Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier, Christian Wiesel
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2015/16

11. Aufgabenblatt zur Stochastik 1

Abgabe bis **Freitag, 22. Januar 2016, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Kristina Mey PF 140, Jan Niklas Lusga PF 145, Patrick Schuhmann PF 219, Urs-Frederik Baier PF 108, Daniel Altemeier PF 161*, diese Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128; das *Postfach 2215* von *Jason Uhing* befindet sich rechts neben der Tür zum Kopierraum). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Aufgabe 11.I (8 Punkte). Bestimmen Sie in den Fällen

a) X ist eine $\mathcal{U}_{(0,1)}$-verteilte Zufallsvariable,

b) X ist eine $\mathcal{N}_{0,\nu}$-verteilte Zufallsvariable mit $\nu > 0$,

c) X ist eine zum Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilte Zufallsvariable,

für alle $k \geq 1$ das sogenannte k-te Moment $\mathbb{E}(X^k)$. Berechnen Sie außerdem in allen drei Fällen die Varianz $\mathrm{Var}(X)$.

Aufgabe 11.II (8 Punkte). Seien $X, Y \in \mathcal{L}^2$ und es gelte ohne Einschränkung $\mathrm{Var}(X) = 1$.

a) Zeigen Sie, dass die quadratische Abweichung $\mathbb{E}((Y - (a + bX))^2)$ zwischen Y und der affinen Transformation $a + bX$ von X minimiert wird für $b = \mathrm{Cov}(X, Y)$ und $a = \mathbb{E}(Y - bX)$.

b) Was bedeutet diese Aussage im Fall unkorrelierter Zufallsvariablen X und Y?

Aufgabe 11.III (8 Punkte). Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $X, Y : \Omega \to \Omega'$ unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in einem messbaren Raum $(\Omega', \mathcal{F}')$ und Verteilung $\mathbb{P}' := \mathbb{P} \circ X^{-1} = \mathbb{P} \circ Y^{-1}$. Seien $f, g : \Omega' \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen auf $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ und es gelte $f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{P}')$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}'}(f, g) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left([f(X) - f(Y)]\,[g(X) - g(Y)]\right).$$

Folgern Sie: Ist $(\Omega', \mathcal{F}') = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ und sind f, g beide monoton wachsend, so sind f, g positiv korreliert, d.h., es gilt $\mathrm{Cov}_{\mathbb{P}'}(f, g) \geq 0$.

Aufgabe 11.IV (8 Punkte). Nach Korollar 5.5. der Vorlesung gilt für alle $Y \in \mathcal{L}^2$ und alle $\varepsilon > 0$ die sogenannte *Tschebyscheff*-Ungleichung:

$$\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(Y)}{\varepsilon^2}.$$

a) Folgern Sie aus der Markov-Ungleichung (Proposition 5.4), dass für alle $X \in \mathcal{L}^2$ und alle $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(X^2)}{\varepsilon^2}.$$

b) Zeigen Sie, dass für alle gegebenen $0 < b \leq a$ es eine Zufallsvariable X gibt mit $\mathbb{E}(X^2) = b^2$, für die gilt:

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) = \frac{b^2}{a^2}.$$

c) Zeigen Sie

$$\mathbb{E}(f(|X|)) = \int_0^\infty f'(x) \cdot \mathbb{P}(|X| \geq x)dx,$$

für $f(x) = x^k, k \in \mathbb{N}$.
Hinweis: Wenden Sie den Satz von Fubini an.

d) Zeigen Sie, dass für alle $X \in \mathcal{L}^2$ mit $0 < \mathbb{E}(X^2) < \infty$ gilt:

$$\lim_{a \to \infty} a^2 \cdot \mathbb{P}(|X| \geq a) = 0.$$