiß, und alle restlichen beliebig.
  - $S \cdot \dots \cdot (S-s+1)$ ist die Anzahl Möglichkeiten, geordnet und ohne Zurücklegen s schwarze Kugeln aus S unterscheidbaren (numerierten!) schwarzen Kuglen zu wählen.
  - Analog ergibt sich der Faktor $W \cdot \dots \cdot (W-w+1)$ für die weißen Kugeln.
  - Schließlich müssen die restlichen $S+W-s-w$ Kugeln ebenfalls geordnet und ohne Zurücklegen gezogen werden. Da diese ebenfalls unterscheidbar sind, ergeben sich weitere $(S+W-s-w)!$ Möglichkeiten.
- Ausrechnen von $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ ergibt das gesuchte Ergebnis (vergleichen!).