Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier, Christian Wiesel
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld WS 2015/16

1. Aufgabenblatt zur Stochastik 1 *Auflage 2*

Abgabe bis **Freitag, 30. Oktober 2015, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Kristina Mey PF 140, Jan Niklas Lusga PF 145, Patrick Schuhmann PF 219, Urs-Frederik Baier PF 108, Daniel Altemeier PF 161*, diese Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128; das *Postfach 2215* von *Jason Uhing* befindet sich rechts neben der Tür zum Kopierraum). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Aufgabe 1.I (8 Punkte). Sei $\Omega = \{a, b, c, d\}$.

a) Erstellen Sie eine Übersicht aller σ-Algebren über Ω mit Hilfe von jeweils geeigneten Erzeugendensystemen.
Es reicht hier, die σ-Algebren nur anzugeben. Sie brauchen nicht zu zeigen, dass σ-Algebren vorliegen und auch nicht, dass es keine weiteren σ-Algebren gibt.

b) Eine σ-Algebra $\mathcal{A}_1$ heißt Sub-σ-Algebra einer σ-Algebra $\mathcal{A}_2$, falls $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$. Wählen Sie für obiges Ω jeweils 2 Beispiele von Paaren von σ-Algebren $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ aus, so dass

(i) $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$, (ii) $\mathcal{A}_1 \not\subset \mathcal{A}_2$ und $\mathcal{A}_2 \not\subset \mathcal{A}_1$.

c) Gibt es eine *kleinste* σ-Algebra $\mathcal{A}_1$, die Sub-σ-Algebra aller anderen σ-Algebren ist? Gibt es eine *größte*, zu der alle anderen Sub-σ-Algebren sind?

Aufgabe 1.II (8 Punkte). Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega = \{0,1\}^n$. Zeigen Sie, dass es eine Abbildung $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ gibt, mit den Eigenschaften

(N) **Normierung:** $P(\Omega) = 1$,

(A) **Additivität:** Für alle paarweise disjunkten Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ gilt

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Bemerkung: Für endliches Ω ist diese Eigenschaft äquivalent zur σ-Additivität.

(I) **Invarianz:** Für alle $A \subset \Omega$ und $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $P(T_i A) = P(A)$, wobei $T_i : \Omega \to \Omega$, gegeben durch

$$T_i(\omega) = T_i\big((\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)\big) := (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{i-1}, 1 - \omega_i, \omega_{i+1}, \ldots, \omega_n)$$

für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, d.h., die Abbildung von Ω auf sich, welche das Ergebnis des i-ten Wurfes umdreht, und $T_i(A) = \{T_i(\omega) : \omega \in A\}$ das Bild von A und T_i.

Aufgabe 1.III (8 Punkte). Geben Sie für die folgenden Experimente jeweils einen geeigneten Ereignisraum $(\Omega, \mathcal{A})$ an und geben Sie jeweils die beschriebenen Ereignisse als Elemente der jeweiligen σ-Algebra $\mathcal{A}$ an.

a) In einer Urne befinden sich drei Kugeln, die mit den Zahlen $1, 2, 3$ durchnummeriert sind. Wir ziehen dreimal eine Kugel aus der Urne, wobei wir jeweils die gezogene Kugel vor dem nächsten Zug wieder zurücklegen.

   A: Die Summe der Nummern der ersten beiden gezogenen Kugeln ist gerade,

   B: Die erste gezogene Nummer ist höchstens so groß wie die dritte gezogene Nummer.

b) Aus einer Urne mit drei schwarzen Kugeln, nummeriert mit den Zahlen $1, 2, 3$, und vier roten Kugeln, nummeriert mit den Zahlen $4, 5, 6, 7$, werden fünf Kugeln mit einem Griff gezogen.

   C: Es werden alle schwarzen Kugeln gezogen,

   D: Es werden genau zwei schwarze Kugeln gezogen.

Aufgabe 1.IV (8 Punkte).

a) Sei $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω. Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ und

$$A = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ für unendlich viele } n\},$$

Zeigen Sie, dass

$$\text{(i)} \quad A = \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} A_n, \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \mathbb{1}_A = \limsup_{n \to \infty} \mathbb{1}_{A_n}.$$

Hier bezeichnet $\mathbb{1}_A : \Omega \to \{0, 1\}$ die Indikatorfunktion der Menge A mit

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in A, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Sei Ω überabzählbar und $\mathcal{G} = \big\{\{\omega\} : \omega \in \Omega\big\}$ das System der einelementigen Teilmengen von Ω. Zeigen Sie, dass

$$\sigma(\mathcal{G}) = \big\{A \subset \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\big\}.$$