Prof. Dr. Barbara Gentz
Daniel Altemeier, Christian Wiesel
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

WS 2015/16

12. Aufgabenblatt zur Stochastik 1

Abgabe bis **Freitag, 29. Januar 2016, 12:00 Uhr**

Bitte legen Sie Ihre Lösungen in das Postfach des Leiters Ihrer Übungsgruppe (*Kristina Mey PF 140, Jan Niklas Lusga PF 145, Patrick Schuhmann PF 219, Urs-Frederik Baier PF 108, Daniel Altemeier PF 161*, diese Postfächer befinden sich im Kopierraum V3-128; das *Postfach 2215* von *Jason Uhing* befindet sich rechts neben der Tür zum Kopierraum). Heften Sie die Blätter in der richtigen Reihenfolge zusammen, und schreiben Sie Ihren Namen als auch den Namen des Übungsgruppenleiters deutlich sichtbar und gut leserlich oben auf das erste Blatt Ihrer Abgabe.

Aufgabe 12.I (Konvergenz der empirischen Mittelwerte) (8 Punkte).
Ein sechsseitiger fairer Würfel werde n mal geworfen und es bezeichne S_n die Anzahl der dabei geworfenen Einsen.

a) Zeigen Sie, dass die relative Anzahl S_n/n der geworfenen Einsen *fast sicher* für $n \to \infty$ gegen $1/6$ konvergiert.

b) Zeigen Sie, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N_\varepsilon$ mit Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.99 die relative Anzahl S_n/n um nicht mehr als ε von $1/6$ abweicht.

c) Bestimmen Sie ein geeignetes N_ε.

Aufgabe 12.II (Erwartung versus Wahrscheinlichkeit) (8 Punkte).
Anton schlägt Brigitte das folgende Spiel vor:
"Hier habe ich eine unfaire Münze, die Kopf mit Wahrscheinlichkeit $p \in (1/3, 1/2)$ zeigt. Du brauchst nur 100 Euro Startkapital; jedes Mal, wenn die Münze Kopf zeigt, verdoppele ich dein Kapital, andernfalls musst du mir die Hälfte deines Kapitals zahlen."
X_n bezeichne Brigittes Kapital nach dem n-ten Münzwurf.

a) Zeigen Sie, dass gilt: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) \to \infty$.

b) Beweisen Sie, dass fast sicher $\lim_{n\to\infty} X_n \to 0$ gilt.

c) Soll sich Brigitte auf das Spiel einlassen?

Aufgabe 12.III (Große Abweichungen empirischer Mittelwerte vom Erwartungswert) (8 Punkte).
Es seien $X_1, X_2, ...X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen, so dass $\mathbb{E}(e^{tX_1})$ für alle $t > 0$ existiert. Ferner sei $\psi(t) := \log \mathbb{E}(e^{tX_1})$ $(t > 0)$ und $S_n := X_1 + ... + X_n$. Zeigen Sie, dass für alle $t > 0$ und alle $x > 0$ gilt:

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}S_n \geq x\right) \leq e^{n(\psi(t)-tx)}.$$

Wir nehmen nun zusätzlich an, dass X_1 zu $0 < p < 1$ Bernoulli-verteilt ist. Zeigen Sie, dass für alle $p < x < 1$ gilt:

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}S_n \geq x\right) \leq e^{-nh(x;p)},$$

wobei $h(x;p) = x \log \frac{x}{p} + (1-x) \log \frac{1-x}{1-p}$.

Aufgabe 12.IV (8 Punkte).
Wir betrachten eine Lampe, deren Glühbirne jeweils sofort ausgetauscht wird, sobald sie durchgebrannt ist. Seien $X_1, X_2, ...$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen in $\mathcal{L}^2$ mit Werten in $(0, \infty)$ und Erwartungswert $\mu := \mathbb{E}(X_1) > 0$, wobei X_k die Lebensdauer der k-ten Glühbirne beschreibe. Somit ist durch $T_n := X_1 + ... + X_n$ der Zeitpunkt gegeben, zu dem die n-te Glühbirne durchbrennt, und $N_t := \sup\{n : T_n \leq t\}$ beschreibt die Anzahl der zum Zeitpunkt $t > 0$ bereits durchgebrannten Glühbirnen.
Zeigen Sie, dass gilt:

$$\frac{N_t}{t} \to \frac{1}{\mu}, \quad \text{fast sicher} \quad \text{für } t \to \infty.$$