Vertiefung NWI: 7. Vorlesung zur Wahrscheinlichkeitstheorie

Mittwoch, 31.5.2017

7. Unabhängigkeit von Zufallsgrößen, Erwartungswert und Varianz

7.1 Unabhängigkeit von Zufallsgrößen

Definition: *Unabhängigkeit von Zufallsgrößen*
Die Zufallsgrößen $X_1, \dots, X_n$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p) heißen *unabhängig*, wenn für *jede* Wahl $x_1 \in X_1(\Omega), \dots, x_n \in X_n(\Omega)$ die Ereignisse $\{X_1 = x_1\}, \dots, \{X_n = x_n\}$ unabhängig sind.

Beispiel: *Wiederholtes Werfen eines Würfels*

- $\Omega = \{1, \dots, 6\}^n$ mit Gleichverteilung
- $X_i((\omega_1, \dots, \omega_n)) := \omega_i$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ (Ergebnis des i-ten Wurfs sei)

Verifizieren Sie, daß $X_1, \dots, X_n$ unabhängig sind. Wie viele Bedingungen sind zu prüfen?

1. Folgerung
Die Zufallsgrößen $X_1, \dots, X_n$ sind genau dann unabhängig, wenn ihre gemeinsame Verteilung, d.h., wenn die Verteilung P_X des Vektors $X = (X_1, \dots, X_n)$, die folgende *Produktdarstellung* hat:

$$P_X(x_1, \dots, x_n) = P_{X_1}(x_1) \dots P_{X_n}(x_n) \quad \text{für alle } x_1, \dots, x_n$$

Beweis der 1. Folgerung

"$\Rightarrow$" Verwende die Unabhängigkeit von $X_1, \dots, X_n$ an der Stelle $(\star)$:

$$\begin{aligned} P_X(x_1, \dots, x_n) &= P\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} \\ &\overset{(\star)}{=} P\{X_1 = x_1\} \dots P\{X_n = x_n\} = P_{X_1}(x_1) \dots P_{X_n}(x_n) \end{aligned}$$

"$\Leftarrow$" $(n=3)$

$$\begin{aligned} P\{X_1=x_1, X_2=x_2, X_3=x_3\} = P_X(x_1,x_2,x_3) &\overset{\text{Vor.}}{=} P_{X_1}(x_1)\cdot P_{X_2}(x_2)\cdot P_{X_3}(x_3) \\ &= P\{X_1=x_1\}\cdot P\{X_2=x_2\}\cdot P\{X_3=x_3\} \end{aligned}$$

Außerdem zu betrachten sind Paare von Ereignissen der Form $\{X_i = x_i\}$:

$$\begin{aligned} P\{X_1=x_1, X_2=x_2\} = \sum_{x_3\in X_3(\Omega)} P_X(x_1,x_2,x_3) &\overset{\text{s.o.}}{=} \sum_{x_3\in X_3(\Omega)} P_{X_1}(x_1)\cdot P_{X_2}(x_2)\cdot P_{X_3}(x_3) \\ &= P\{X_1=x_1\}\cdot P\{X_2=x_2\} \end{aligned}$$

Analog für $P\{X_1=x_1, X_3=x_3\}$ und $P\{X_2=2, X_3=x_3\}$.

2. Folgerung
Die Zufallsgrößen $X_1,\ldots,X_n$ sind genau dann unabhängig, wenn für *jede* Wahl $A_1\subset X_1(\Omega)$, $\ldots$, $A_n\subset X_n(\Omega)$ die Ereignisse $\{X_1\in A_1\},\ldots,\{X_n\in A_n\}$ unabhängig sind.

Beweis der 2. Folgerung $(n=2)$

"$\Leftarrow$" Wähle $A_i=\{x_i\}$, $i=1,2$.

"$\Rightarrow$" $$\begin{aligned} P(X_1\in A_1, X_2\in A_2) &= \sum_{x_1\in A_1, x_2\in A_2} P(X_1=x_1, X_2=x_2) \\ &= \sum_{x_1\in A_1, x_2\in A_2} P(X_1=x_1)\cdot P(X_2=x_2) = P(X_1\in A_1)\cdot P(X_2\in A_2) \end{aligned}$$

Dabei haben wir beim ersten Gleichheitszeichen in der zweiten Zeile die Unabhängigkeit der Zufallsgrößen verwendet.

Beispiel
Betrachten Sie wieder das Beispiel des n-fachen Würfelns.

7.2 Erwartungswert und Varianz einer Zufallsgröße

Beispiel: *einmal Würfeln mit fairem Würfel*

- $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ mit Gleichverteilung
- $X : \Omega \to \mathbb{R}\,,\ X(\omega) = \omega,\ X(\Omega) = \Omega \subset \mathbb{R}$
- Fairer Würfel: erwartete Augenzahl ist $\mathbb{E}[X] = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3,5$ (arithmetisches Mittel)

  Die erwartete Augenzahl entspricht der mittleren Zahl von Schritten, die wir in einem Würfelspiel pro Wurf vorwärts gehen dürfen.

Beispiel: *Spiel, bei dem nicht alle Ausgänge gleichwahrscheinlich sind*

- Fairer Würfel, Auszahlung sei 6 Euro, falls $2, \ldots, 6$ gewürfelt, sonst k Euro
- $\Omega = \{1, \ldots, 6\}$ mit Gleichverteilung
- Auszahlung $Y(\omega) = 6$ für $\omega \in \{2, \ldots, 6\}$, $Y(1) = k$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] = \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) p(\omega) &= \frac{6+6+6+6+6+k}{6} \\
&= 6 \cdot \frac{5}{6} + k \cdot \frac{1}{6} = 6\,\mathbb{P}\{Y = 6\} + k\,\mathbb{P}\{Y = k\} = \sum_{l \in Y(\Omega)} l\,\mathbb{P}\{Y = l\}\,.
\end{aligned}
$$

Definition: *Erwartungswert und Varianz*

- Der *Erwartungswert* einer diskreten Zufallsgröße X mit Zielbereich $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$
\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}X = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}\{X = x\}\,,
$$

  sofern $\sum_{x \in X(\Omega)} |x| \mathbb{P}\{X = x\} < \infty$ *(absolute Konvergenz)*.

  Wir sprechen in diesem Fall von der *Existenz des Erwartungswerts*.

- Falls der Erwartungswert von X existiert, definieren wir die *Varianz* von X durch

$$
\mathrm{Var}\,(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbb{E}[X])^2 \mathbb{P}\{X = x\}\,.
$$

Mehr über Varianzen und deren Interpretation in der nächsten VL.

Bemerkungen

- Die Bedingung, daß die den Erwartungswert definierende Reihe absolut konvergent sein muß, garantiert, daß wir die Summanden beliebig umsortieren dürfen.
- Es gilt daher
$$\sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}\{X=x\} = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)p(\omega)\ ,$$
sofern eine der Reihen absolut konvergent ist. (Vgl. auch obiges Beispiel mit dem Spiel.)
- Wenn Ω oder auch nur $X(\Omega)$ endlich ist, so existiert der Erwartungswert. Nimmt X nur nichtnegative Werte an, können wir einfach anfangen, den Erwartungswert auszurechnen. Ist das Ergebnis endlich, so existiert der Erwartungswert.
- In der Regel liegt $\mathbb{E}[X]$ nicht in $X(\Omega)$, vgl. erwartete Augenzahl beim einmaligen Würfeln: $\mathbb{E}[X]=3,5\notin\{1,\ldots,6\}=X(\Omega)$

Beispiel: *Poisson-Verteilung*
Sei X Poisson-verteilt, d.h., es existiere ein $\lambda>0$ mit $\mathbb{P}\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}$ für alle $k\in\{0,1,2,3,\ldots\}$.
Der Erwartungswert existiert, weil die folgende Rechung ein endliches Ergebnis hat (alle Summanden sind nichtnegativ).

$$\mathbb{E}[X]=\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}=\lambda\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}=\lambda\ .$$

Beispiel: *geometrische Verteilung*
Wie lange müssen wir im Mittel warten, bis der erste Erfolg eintritt? Zum Beispiel bis zur ersten Sechs beim Werfen eines fairen Würfels?

Sei X geometrisch verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p\in(0,1)$, d.h., es gelte $\mathbb{P}\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p$ für alle $k\in\{1,2,3,\ldots\}$.
Der Erwartungswert existiert, weil die folgende Rechung ein endliches Ergebnis hat (auch hier sind alle Summanden sind nichtnegativ).

$$\mathbb{E}[X]=\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}p=p\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^k\Big)\Big|_{x=1-p}=p\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}x^k\Big)\Big|_{x=1-p}\ ,$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen folgt, da eine Potenzreihe im Innern ihres Konvergenzradius gliedweise differenziert werden darf. Weiter folgt mit Hilfe der bekannten Formel für die Summe einer geometrischen Reihe

$$\mathbb{E}[X]=p\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\frac{1}{1-x}\Big)\Big|_{x=1-p}=p\,\frac{1}{(1-x)^2}\Big|_{x=1-p}=\frac{1}{p}\ .$$

Satz: *Der Erwartungswert ist linear.*
Es seien $X : \Omega \to \mathbb{R}$ und $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei Zufallsgrößen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, p), deren Erwartungswerte existieren, und $a, b \in \mathbb{R}$ zwei Konstanten.

Dann ist $aX + bY$ ebenfalls eine Zufallsgröße, der Erwartungswert von $aX + bY$ existiert, und es gilt

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\,\mathbb{E}[X] + b\,\mathbb{E}[Y] \;.$$

Beweis des Satzes
Nehmen wir zunächst an, der Erwartungswert von $aX + bY$ existiert. Dann dürfen alle Reihen beliebig umsortiert werden:

$$\mathbb{E}[aX + bY] = \sum_{\omega \in \Omega} [aX(\omega) + bY(\omega)]p(\omega) = a \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)p(\omega) + b \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega)p(\omega) = a\,\mathbb{E}[X] + b\,\mathbb{E}[Y] \;.$$

Eine analoge Rechung mit Betragszeichen und Abschätzungen zeigt die Existenz des Erwartungswerts:

$$\sum_{\omega \in \Omega} |aX(\omega) + bY(\omega)|p(\omega) \leqslant |a| \sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|p(\omega) + |b| \sum_{\omega \in \Omega} |Y(\omega)|p(\omega) < \infty \;,$$

da nach Voraussetzung $\mathbb{E}X$ und $\mathbb{E}Y$ existieren.

Beispiel: *Augensumme bei mehrfachem Würfeln*

- $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^n$ mit Gleichverteilung, $X_i(\omega) = \omega_i$, $X = \sum_{i=1}^n X_i$
- Berechne erwartete Augensumme bei zweimaligem Würfeln ($n = 2$):

  $$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=2}^{12} iP(X_1 + X_2 = i) = \ldots \qquad \text{(aufwendig)}$$

  Alternativ

  $$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{\omega \in \Omega} [X_1(\omega) + X_2(\omega)]p(\omega) \\ &= \sum_{\omega_1, \omega_2 = 1}^{6} [\omega_1 + \omega_2]\,\frac{1}{36} = \frac{1}{36}[6(1 + \cdots + 6) + 6(1 + \cdots + 6)] = \frac{6 \cdot 2 \cdot 21}{36} = 7\end{aligned}$$

- Mit Satz

  $$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] = 2 \cdot 3{,}5 = 7$$

- Leicht zu verallgemeinern: Bei n-maligem Würfeln gilt $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n] = n\,\frac{7}{2}$

Beispiel: *Binomialverteilung*
Sei X binomialverteilt mit Parametern n und p. Der Erwartungswert von X existiert, da der Zielbereich von X endlich ist.

- 1. Versuch:
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \ldots \qquad \text{(mit binomischer Formel und etwas Geschick)}$$

- 2. Versuch:
Wähle $\Omega = \{0,1\}^n$. Dann hat die Anzahl der Erfolge X eine Darstellung $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ mit $X_i(\omega) = \omega_i$. Aus
$$\mathbb{E}[X_i] = 0 \cdot \mathbb{P}\{X_i = 0\} + 1 \cdot \mathbb{P}\{X_i = 1\} = p$$
folgt mit der Linearität des Erwartungswerts sofort
$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{n} p = np\,.$$

Beispiel: *St. Petersburger Paradoxon (Erwartungswert muß nicht existieren)*
Ein Casino möchte folgendes Spiel anbieten: Eine faire Münze wird geworfen, bis zum ersten Mal *Kopf* erscheint. Passiert dies beim n-ten Wurf, so sei die Auszahlung $X = 2^n$. Dabei soll natürlich $P(X = 2^n) = 2^{-n}$ gelten.

Wähle $\Omega = \mathbb{N}$ und $p(n) = (1-p)^{n-1}p = 2^{-n}$ für $p = 1/2$ and alle $n \in \Omega$. Die Zufallsgröße $X : \Omega \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $X(n) = 2^n$ für alle $n \in \Omega$.

Was wäre ein fairer Einsatz für dieses Spiel? Wir wollen den Einsatz fair nennen, wenn der Einsatz gleich dem erwarteten Gewinn ist. Wir suchen daher $\mathbb{E}[X]$. Nun ist
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n P(X = 2^n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n p(n) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty\,.$$

Der Erwartungswert existiert also nicht, und ein fairer Einsatz kann nicht bestimmt werden.