Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier, Christian Wiesel
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2015/16

10. Aufgabenblatt zur Stochastik 1

Abgabe bis **Freitag, 15. Januar 2016, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Kristina Mey PF 140, Jan Niklas Lusga PF 145, Patrick Schuhmann PF 219, Urs-Frederik Baier PF 108, Daniel Altemeier PF 161*, diese Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128; das *Postfach 2215* von *Jason Uhing* befindet sich rechts neben der Tür zum Kopierraum). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Aufgabe 10.I (8 Punkte).

a) Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige Ereignisse mit $\mathbb{P}(A_n) < 1$. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$\mathbb{P}(\cup_n A_n) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_k \text{ für unendlich viele } k\}) = 1$$

b) Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und eine Folge von Ereignissen $(A_n)_n$ an, für die gilt:

$$\sum_k \mathbb{P}(A_k) = \infty \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_k \text{ für unendlich viele } k\}) < 1$$

Aufgabe 10.II (8 Punkte). Aus einer Urne, in der sich zu Beginn genau eine rote und eine schwarze Kugel befinden, werde unendlich oft eine Kugel gezogen, wobei nach jedem Zug die gezogene Kugel zurückgelegt wird. Außerdem werden nach dem n-ten Zug jeweils zusätzlich $a_n \in \mathbb{N}$ rote Kugeln hinzugefügt. Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass die schwarze Kugel insgesamt unendlich oft gezogen wird.

a) Beschreiben Sie das Experiment mit einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum.

b) Bestimmen Sie p für den Fall $a_n = a$, mit $a \in \mathbb{N}$.

c) Bestimmen Sie p für den Fall $a_n = n$.

d) Sei $\alpha \in \mathbb{N}$ und es gelte

$$\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n^\alpha} \to 1, \quad n \to \infty.$$

Bestimmen Sie p in Abhängigkeit von α.

Aufgabe 10.III (8 Punkte). Seien X, Y nicht-diskrete Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^1$.

a) Zeigen Sie durch diskrete Approximation, dass $X + Y \in \mathcal{L}^1$ gilt, sowie

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y).$$

b) Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Implikationen:

   i) $\mathbb{E}(X) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X = 0) = 1$.

   ii) $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) \Rightarrow \mathbb{P}(X = Y) = 1$.

   iii) $\mathbb{E}(|X - Y|) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X = Y) = 1$.

c) Verallgemeinern Sie die *Produktregel bei Unabhängigkeit* auf den Fall $n > 2$, zeigen Sie also, dass für unabhängige $X_1, ..., X_n$ aus $\mathcal{L}^1$ gilt, dass $X_1 \cdot ... \cdot X_n \in \mathcal{L}^1$ und $\mathbb{E}(X_1 \cdot ... \cdot X_n) = \mathbb{E}(X_1) \cdot ... \cdot \mathbb{E}(X_n)$.

Aufgabe 10.IV (8 Punkte). Es sei $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funkion, $X \in \mathcal{L}^1$ und $\varphi \circ X \in \mathcal{L}^1$. Zeigen Sie, dass

$$\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)).$$

Hinweis: Legen Sie im Punkte $\mathbb{E}(X)$ eine Tangente an φ an.